К. А. ПУТИЛОВ

КУРС ФИЗИКИ

I

ФИЗМАТГИЗ · 1962

К. А. ПУТИЛОВ

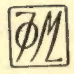
КУРС ФИЗИКИ

ТОМ I

МЕХАНИКА. АКУСТИКА.
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА.
ТЕРМОДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ДЕСЯТОЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для высших учебных заведений



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

13-5-2

Константин Анатольевич Путилов.
Курс физики, т. I.

Редактор *Жаботинский Е. Е.*
Техн. редактор *Мурашова Н. Я.* Корректор *Сечейко Л. О.*

Печать с матриц. Подписано к печати 1/II 1962 г. Бумага 60 × 90[1]/[16]. Физ. печ. л. 35.
Условн. печ. л. 35. Уч.-изд. л. 39,04. Тираж 50 000. Цена книги 1 р. 27 к. Заказ № 2706.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза. Москва, Ж-54, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава X

Колебательное движение

Глава XI

Учение о волнах

Глава XII

Акустика

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Глава XIII

Молекулярно-тепловое движение и первое начало термодинамики

Глава XIV

Основы молекулярно-кинетической теории

Глава XV

Теплопередача, диффузия и вязкость. Вакуум

Глава XVI

Термодинамическое равновесие и второе начало термодинамики

Глава XVII

Физика реальных газов и паров. Уравнение Ван-дер-Вальса

Глава XVIII

Физика жидкостей

Глава XIX

Физика твердых тел

Глава XX

Термодинамические процессы в двигателях и сверхзвуковое движение

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный трехтомный курс физики предназначается в качестве учебного пособия для высших учебных заведений с расширенной программой физики.

В первом томе изложены физические основы механики, акустика, молекулярная физика и термодинамика, во втором — учение об электричестве, в третьем — оптика и атомная физика.

Главное внимание уделено достижениям экспериментальной физики, разъяснению основных законов физики и характеристике технических применений физики. Приведены исторические сведения и рассмотрены некоторые философские вопросы физики.

При составлении данного курса использован, где это было возможно (более всего в первом томе), текст нашего курса, издававшегося в прошлые годы Учпедгизом. Двадцать лет назад в однотомном варианте курса некоторые параграфы и главы были написаны В. С. Григорьевым, С. М. Ильяшенко, П. В. Маториным, В. В. Фурдуевым, Ю. В. Ходаковым и др. Позже для единства изложения весь материал, с согласия соавторов и по рекомендации рецензентов, был переработан или заново написан мной, а по разделу оптики — проф. В. А. Фабрикантом. В первом томе §§ 133 и 137 написаны С. М. Ильяшенко.

Первые два тома издавались в 1954, 1956 и 1957 гг. В этом издании осуществлены некоторые сокращения текста (выпущен материал, который известен студентам из элементарного курса физики) и устаревшие места заменены новыми. Учтены многочисленные рекомендации читателей и рецензентов по изложению отдельных вопросов, в частности, в первом томе курса раздел молекулярной физики теснее, чем в предыдущем издании, объединен с пояснением законов термодинамики.

В подготовке нового издания второго тома курса физики большую помощь оказал мне В. В. Шепел. Кроме просмотра всей рукописи второго тома и отдельных вставок в нее, В. В. Шепелем заново написана глава о полупроводниках.

Все указания по усовершенствованию книги будут приняты автором с глубокой благодарностью (Москва Д-47, ул. Горького, д. 43, кв. 30).

Профессор *К. А. Путилов*

ВВЕДЕНИЕ

Физика относится к числу естественных наук, задачей которых является изучение природы в целях ее подчинения человеку.

В древности слово «физика» [1]) означало природоведение. Впоследствии природоведение расчленилось на ряд наук: физику, химию, астрономию, геологию, биологию, ботанику и т. д. Одно из первых изложений природоведения в систематизированном виде было дано древнегреческим мыслителем Аристотелем. Его «Физика» (в 8 книгах) на долгое время определила общее физическое мировоззрение.

Лучшие представители античной натурфилософии (Левкипп, Демокрит, Лукреций) положили начало *материалистическому пониманию природы* и, несмотря на крайнюю недостаточность фактического материала, пришли к представлению об атомном строении материи. В средние века учение Аристотеля (в догматической трактовке, исключавшей возможность прогресса) было приспособлено церковью для укрепления авторитета священного писания.

В XV—XVII вв. в связи с развертыванием торговли и промышленности возродился интерес к механике и астрономии и началось оформление наук, составляющих основу техники,— физики и химии. Работы Ф. Бэкона, Н. Коперника, И. Кеплера, Г. Галилея, И. Ньютона, Р. Декарта и их последователей привели к освобождению науки от религиозного догматизма и утвердили научный принцип: *всякое подлинное знание основано на опыте* (на совокупности наблюдений и экспериментов), а не на авторитете того или иного ученого. Однако и в XVII, и в XVIII вв. представители науки все еще были вынуждены изыскивать компромисс с религией, поддерживая догмат о первом толчке, в котором якобы нуждалась вселенная, чтобы прийти в движение. Впервые этот догмат был поколеблен теорией Канта и Лапласа о развитии солнечной системы из туманности и *законом вечности материи и ее движения*, который был предугадан Ломоносовым. Ломоносов писал: «... все встречающиеся в природе изменения происходят так, что если к чему-либо нечто прибавилось, то это отнимается у чего-то другого... Так как это всеобщий закон природы, то он распространяется и на правила движения: тело, которое своим толчком возбуждает другое к движению, столько же теряет от своего движения, сколько сообщает другому, им двинутому».

---

[1]) От греческого physis — п р и р о д а.

В XIX в. на основе быстрого роста производительных сил, в период расцвета промышленного капитализма, прогресс науки чрезвычайно ускорился. Потребность в мощном и универсальном двигателе для индустрии и транспорта вызвала изобретение паровой машины, а ее появление побудило ученых к изучению тепловых процессов, что привело к развитию термодинамики и молекулярно-кинетической теории. Потребности же техники вызвали бурное развитие теории электричества и электротехники. Исследования молекулярного строения тел вскрыли электрическую природу молекулярных и атомных взаимодействий, что в свою очередь привело в наши дни к открытию атомной формы движения материи, раскрывающей необозримые перспективы для новой техники.

Среди всех наук о природе физика занимает в известной мере особое положение, так как предметом ее изучения служат все основные, наиболее общие, простейшие формы движения материи.

Но что означают понятия: «материя», «движение», «формы движения материи»?

Простейшими орудиями познания мира являются наши органы чувств. Инструментальная физика является дополнительным снаряжением глаза и уха человека.

Такие слова, как «свет», «цвет», «звук», «степень нагретости» и т. д., в обыденной жизни мы употребляем в одном смысле: мы вкладываем в них физиологическое содержание — содержание наших ощущений. В физике мы те же самые слова употребляем в ином смысле: мы обозначаем этими словами те объективно протекающие процессы, которыми порождаются наши ощущения.

Наши ощущения разнородны. Порождающие их явления крайне разнообразны. Но многие явления имеют важные черты сходства, поэтому для понимания явлений природы необходимы обобщения. При самом широком обобщении обнаруживается, что все существующее представляет собой материю.

«*Материя — объективная реальность, существующая независимо от человеческого сознания и отображаемая им... Материя есть то, что́, действуя на наши органы чувств, производит ощущения*» (Ленин).

Неотъемлемым свойством материи является движение. *Движение представляет собой форму существования материи.*

Движение в философском смысле — это всякое изменение материи, всякий происходящий в природе процесс: химическая реакция, электромагнитное излучение, рост дерева, мышление.

Простейшей формой движения является перемещение тел и частиц в пространстве — механическое движение. Некоторые физические открытия XIX в. дали возможность как бы «свести» целый ряд явлений, казавшихся совершенно разнородными, к механическому движению. Так, например, тепловое состояние тела было как будто «сведено» к механическому движению его молекул. На этой

почве укрепилось предположение, что все вообще явления природы в конечном счете представляют собой только механическое движение; был выдвинут лозунг — свести все естествознание к механике. Такое воззрение носит название *механистического мировоззрения*.

Его ошибочность с наибольшей ясностью была вскрыта философией *диалектического материализма*. Дело в том, что сущность высших (более сложных) форм движения в действительности несводима к механическому движению. Каждая форма движения имеет особые черты, составляющие ее своеобразие (ее качество). Даже тепловое движение, хотя оно и слагается из механического движения молекул, не исчерпывается им; при тепловом движении перемещения молекул в среднем подчинены особым законам статистики, которые не вытекают из законов механики.

Законы механики важны для понимания низших форм движения, но они недостаточны для понимания высших форм. Уже в молекулярных движениях обнаруживаются явления, которые не могут быть объяснены и предсказаны посредством одних только ньютоновых законов механики. Именно эти явления, не поддающиеся исчерпывающему объяснению, если исходить только из перемещений, выступают на первый план, когда мы обращаемся к изучению внутриатомных движений, а также и тех движений, которые лежат в основе электрических и магнитных процессов. В столь высоких формах движения, как биологические процессы и мышление, перемещения играют, несомненно, второстепенную роль в сравнении с другими своеобразными сторонами этих процессов, несводимыми к механическому движению. Природа сложнее, чем думают механисты.

При научном исследовании физических явлений в подавляющем большинстве случаев мы встречаемся с теснейшей взаимосвязью, со взаимопроникновением и преобразованием всех форм движения материи. Это взаимопроникновение понятно только с точки зрения диалектики. Диалектический подход к явлениям природы обеспечивает неискаженное, правильное отражение действительности в нашем сознании. Это решающее, абсолютное преимущество диалектического метода над всеми другими подходами к изучению явлений природы объясняется тем, что основные черты, характеризующие диалектический метод, не придуманы произвольно, не навязывают нашему познанию искусственных, не свойственных ему мертвых схем, но, напротив, точно воспроизводят самые общие, не имеющие исключения законы диалектики природы.

Все науки, в частности физика, подтверждают, что:

во-первых, любое явление происходит в органической, *неразрывной связи* с окружающими явлениями; желая обособить явление, разорвать его связь с окружающими явлениями, мы неизбежно искажаем явление;

во-вторых, все существующее подвержено закономерному и неисчерпаемому изменению, *развитию*, присущему самой природе вещей;

в-третьих, при непрерывном развитии накопление количественных изменений приводит к прерывистым, скачкообразным *качественным* превращениям;

в-четвертых, развитие всего существующего происходит в вечной борьбе *противоположных тенденций*, в борьбе между старым и новым, между отмирающим и нарождающимся.

Диалектический метод изучения явлений природы отражает эти всеобщие объективные законы, воспроизводит в принципах познания диалектику объективного мира.

Ученые XIX в. в своей научной работе не могли не исходить из убеждения в реальности внешнего мира, который они изучали; поэтому в своей конкретной работе они являлись *стихийными материалистами*; но в своем мировоззрении многие из них в той или иной степени отдавали дань *идеализму*, в особенности в вопросах, связанных с философией.

В конце XIX и в начале XX вв. возникла утонченная форма идеализма — *махизм* (по имени основателя этого учения австрийского физика и философа Эрнста Маха). Последователи Маха утверждают, что в своем «опыте» мы познаем не свойства объективной реальности, а лишь свои собственные ощущения. Следует иметь в виду, что слово «опыт» понимается махистами иначе, чем материалистами. Материалисты называют опытом проверку практикой теоретических выводов о закономерностях внешнего мира; эксперимент является решающим мерилом верности той или иной научной теории, ее соответствия объективной реальности. Для махистов опыт есть совокупность наших ощущений, а наука — их упорядочивание в нашем сознании. По их мнению, цель науки — не раскрытие истины, а приведение фактов в такую систему, которая обеспечивала бы наибольшую экономию мышления. Физические понятия, законы и теории, по мнению махистов, не раскрывают природы вещей, но представляют собой только удобную форму для совершенно условного «описания фактов». Под «фактами» махисты подразумевают комплексы наших ощущений.

Первое и наиболее глубокое разоблачение махизма дано В. И. Лениным в книге «Материализм и эмпириокритицизм». Весь ход исторического развития науки, равно как и ход каждого отдельного научного исследования, происходит по диалектическому закону, сформулированному В. И. Лениным в следующих словах: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности.» *Научное исследование является единством теории и практики при решающей роли практики и ведущей роли теории.*

Результат эксперимента, при постановке которого исследователь уже руководствуется определенной гипотезой, дает возможность проверить гипотезу, уточнить и расширить ее до степени теории, установить физический закон, т. е. установить характер объективной зависимости между различными физическими величинами.

Опыт (наблюдение, эксперимент, практика) является источником всех наших знаний. Но наряду с опытом для развития знаний руководящее значение имеет теоретическое мышление. Без теоретических обобщений, без указаний теории о разумном направлении экспериментов невозможно движение науки вперед.

Деятельность теоретического мышления направлена и на расчленение (*анализ*) фактов, и на связывание различаемого в одно целое — на обобщение (*синтез*) посредством отвлечения от второстепенных свойств предмета или маловажных признаков явления. В результате обобщения большого количества фактов наше сознание создает *представления* и *понятия*. Таким образом, абстрактное мышление оперирует понятиями, которые *отражают в полном соответствии с объективной реальностью* типичные черты множества сходных вещей и характерные черты однородных явлений. Отражение — это согласование, соответствие между восприятием или мыслью и объективной реальностью; отражение — это образ, вернее, картина, как бы копия объективного мира.

При физическом исследовании мира, чтобы раскрыть закономерности, относящиеся к таким формам движения, как, например, электрические явления, которые непосредственно не доставляют нам большого числа чувственных восприятий, мы пользуемся представлениями и понятиями, выработанными при исследовании наиболее наглядной, наиболее осязаемой формы движения — механического движения. Именно так были введены в физику понятия об электрической силе, об электрической работе, об электрическом потенциале и т. п. По мере развития физики некоторые неудачно введенные из механики понятия приходилось отбрасывать, так как ни одна сложная форма движения несводима полностью к более простой форме движения; другие же понятия в основе своей сохранились, причем в деталях преобразовывались соответственно открываемым особенностям изучаемой формы движения.

Физические понятия и представления о физических величинах вовсе не являются произвольным плодом творчества нашего мышления или простым результатом соглашений, сделанных физиками в целях унификации измерений, как это кажется махистам; *физические понятия и представления о физических величинах отражают объективную реальность и отражают ее тем вернее и полнее, чем выше ступень развития физики*.

Все ошибочное, что вводится в науку вследствие недостаточности наших познаний и по вине увлечения формализмом, который часто засоряет физику искусственными, ложными представлениями,—

все это в последующем развитии науки вскрывается как несоответствие истине и отбрасывается.

Развитие теоретических представлений происходит посредством замены одних устаревших теорий другими, более совершенными, которые по-новому, точнее объясняют возросший круг изученных явлений и в то же время *сохраняют в себе все зерна истины, имевшиеся в старых теориях.*

Успехи современной физики с очевидностью показывают торжество диалектического материализма. Тем не менее в капиталистических странах особенно рекламируются такие трактовки физических теорий, которые открывают дорогу для идеалистических извращений. Не случайно, что зарубежные научные журналы по физике охотно уделяют место обсуждению неометафизических воззрений. Некоторые видные зарубежные ученые делали и делают попытки извлечь из теории относительности вывод о конечности вселенной и вычислить «радиус» и «возраст» мира, другие пытались из современной квантовой теории прийти к выводу о «свободе воли» у электрона.

Новейшие грандиозные достижения физики побуждают многих думать, что любые и, может быть, даже недостаточно обоснованные выводы современной теоретической физики являются истинными. Кроме того, нередко можно слышать заявления, будто каждая «верная» теория материи должна считаться с точки зрения диалектического материализма вполне совершенной в своей основе.

В связи с этим полезно напомнить, что господствующие теории всегда представлялись современникам «верными теориями», но со временем выяснялось, что в них имеется только зерно истины, а многое, принесенное философскими воззрениями авторов теорий, оказывалось ошибочным. Так, Сади Карно открыл второе начало термодинамики, но представление о теплороде, лежавшее в основе его теории, через тридцать — сорок лет было отброшено. Крупнейшие завоевания в оптике были сделаны Гюйгенсом и Френелем на базе исключенных в настоящее время представлений о механических колебаниях эфира, и т. д.

Нет никаких оснований абсолютизировать современные физические теории; нельзя воображать, что они окажутся вечными, что последующее развитие физики не уточнит их, и не только в деталях, но и в некоторых исходных положениях.

Наряду с неизбежной сменой теорий, ведущей к их усовершенствованию, т. е. к более полному отражению реальности, громадное значение для развития физики имеет процесс постепенного, а иногда происходящего скачками *преобразования смысла, содержания физических понятий.*

Примером может служить развитие одного из основных физических понятий — *понятия об атоме* вещества.

Следуя Демокриту, в древности считали атом крайне малой частицей вещества, твердой, как крохотный камешек, имеющей шарообразную, овальную или какую-либо другую форму и снабженной крючкообразными выступами, которые своими сцеплениями при сближении атомов обеспечивают прочность тела. В XVII и XVIII вв. атом понимали как предел механического и химического деления вещества, как абсолютно твердую инертную частицу, которая является вместе с тем центром сил взаимного тяготения и сил молекулярного сцепления. В конце XIX и в начале XX вв. атом стали представлять себе как сложную частицу, состоящую из облака положительного электричества и некоторого числа размещенных в нем электронов, которые при внешних воздействиях на атом смещаются и двигаются по законам классической электродинамики. Еще несколько позже, в начале второго десятилетия XX в., обнаружилось, что положительное электричество атома сосредоточено в крохотном массивном атомном ядре; вокруг ядра с громадной быстротой вращаются электроны, которые удерживаются только на определенных стационарных орбитах и испытывают изменение в состоянии движения не по законам классической электродинамики, а по совершенно иным, квантовым законам.

В настоящее время мы знаем, что ядро любого атома является сложным и состоит из протонов и нейтронов; кроме того, стало ясным, что строение атома обрисовывается ближе к истине не геометрической, а энергетической картиной, которая раскрывается волновой механикой (т. III).

Другим примером глубокого преобразования смысла понятий может служить развитие представления о *массе*.

Представление о массе как о количестве материи в теле и в то же время как о мере инертности было введено в физику Ньютоном. Долгое время массу понимали как абсолютное, неизменное свойство тела, совершенно независимое от состояния движения тела, от степени его нагретости, наэлектризованности и т. д. Однако, когда были открыты и исследованы электроны, обнаружилось, что их масса имеет электромагнитное происхождение. Это привело в свою очередь к открытию зависимости массы тела от скорости его движения, что сказывается только при очень больших скоростях, соизмеримых со скоростью света. Это открытие подсказало, что скорость света в вакууме есть предельная, наибольшая возможная скорость движения. Наконец, было установлено, что *масса* тела и *энергия* тела *являются двумя мерами материи в ее движении* и что эти две меры: одна, определяющая *количество материи*,— масса, и другая, определяющая *движение и взаимодействие*,— энергия, строго пропорциональны друг другу.

Этот *закон пропорциональности массы и энергии* служит в настоящее время руководящим принципом при исследовании процессов, происходящих в атомах и ядрах.

Смена физических теорий и преобразование смысла физических понятий вызывается расширением добытых физикой сведений. А для расширения фактических сведений о явлениях природы решающее значение имеет создание все новых и новых методов физического исследования мира. Предопределяя своими открытиями успехи техники, физика в то же время в оснащенности приборами полностью зависит от достижений техники.

Зависимость инструментальной физики от уровня производства и техники исторически сказалась в том, что с течением времени физика неуклонно переходила к исследованию все более тонких, более скрытых видов физического движения материи, где *перемещение испытывают все более мелкие частицы вещества* и где само геометрическое перемещение частиц отступает на второй план в сравнении с другими явлениями. Это направление в историческом развитии физики можно охарактеризовать схемой: исследование *механического* движения тел (механика твердых, жидких и газообразных тел) → исследование *упругих* движений тел (теория упругости, акустика) → исследование молекулярного теплового движения (кинетическая теория, термодинамика) → исследование *электрического* движения (электродинамика) → исследование внутримолекулярных и *внутриатомных* движений (физическая химия, оптика) → исследование корпускулярно-лучистых и *внутриядерных* движений (электронная физика, учение о радиоактивности и космических лучах, учение о ядерных превращениях).

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ И АКУСТИКА

ГЛАВА I

МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ (ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ)

§ 1. О взаимосвязи явлений и допустимых границах их схематизации в физике

Применяя законы механики для исследования явлений природы или для решения задач техники, мы всегда принуждены мысленно упрощать, «схематизировать» изучаемые процессы. Законы механики весьма точны. Однако их применение к анализу действительной картины движения тел нередко приводит к неточным, а подчас и совсем ошибочным заключениям. Так получается потому, что не всегда легко правильно «схематизировать» изучаемые явления.

Понять и рассчитать какое-либо явление часто оказывается невозможным, если не идти по пути некоторого мысленного упрощения явления. Но, с другой стороны, отрывая явление для упрощения от его связей со смежными явлениями, можно исказить истинную сущность явления, что опять-таки сделает невозможным правильное понимание явления.

Все явления природы столь тесно связаны друг с другом, что без некоторого отступления от действительности невозможно выделить чисто механические процессы, которые всецело от начала до конца определялись бы только законами механики. С аналогичным положением мы сталкиваемся и в других разделах физики. Определенная схематизация явлений для возможности их изучения неизбежна. Но никогда не следует забывать, что неосторожная, неосмотрительная схематизация таит в себе опасность отрыва от действительности. Упрощение истинной картины явлений, сделанное неудачно, влечет за собой грубые ошибки в теоретических выводах, сколь бы ни были совершенны математические методы, примененные к анализу такой неправильно построенной схемы. Нередко случалось, что чрезмерная схематизация явлений приводила даже самых компетентных ученых к извращению научного метода, к подмене физики метафизикой, схоластикой.

В противоположность метафизике диалектический материализм учитывает, что в природе предметы и явления органически связаны друг с другом. Чтобы понять какое-либо явление природы, его всегда нужно рассматривать в неразрывной связи с окружающими явлениями.

Этим не исключается полезность абстрагирования для обнаружения главных особенностей явления и для раскрытия основных количественных соотношений. Вследствие сложности явлений часто оказывается необходимым, отвлекаясь от второстепенных деталей явления, воображать себе изучаемое явление в той или иной мере обособленным. В этом случае мы подменяем явление его упрощенной *схемой*. Без схематизирования изучаемых явлений физика не могла бы пользоваться математическим аппаратом, не имела бы теории, не могла бы придавать экспериментам нужную целеустремленность, т. е. оказалась бы бессильной и бесполезной.

Но правильная схема явления не порывает всех внутренних связей этого явления с другими явлениями. Напротив, правильно составленная схема явления выделяет и, таким образом, подчеркивает, освещает *главную взаимосвязь* явлений, оставляя в стороне все неосновные, нехарактерные взаимодействия и второстепенные влияния. Если, разрабатывая схему явления, мы неточно определим главную взаимосвязь явлений, эта ошибка становится роковой, и все соображения, основанные на подобной схеме, обнаружат свою непригодность [1]).

Поясним сказанное простейшим примером. А именно, обратимся к вопросу о картине явлений, происходящих при полете артиллерийского снаряда.

При полете артиллерийского снаряда траектория снаряда зависит от многих обстоятельств: от величины и качества порохового заряда и устройства артиллерийского орудия, от размеров снаряда, от сопротивления воздуха, от направления ветра, формы снаряда, скорости вращения снаряда вокруг его оси и т. д.

Схематизируя это явление, мы устанавливаем, что траектория снаряда более всего зависит от тяготения снаряда к Земле и от скорости и направления его движения по инерции после выстрела. В этой первой элементарной схеме мы рассматриваем снаряд как «материальную точку» и отвлекаемся от всех влияний, кроме веса и начальной скорости. При таком упрощении задача вычисления траекто-

---

[1]) Следует отметить, что понятие главной взаимосвязи изучаемого явления с другими явлениями само в определенной мере зависит от задач, которые мы ставим себе, приступая к исследованию данного явления. Так, изучая с точки зрения механики явление соударения весьма упругих тел, мы вправе считать второстепенными все молекулярные процессы, порождаемые ударом в соударяющихся телах; но при другом подходе — в молекулярной теории упругости — те же молекулярные процессы и составляют главный предмет исследования.

рии снаряда оказывается простой: получается, как показано в § 14, парабола.

Составляя более точную схему явления, мы можем учесть влияние сопротивления воздуха. Расчет усложняется, но может быть выполнен на основе общих законов механики и специального закона, определяющего зависимость сопротивления от скорости движения снаряда. Оказывается, что траектория снаряда отличается от параболы.

Далее нужно учесть, что снаряд при движении по винтовой нарезке в стволе орудия получает вращение, которое придает снаряду устойчивость в полете. В связи с фактом вращения снаряда обнаруживается, что нельзя рассматривать полет снаряда как движение материальной точки. Приходится усложнять расчет применением законов динамики вращательных движений и учетом влияния вращения снаряда на сопротивление его движению в воздухе.

Обращаясь к еще более сложной, но зато и более точной схеме, можно определить зависимость начальной скорости снаряда при вылете его из дула орудия от величины и качества порохового заряда, длины ствола и т. д. При этом мы должны уже, кроме законов механики, использовать законы, которые устанавливаются другими разделами физики.

Однако даже вполне точное предвычисление траектории снаряда еще далеко не исчерпывает полной картины явлений, которые сопутствуют движению снаряда. Металлические стенки снаряда состоят из тесно расположенных атомов (ионов) металла. Стенки снаряда при движении его нагреваются вследствие трения. Состояние поверхностного слоя атомов металла изменяется. В то же время сложные явления происходят в воздухе: воздух отбрасывается снарядом в стороны и при этом уплотняется, разогревается, завихряется. В воздухе возникают звуковые явления, которые далеко разносят весть о полете снаряда. Таким образом, действительная картина явлений при полете снаряда несоизмеримо богаче, чем любая доступная для расчета схема явлений.

В последующем мы рассмотрим еще другие примеры, показывающие, с какой осторожностью нужно подходить к неизбежной в физике схематизации явлений. Мы убедимся, что во всех случаях, как и в разобранном примере, признаком правильно составленной схемы явления служит выделение, учет главных, наиболее характерных связей этого явления с другими явлениями. Всегда, как и в случае исследования полета снаряда, обнаруживается, что единственный путь приближения к действительности заключается в последовательном усложнении изучаемых схем.

При исследовании механического движения в особенности важным является выяснение причин, вызывающих движение и обусловливающих тот или иной вид движения. Это — главная задача механики; часть механики, посвященная разрешению этой основной

задачи, носит название *динамики*. Зная причины движения, можно предсказать, при каких условиях исследуемые тела будут находиться в состоянии равновесия. Поэтому часть механики, занятая изучением условий равновесия тел,— *статика* — логически следует за динамикой, и, как мы увидим, все законы статики действительно могут быть получены из законов динамики. Поскольку изучение равновесия тел является делом менее сложным, чем изучение движения, то не удивительно, что исторически многие вопросы статики были решены раньше, чем была разработана динамика.

Начиная со второй половины прошлого столетия, сложилась традиция предпосылать изложению динамики учение о движении вне зависимости от причин, вызывающих движение; эта формальная часть механики носит название *кинематики*.

§ 2. Система ориентировки. Материальная точка и ее перемещение

Механическое движение есть перемещение тел или частиц в пространстве с некоторой скоростью. В этом кратком определении скрыто немало трудностей. Для определения перемещения тела нужно сопоставлять положение тела с положением каких-либо других тел или хотя бы одного тела, которое совершенно условно считается неподвижным. Интересующее нас движение может выглядеть по-разному в зависимости от того, по отношению к какому телу мы будем определять перемещения движущегося тела. Например, движение педали велосипеда кажется велосипедисту происходящим по кругу, тогда как для постороннего наблюдателя оно кажется происходящим волнообразно. Далее, нужно располагать точными способами измерения расстояний и масштабами, которые пригодны не только для определения расстояний между взаимно неподвижными телами, но также и для измерений, осуществляемых при движении тел. Наконец, для определения скорости движения необходимо располагать точными способами измерения времени.

Во всех случаях, кроме чрезвычайно стремительных движений со скоростью, близкой к скорости света, пространственные и временные измерения (масштабы длин и времени) можно считать не зависящими от скорости движения. Более сложно дело обстоит, когда приходится анализировать движения, происходящие со скоростями, близкими к скорости света; экспериментальные факты показывают, что скорость света в вакууме является максимально возможной в природе скоростью движения (предельной скоростью); в связи с этим (как будет пояснено в т. III при изложении теории относительности) обнаруживается необходимость уточнения наших обычных представлений о пространственных и временных измерениях.

Условно неподвижные тела, по отношению к которым решено рассматривать перемещения движущегося тела, называют *системой отсчета* или *системой ориентировки*, или, что то же самое, *системой координат*.

В технических приложениях физики и в обыденной жизни систему координат чаще всего связывают с Землей, которую в таких случаях считают как бы неподвижной, хотя всем отлично известно, что Земля испытывает суточное вращение, обращается вокруг Солнца и движется вместе с Солнцем.

Положение рассматриваемой точки C часто определяют, указывая *радиус-вектор* $\boldsymbol{r}$, т. е. длину и направление отрезка прямой, проведенной из начала координат в точку C (рис. 1). Радиус-вектор имеет проекции на оси координат (*компоненты* по осям), равные координатам точки C (x, y, z); поэтому

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (1)$$

(В данной книге векторы, в отличие от скаляров, набраны жирным шрифтом; числовые значения векторов набраны обычным шрифтом.)

Для точного определения перемещения тела нужно знать координаты всех частиц тела до и после перемещения. Однако если частицы тела сохраняют при перемещении неизменное расположение по отношению друг к другу и движутся параллельно друг другу, то, чтобы судить о перемещении такого тела, достаточно проследить за изменением координат одной какой-либо точки тела. Это, конечно, вносит значительное упрощение в исследование движения тела. Аналогичное упрощение становится также возможным вообще во всех тех случаях, когда важна приближенная картина движения тела в целом (именно поступательного перемещения в пространстве, а не вращения вокруг какой-либо оси, проходящей через тело); что же касается движения частиц тела по отношению друг к другу, то может оказаться, что они нас или вовсе не интересуют, или же по характеру задачи допустимо их рассматривать особо. Такой подход к изучению движения уместен в особенности тогда, когда размеры тела весьма малы в сравнении с интересующими нас перемещениями тела.

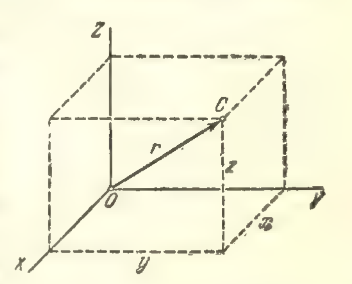


Рис. 1. Декартова система координат (*правовинтовая* система, принятая в данном курсе; если смотреть по направлению оси OZ, то поворот на 90° в сторону движения часовой стрелки приводит ось OX к совпадению с осью OY).

В указанном смысле и в указанных случаях можно отвлечься от формы тела и от движения его частиц или частей по отношению

друг к другу и рассматривать тело как некую *материальную точку*. Из сказанного ясно, что в одних случаях под материальной точкой можно понимать мельчайшую частицу вещества, в других случаях— большое, даже космическое, тело. Главные особенности движения волчка нельзя было бы выявить, если бы вздумали рассматривать движение волчка как движение материальной точки; с другой стороны, в некоторых задачах небесной механики вполне допустимо движение Земли и других планет вокруг Солнца рассматривать как движение материальных точек.

С точки зрения кинематики движение материальной точки характеризуется: формой *траектории*, т. е. линии, которую точка описывает при своем движении, *длиной пути* l, отсчитываемой вдоль траектории, и *векторами скорости* и *ускорения*. Вспомогательную роль играет *вектор перемещения* $\mathbf{s}$, представляющий собой отрезок прямой, проведенной из какого-нибудь начального положения в конечное положение перемещающейся точки [1]).

При прямолинейном движении материальной точки вектор перемещения является отрезком траектории; при криволинейном дви-

---

[1]) Напомним, что все векторы складываются по тому же правилу, по которому производится сложение векторов перемещения. Если точка испытала перемещение $\mathbf{s}_1$, а затем из нового начального положения $\mathbf{s}_2$ и т. д. (рис. 2), то суммарное («результирующее») перемещение $\mathbf{s}$ будет представлять собой отрезок

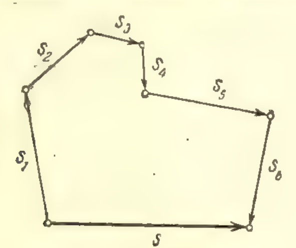


Рис. 2. Правило геометрического сложения векторов

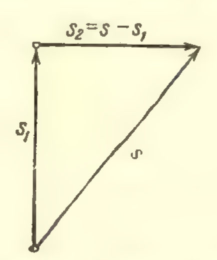


Рис. 3. Правило геометрического вычитания.

прямой, замыкающий многоугольник, сторонами которого служат складываемые перемещения, причем вектор этого результирующего перемещения следует считать направленным из исходного положения точки в ее конечное положение. Этот способ сложения называют *геометрическим сложением*, или правилом многоугольника.

Из этого правила, в частности, следует, что при сложении двух векторов результирующий вектор является диагональю параллелограмма, построенного на складываемых векторах, как на сторонах.

Вычитание представляет собой действие, обратное сложению. Поэтому, когда даны два вектора $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}_1$ и требуется найти их геометрическую разность, задача решается, как показано на рис. 3; чтобы вектор $\mathbf{s}$ был действительно равен сумме $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, надо искомый вектор $\mathbf{s}_2$ считать выходящим из конца вычитаемого вектора $\mathbf{s}_1$.

жении он замыкает рассматриваемую часть траектории (рис. 4). Понятно, что для разных промежутков времени векторы перемещения имеют, вообще говоря, разную величину и разное направление. Для бесконечно малого промежутка времени вектор перемещения при криволинейном движении в пределе совпадает по направлению с направлением касательной к траектории движения (понятно, что речь идет о касательной в том месте, где в данный момент находится движущаяся материальная точка).

Мгновенное положение точки определяется ее координатами x, y, z; перемещение точки означает изменение ее координат; очевидно, что вся картина движения явится точно установленной, если мы будем иметь уравнения, позволяющие для любого момента времени t вычислить координаты точки:

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t)\ \text{и}\ z=f_3(t). \tag{2}$$

Такие уравнения называют *кинематическими уравнениями движения.*

В любой момент времени материальная точка занимает (при заданном движении) вполне определенное положение в пространстве, изменяющееся со временем непрерывно. Соответственно кинематические уравнения какого угодно движения материальной точки должны *однозначно определять координаты точки* и состоять из так называемых *непрерывных функций.* Это утверждение, считающееся в классической механике самоочевидным, иногда называют *принципом точной локализации* [1]) (иначе «принцип полной детерминированности [2]) уравнений механики»).

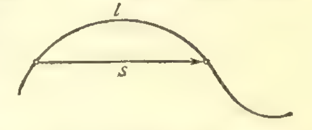


Рис. 4. Вектор перемещения **s** для одного из интервалов времени при криволинейном движении: длина пути l отсчитывается вдоль траектории.

С чисто кинематической точки зрения система ориентировки может выбираться произвольно, а траектория движущегося тела и остальные характеристики движения (скорость, ускорение) являются совершенно условными представлениями, имеющими конкретное содержание только по отношению к избранной системе отсчета. Очевидно, что движение тела C по отношению к телу K, с которым мы связали систему координат, будет иметь один характер, тогда как движение того же тела C по отношению к другому телу K' (если эта вторая система отсчета K' сама как-то движется по отношению к первой K) будет иметь совершенно иной вид. Так, какой-либо предмет, уроненный из окна равномерно движущегося вагона, падает по отношению к вагону по прямой, тогда как по отношению к железнодорожной насыпи он снижается по параболе.

---

[1]) От латинского localis — местный, свойственный только определенному месту.

[2]) От латинского determino — определяю.

Таким образом, с кинематической точки зрения все характеристики движения относительны, и ни одна система отсчета не может считаться имеющей какую-либо предпочтительность перед другими системами отсчета. Такой чисто кинематический подход к анализу движений со строгой последовательностью развит в теории относительности (т. III). Теория относительности показывает, что указанный кинематический подход к исследованию движений при должных соглашениях о выборе масштабов длин и времени и при определенной трактовке тяготения обеспечивает совершенно точное описание движений при любых скоростях вплоть до близких к максимально возможной в природе скорости движения (скорости света).

Следует отметить, однако, что указанный чисто кинематический подход к анализу движений, хотя он и обеспечивает полную точность описания движений, с физико-философской точки зрения оставляет желать многого, так как при таком подходе мы отрываем описание движения от исследования причин возникновения движения, что в большинстве случаев означает отрыв описания движения от реального распределения масс. А это влечет за собой искусственное сужение нашего представления о движении до его относительных отображений. Объективная сущность движения, т. е. картина движения вне зависимости от произвольно избранной нами системы ориентировки, оказывается утраченной, как бы лишенной смысла. В чисто кинематическом подходе к анализу движений и в утверждении, что выбор системы ориентировки произволен, заключается принципиальный отказ от стремления раскрыть действительную, объективную, не зависящую от способов наблюдения истинную картину движения. Возведение ограниченной кинематической точки зрения в руководящий принцип равносильно превращению физического релятивизма[1]) в философский релятивизм, т. е. ведет к ложному заключению, что условные, относительные отображения движения не имеют за собой никакой (не зависящей от наших наблюдений) истинной картины движения.

Правильное решение затронутых вопросов состоит в признании, что наши относительные отображения движений (при различных системах ориентировок) при всей их математической равноценности физически неравноценны: одни ближе соответствуют истине, другие дальше от нее. Какая система ориентировки полнее раскрывает объективную картину движения, это определяется анализом причин движения, что в большинстве случаев связано с учетом реального распределения масс.

Так, когда кто-либо роняет камень в глубокий колодец и в то же время отбрасывает в сторону палку, которая, кувыркаясь, отлетает, то, если ограничиваться описанием движения камня по отношению к палке, можно, конечно, выбрать любые системы ориентировки, но

---

[1]) От латинского relativus — относительный.

несомненно, что физически, с точки зрения приближения нас к истинной картине движения, они окажутся неравноценными. Например, можно связать систему координат с палкой и получить хотя и сложное, но совершенно точное описание падения камня. Однако в этой системе ориентировки весь звездный мир будет представляться кувыркающимся вокруг палки, тогда как нет сомнения, что в действительности кувыркается палка. Мы несравненно ближе подходим к истинной картине движения, когда в данном случае принимаем в качестве системы ориентировки Землю.

§ 3. Элементарное перемещение. Векторы скорости и ускорения

Чтобы установить уточненное понимание скорости движения, проследим мысленно, как изменяются радиус-вектор и вектор перемещения при движении материальной точки по криволинейной траектории. На рис. 5 положение материальной точки в исходный момент времени t_0 обозначено C_0, а положения в моменты t и t'—C и C'. Геометрически складывая радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ для момента времени t с вектором перемещения $\boldsymbol{s}$ за промежуток времени $(t'-t)$, получаем радиус-вектор $\boldsymbol{r}'$ для момента времени t'. Следовательно, вектор перемещения за любой промежуток времени равен геометрическому приращению радиуса-вектора: $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$. Следует обратить внимание на то, что, сопоставляя положения материальной точки с ее исходным положением C_0, мы можем в свою очередь рассматривать вектор $\boldsymbol{s}$ как геометрическое приращение перемещения материальной точки из ее исходного положения: $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}'-\boldsymbol{s}_0$. Поэтому, воспользовавшись общепринятой заменой слова «приращение» символом Δ («дельта»), можно написать

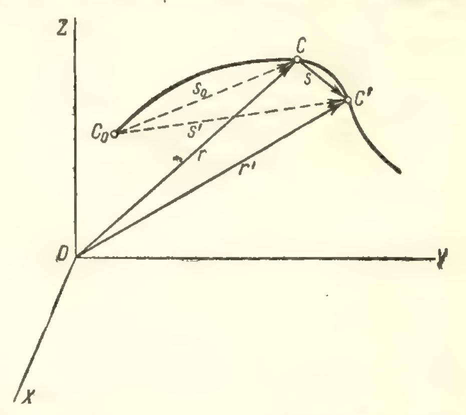


Рис. 5. Геометрические приращения радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ и вектора перемещения $\boldsymbol{s}$ совпадают.

$$\Delta\boldsymbol{s}=\Delta\boldsymbol{r}. \quad (3)$$

Если мы представим себе, что точки C и C', показанные на рис. 5, расположены бесконечно близко одна от другой, то получим элементарно малое, или просто *элементарное, перемещение.* Символ Δ может указывать большое или малое изменение величины. В слу-

чае «крайне малых», точнее — *бесконечно малых* [1]) изменений применяют символ d, причем величина ds, именуемая дифференциалом s, практически вполне точно выражает «крайне малое» приращение s.

Очевидно, что численное значение элементарного перемещения равно бесконечно малой длине пути: $ds = dl$, тогда как вектор $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}$.

Когда точка при своем движении испытывает перемещение $d\mathbf{s}$, координаты, определяющие положение точки, изменяются на величины dx, dy, dz. Численное значение вектора $d\mathbf{s}$ выражается через его компоненты dx, dy, dz по формуле, аналогичной (1), т. е.

$$dl = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \qquad (4)$$

Это уравнение определяет элемент длины пути dl. Что касается направления элементарного перемещения, то в пределе (когда dt стремится к нулю) оно совпадает, как уже говорилось в § 2, с направлением касательной к траектории в точке C.

Представление об элементарном перемещении используется для уточнения понятия скорости. В обыденной жизни под скоростью чаще всего понимают величину, характеризующую только «быстроту» движения, а не его направление. В механике скорость определяют как вектор, указывающий и «быстроту», и направление движения.

В технических приложениях физики часто рассматривают *среднюю скорость* неравномерного движения

$$v_{\text{средн}} = \frac{l' - l}{t' - t},$$

где $l' - l$ — длина пути, пройденного за время $t' - t$.

При значительной неравномерности движения средняя скорость может оказаться весьма различной для разных по величине промежутков времени. Предел, к которому стремится средняя скорость

---

[1]) *Бесконечно малой величиной* называют всякую переменную величину, имеющую предел, равный нулю. Точно это означает следующее: рассматриваемая переменная величина изменяется так, что если взять заранее сколь угодно малое положительное число ε, в процессе изменения x наступит такая стадия, начиная с которой абсолютная величина переменной x будет оставаться меньше, чем ε. Следует отчетливо понять, что термин «бесконечно малая» относится только к переменным.

Понятие *дифференциала* основывается на понятии *производной*. Пусть имеем функцию $y = f(x)$. Возьмем какое-нибудь значение независимой переменной $x = x_0$. Разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ называют приращением функции в точке x_0, соответствующим приращению Δx независимой переменной x. Если при стремлении к нулю приращения Δx отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к пределу, то предел этот называют производной от функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обычно обозначают через $f'(x_0)$. Выражение $f'(x)\Delta x$ называется дифференциалом функции $y = f(x)$ и обозначается через dy. Из определения дифференциала вытекает, что $dx = \Delta x$ и что $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

при бесконечном убывании промежутка времени, представляет собой величину *истинной скорости* в момент времени t [1]):

$$v = \lim_{t' \to t} \left(\frac{l' - l}{t' - t} \right).$$

В математическом анализе такой предел называют *производной первого порядка* от функции $l = f(t)$; производную обозначают либо штрихом $f'(t)$, либо отношением дифференциалов $\frac{dl}{dt}$. Таким образом, в общем случае при неравномерном движении по криволинейной траектории под истинной скоростью в каждый данный момент времени понимают вектор, численное значение которого равно отношению элемента длины пути dl к элементарно малому промежутку времени dt, или, что то же, производной от пути по времени:

$$v = \frac{dl}{dt},$$

и направление которого совпадает с направлением касательной к траектории в той точке, где в данный момент находится движущаяся материальная точка. Иначе говоря, под вектором скорости понимают отношение вектора элементарного перемещения $d\mathbf{s}$ к элементарно малому промежутку времени (рис. 6):

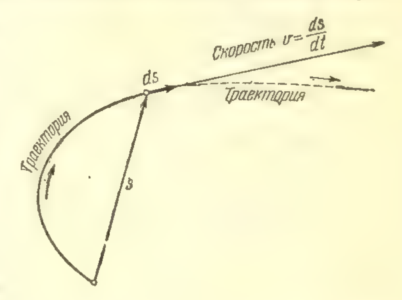


Рис. 6. Вектор скорости при криволинейном движении.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}. \tag{5}$$

Под элементарно малым промежутком времени dt можно подразумевать $\frac{1}{n}$ долю секунды, где n — «крайне большое число»; умножив на это число числитель и знаменатель приведенной выше формулы (отчего, понятно, отношение не изменится), мы будем иметь в знаменателе 1 сек., а в числителе — n-кратное перемещение ds, т. е. длину того пути, который тело прошло бы в 1 сек., если, начиная с интересующего нас момента времени, оно двигалось бы равномерно.

Что́ означает физически переход от средней скорости движения к ее пределу при $\Delta t \to 0$, т. е. к истинной скорости движения? Этот переход означает, что для крайне малых промежутков времени любое движение можно рассматривать как приблизительно равномерное.

---

[1]) Обозначение lim от латинского limit — п р е д е л.

В самом деле, чем ближе $t'-t$ к нулю, тем меньше отличается от своего предела выражение средней скорости $\frac{l'-l}{t'-t}$ и тем с бо́льшим правом эту среднюю скорость для весьма малого промежутка времени мы можем принять за выражение истинной скорости.

Когда материальная точка испытывает элементарное перемещение $d\mathbf{s}$, координаты точки изменяются на dx, dy, dz; эти величины являются проекциями элементарного перемещения $d\mathbf{s}$ на оси координат; очевидно, что отношение $\frac{dx}{dt}$ представляет собой скорость перемещения в направлении оси OX. *Проекция скорости на какую-либо ось (компонент скорости) представляет собой скорость перемещения в направлении данной оси.* Таким образом,

$$v_x=\frac{dx}{dt}; \quad v_v=\frac{dy}{dt}; \quad v_z=\frac{dz}{dt}. \tag{6}$$

Итак, *компоненты скорости являются производными первого порядка от координат по времени.*

Численное значение вектора скорости, как и всякого вектора, может быть выражено через его компоненты формулой, аналогичной формуле (1):

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}. \tag{7}$$

За единицу скорости принимают 1 *см/сек*, или 1 *м/сек*, или же 1 *км/сек*, иногда 1 *км/час*.

Движение с неизменной скоростью осуществляется на практике довольно редко. В большинстве же случаев при движении скорость изменяется как по величине, так и по направлению. Это изменение скорости движения характеризуется *ускорением*. Ускорение движения определяет как быстроту нарастания скорости, так и изменение направления скорости. Поэтому в физике под ускорением движения понимают особый вектор, численное значение которого равно величине предела, к которому стремится среднее ускорение при бесконечном убывании промежутка времени:

$$j=\lim_{t'\to t}\left(\frac{v'-v}{t'-t}\right),$$

т. е. оно равно производной от функции $v=f(t)$; $j=\frac{dv}{dt}$. Направление вектора ускорения, по самому определению этого вектора, считают совпадающим с направлением бесконечно малого геометрического приращения скорости $\mathbf{v}$. Иначе говоря, под вектором ускорения понимают отношение элементарного геометрического приращения скорости $d\mathbf{v}$ к бесконечно малому промежутку времени dt, в течение которого скорость испытывает указанное приращение:

$$\mathbf{j}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Проекция ускорения на какую-либо ось имеет смысл *ускорения в направлении данной оси*. Таким образом,

$$j_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad j_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad j_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{8}$$

Принимая во внимание формулу (3), имеем:

$$j_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad j_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad j_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{9}$$

Итак, *компоненты ускорения являются производными второго порядка от координат по времени.*

Даже в прямолинейном движении сказывается векторный характер ускорения. В этом случае вектор ускорения может быть направлен по движению при возрастании скорости или же против движения при убывании скорости. Если при этом $j=\mathrm{const}$, то в первом случае мы имеем *равноускоренное* движение, а во втором — *равнозамедленное.*

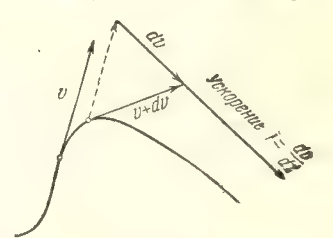


Рис. 7. При равномерном движении вектор ускорения на криволинейных участках тем более велик, чем больше кривизна.

По определению ускорения как вектора, указывающего геометрическое изменение скорости, ускорение оказывается не равным нулю и в случае, когда матереальная точка движется с неизменяющейся по величине скоростью, но по криволинейной траектории, так как вектор скорости изменяет свое направление. Это изменение происходит тем более резко, чем больше кривизна траектории. Таким образом, для равномерного движения ускорение только на прямолинейных участках пути равно нулю; для участков же криволинейных оно отлично от нуля и при большой кривизне может оказаться даже весьма значительным. Рассматривая рис. 7, мы видим, что при равномерном движении по закруглению вектор ускорения $\boldsymbol{j}$ направлен в ту сторону, куда траектория обращена своей вогнутостью; легко сообразить, что если бы движение по закруглению происходило с численно возрастающей скоростью (длина стрелки, изображающей вектор $\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}$, больше длины стрелки вектора $\boldsymbol{v}$), то вектор ускорения $\boldsymbol{j}$ оказался бы направленным под некоторым острым углом к направлению движения; легко сообразить также, что при замедлении движения (длина стрелки $\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}$ меньше, чем стрелки $\boldsymbol{v}$) вектор ускорения $\boldsymbol{j}$ отклоняется назад к стороне, противоположной направлению движения.

В зависимости от принятой единицы длины единицей ускорения является 1 *см/сек*² или 1 *м/сек*², или же 1 *км/сек*².

Величину и направление вектора ускорения $\boldsymbol{j}$ можно определить, зная его компоненты j_x, j_y, j_z. Аналогично формулам (1), (4) и (7) численное значение ускорения равно:

$$j=\sqrt{j_x^2+j_y^2+j_z^2}. \tag{10}$$

§ 4. Тангенциальное и центростремительное ускорения

При исследовании механического движения часто оказывается весьма удобным разлагать вектор ускорения точки на два геометрических слагаемых: на ускорение по касательной к траектории этой точки и на ускорение по главной нормали. Докажем прежде всего, что не существует третьей слагаемой вектора ускорения в направлении третьей взаимно перпендикулярной оси (в направлении так называемой бинормали).

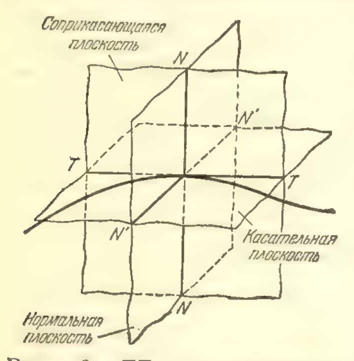


Рис. 8. TT — касательная, NN — главная нормаль, $N'N'$ — бинормаль.

Два следующих друг за другом элементарных перемещения $(d\boldsymbol{s})_1$ и $(d\boldsymbol{s})_2$ имеют общую точку, являющуюся концом первого перемещения и началом второго. Представим себе, что через эту общую их точку и через точки, являющиеся началом вектора $(d\boldsymbol{s})_1$ и концом вектора $(d\boldsymbol{s})_2$, проведена плоскость. Такая плоскость носит название *соприкасающейся плоскости* (рис. 8); ее можно определить также как плоскость, проведенную через касательные к траектории в двух бесконечно близких друг к другу точках. Так как вектор скорости постоянно имеет направление касательной к траектории, то очевидно, что оба вектора скорости $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ в моменты времени t и $t+dt$ лежат в одной плоскости и именно в упомянутой соприкасающейся плоскости; следовательно, и геометрическое приращение скорости $d\boldsymbol{v}$, определяющее направление вектора ускорения $\boldsymbol{j}$, лежит в той же плоскости.

Плоскость, проведенную перпендикулярно к касательной и проходящую через точку касания, называют *нормальной плоскостью*.

Из бесчисленного множества нормалей, т. е. прямых, перпендикулярных к касательной в точке касания (все они лежат в нормальной плоскости), выделим две: одна из них лежит в соприкасающейся плоскости, эту прямую называют *главной нормалью*; другая перпендикулярна к ней, это — так называемая *бинормаль* (рис. 8). Поскольку вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, а бинормаль пересекает эту плоскость под прямым углом, то ясно, что проекция вектора ускорения на бинормаль всегда равна нулю. Поэтому

всегда имеется возможность представить вектор ускорения как геометрическую сумму двух его компонентов: ускорения в направлении касательной и ускорения в направлении главной нормали.

Пусть M и M' (рис. 9) представляют собой положения материальной точки, а v и v' — ее скорости в два соседних бесконечно близких момента времени. Найдем изменение скорости за этот бесконечно малый промежуток времени dt. Для этого перенесем вектор $\mathbf{v}'$ параллельно самому себе в точку M (изобразив его отрезком MA) и соединим концы векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$. Вектор $d\mathbf{v}$ и представит геометрическое приращение скорости за время dt.

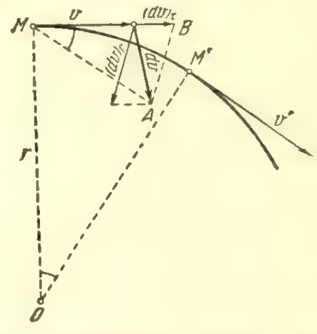


Рис. 9. Разложение вектора $d\mathbf{v}$ на компоненты $(d\mathbf{v})_\tau$ и $(d\mathbf{v})_r$.

Разложим теперь вектор $d\mathbf{v}$ на два составляющих, как показано на рис. 9. Мы получим параллелограмм, в котором диагональю является изменение скорости dv; стороны этого параллелограмма мы обозначим $(d\mathbf{v})_\tau$ и $(d\mathbf{v})_r$.

Вектор $(dv)_\tau$ характеризует изменение скорости только по в е л и ч и н е; он численно равен приращению численного значения скорости dv; направлен этот вектор по касательной к траектории. Деля $(d\mathbf{v})_\tau$ на dt, получим *тангенциальное ускорение* j_τ:

$$j_\tau = \frac{dv}{dt}. \tag{11}$$

Так как численное значение скорости равно производной первого порядка от длины пути l по времени, то из формулы (11) следует, что *тангенциальное ускорение равно производной второго порядка от длины пути по времени*:

$$j_\tau = \frac{d^2 l}{dt^2}. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь вектор $(d\mathbf{v})_r$ (или, что то же, вектор, изображаемый отрезком BA). Он характеризует изменение скорости по н а п р а в л е н и ю.

Через точки M и M' (рис. 9) проведем перпендикуляры к скоростям $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$. Они пересекутся в некоторой точке O. Бесконечно малую дугу кривой MM' можно рассматривать как дугу окружности радиуса $OM=r$. Окружность, дуга которой совпадает с элементом кривой в данной точке (окружность, проведенную через три бесконечно близкие точки кривой), называют *кругом кривизны*; радиус этого круга называют *радиусом кривизны*, а центр этого круга — *центром кривизны*. Понятно, что для различных участков кривой радиус кривизны будет, вообще говоря, неодинаков.

Сопоставим треугольники MOM' и AMB. Они подобны, так как оба равнобедренны и имеют равные углы при вершинах, поэтому

$$\frac{AB}{MM'}=\frac{MA}{OM}, \quad \text{или} \quad \left|\frac{(dv)_r}{v\,dt}\right|=\frac{v'}{r}; \quad \left|\frac{(dv)_r}{dt}\right|=\frac{v'v}{r}.$$

В пределе $v'=v$, поэтому

$$j_r=\frac{v^2}{r}, \tag{13}$$

где j_r обозначает предельное значение $\frac{(dv)_r}{dt}$, т. е. *центростремительное ускорение*, определяемое изменением скорости только по направлению.

Предельное направление BA, а значит, и направление центростремительного ускорения j_r совпадает с направлением главной нормали к траектории.

Таким образом, *при движении материальной точки по криволинейной траектории вектор ускорения геометрически слагается из ускорения* тангенциального, *численно равного* $j_\tau=\frac{dv}{dt}$ *и направленного по касательной, и* центростремительного, *численно равного* $j_r=\frac{v^2}{r}$ *и направленного по главной нормали к центру кривизны.*

Следовательно, численное значение полного ускорения может быть выражено формулой

$$j=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{r}\right)^2}. \tag{14}$$

В частном случае при равномерном движении материальной точки по окружности тангенциальное ускорение равно нулю, а центростремительное ускорение направлено к центру окружности и равно отношению квадрата скорости к радиусу окружности.

§ 5. Угловая скорость и угловое ускорение

Если классифицировать движения по форме траектории, то простейшими видами движения являются: прямолинейное движение и движение материальной точки по окружности.

При движении материальной точки по окружности удобно избрать в качестве координаты угол φ, на который поворачивается радиус, указывающий мгновенное положение точки; угол поворота φ иначе называют *фазой вращения*. Кинематическое уравнение движения материальной точки по окружности выражает угол поворота как некоторую функцию времени t:

$$\varphi=f(t).$$

Когда угол поворота изменяется пропорционально времени (что имеет место, если точка движется по окружности с неизменной по величине скоростью), то вращение называют равномерным.

Быстроту вращения характеризуют *угловой скоростью* ω, под которой понимают отношение бесконечно малого угла поворота $d\varphi$ к промежутку времени dt, в течение которого происходит этот поворот:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{15}$$

Единицей угловой скорости является угловая скорость такого равномерного вращения, при котором тело за 1 сек. поворачивается на угол в 1 радиан[1]). Эту единицу угловой скорости обозначают так: $\frac{1}{сек} = сек^{-1}$.

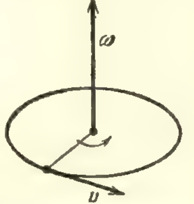


Рис. 10. Взаимное расположение векторов линейной и угловой скорости.

Понятно, что для полной характеристики движения материальной точки по окружности должны быть указаны не только численное значение угловой скорости, но и ось вращения, а также направление вращения вокруг этой оси. Поэтому угловую скорость представляют как вектор, направленный по оси вращения, т. е. перпендикулярно к плоскости, в которой происходит вращение, причем этот вектор $\boldsymbol{\omega}$ считают направленным туда, куда нужно смотреть, чтобы видеть вращение происходящим в сторону движения часовой стрелки (рис. 10).

Если движущаяся по окружности материальная точка удалена от оси вращения на расстояние r, то длина дуги, которую точка описывает за время dt, равна произведению угла поворота $d\varphi$ (выраженного в радианах) на радиус r: $dl = r\,d\varphi$. Разделив обе части этого равенства на dt и замечая, что $\frac{dl}{dt}$ есть линейная скорость v, а $\frac{d\varphi}{dt}$ — угловая скорость ω, находим (рис. 11):

$$v = \omega r. \tag{16}$$

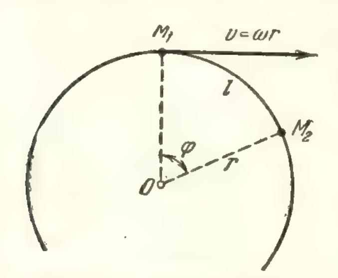


Рис. 11. Линейная скорость равна произведению угловой скорости на радиус.

Когда вращение происходит неравномерно (т. е. когда угловая скорость изменяется со временем), быстроту изменения угловой скорости характеризуют величиной, которую называют *угловым ускорением*. Если за бесконечно малый промежуток времени dt угловая скорость изменилась на $d\omega$, то под угловым ускорением

[1]) Напомним, что 1 радиан (т. е. угол, для которого длина дуги равна радиусу) $= \frac{360}{2\pi} = 57°17'44'',806$.

понимают отношение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \tag{17}$$

Единицей углового ускорения является $\frac{1}{сек^2} = сек^{-2}$, т. е. такое ускорение, когда в каждую секунду угловая скорость возрастает на единицу угловой скорости.

Угловое ускорение представляют также как вектор. Если положение и радиус окружности, по которой происходит вращение, со временем не изменяются, то вектор углового ускорения ε в случае ускоренного вращения направлен по оси вращения в ту же сторону, что и вектор угловой скорости, и в сторону прямо противоположную — в случае замедленного вращения.

Как было показано выше, линейное ускорение точки, равномерно вращающейся по окружности радиуса r со скоростью v (ее центростремительное ускорение), равно $j_r = \frac{v^2}{r}$; подставляя сюда $v = \omega r$, получим:

$$j_r = \omega^2 r. \tag{18}$$

В общем случае неравномерного вращения материальной точки по окружности ее линейное ускорение, как и во всяком криволинейном движении, может быть разложено на две составляющие: на указанное выше центростремительное ускорение $j_r = \omega^2 r$ и тангенциальное ускорение (при $r = \text{const}$)

$$j_\tau = \frac{dv}{dt} = \varepsilon r. \tag{19}$$

§ 6. Абсолютное, переносное и относительное движения

Все в природе движется. Любое тело, которое мы условно считаем неподвижным, в действительности движется. Одно какое-либо движение накладывается на другое движение. Поэтому весьма важно знать, как складываются движения, как складываются скорости и ускорения какого-либо тела, которое одновременно участвует в нескольких движениях. Чтобы разобраться в этом вопросе, прежде всего введем представление о так называемом абсолютном (в условном смысле) движении, о переносном и относительном движениях.

Одно и то же движение представляется нам происходящим по-разному в зависимости от способа его наблюдения. Когда на железнодорожной станции один из двух стоящих рядом поездов приходит в движение, то пассажирам другого, неподвижного, поезда кажется, что пошел их поезд. Конечно, достаточно бывает бросить взгляд на платформу станции, чтобы эта иллюзия исчезла. Станционные постройки в этом случае играют роль основной системы ориентировки.

Если бы ход поездов был совершенно плавен и станционные постройки, например вследствие тумана, не были видны, то, наблюдая движение освещенных окон поезда, пассажиры обоих поездов могли бы судить о движении поездов по отношению друг к другу, но не в состоянии были бы решить вопрос, какой из поездов пошел, а какой неподвижен.

Если бы мы представили себе двух наблюдателей, замечающих, что они удаляются друг от друга, и находящихся где-то в космическом пространстве, где почему-либо не видны звезды или какие-либо предметы, позволяющие наблюдателям каким-либо образом ориентироваться в характере их движения, то вопрос о том, какой из наблюдателей покоится, а какой движется, для них утратил бы смысл. Каждый из них вправе был бы считать себя покоящимся, а другого движущимся.

Таким образом, очевидно, что с кинематической точки зрения, т. е. если отвлечься от причин, вызывающих движение, всякое движение следует рассматривать как относительное. С этой кинематической точки зрения все системы ориентировки являются равноправными; любую из них мы можем при данном исследовании интересующих нас движений у с л о в н о с ч и т а т ь н е п о д в и ж н о й; такую условно неподвижную систему ориентировки мы будем называть *основной системой ориентировки*. Движение относительно основной системы ориентировки называют *абсолютным движением*.

В приведенном примере с двумя поездами с кинематической точки зрения не является обязательным, чтобы в качестве основной системы непременно были избраны станционные постройки. Пассажир движущегося поезда имеет право предпочесть систему ориентировки, связанную с его поездом; считая ее основной, он будет «кажущееся» движение станционных построек именовать абсолютным движением.

Всякую систему ориентировки, которая совершает какое-либо движение относительно основной системы, мы будем называть *подвижной системой ориентировки*. Движение относительно подвижной системы ориентировки называют *относительным движением*, а движение самой подвижной системы ориентировки называют *переносным движением*. Так, например, если в вышеупомянутом случае двух поездов в качестве основной системы ориентировки избраны станционные постройки, то система ориентировки, связанная с движущимся поездом, будет представлять собой подвижную систему ориентировки; движение поезда и пассажиров, сидящих в нем на своих местах, является переносным движением; прогулка какого-либо пассажира по коридору вагона, наблюдаемая другими пассажирами вагона, сидящими на своих местах, есть относительное движение; та же прогулка пассажира по коридору движущегося вагона, наблюдаемая с платформы вокзала, представляет собой абсолютное движение.

Представим себе, что материальная точка движется в подвижной системе. Обозначим через $d\boldsymbol{s}_{\text{абс}}$ элементарное перемещение этой материальной точки по отношению к основной системе ориентировки; через $d\boldsymbol{s}_{\text{перен}}$ обозначим то перемещение материальной точки в основной системе, которое происходит вследствие движения подвижной системы (т. е., иначе говоря, перемещение того места подвижной системы, где в данный момент находится материальная точка); наконец, через $d\boldsymbol{s}_{\text{отн}}$ мы обозначим элементарное перемещение той же точки, как оно представляется наблюдателю, связанному с подвижной системой.

Под *абсолютной скоростью* $\boldsymbol{v}$, *переносной скоростью* $\boldsymbol{u}$ и *относительной скоростью* $\boldsymbol{w}$ понимают векторы

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{s}_{\text{абс}}}{dt}, \quad \boldsymbol{u}=\frac{d\boldsymbol{s}_{\text{перен}}}{dt}, \quad \boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{s}_{\text{отн}}}{dt}. \tag{20}$$

Скорость абсолютного движения равна геометрической сумме скоростей переносного и относительного движений:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}. \tag{21}$$

Это утверждение, высказанное с полной ясностью еще Галилеем, называют *галилеевым законом сложения скоростей*. В простейших случаях, в особенности когда все три скорости направлены по одной прямой и неизменны во времени, галилеев закон сложения скоростей представляется как бы самоочевидным и сознательно или бессознательно применяется всеми в оценке движений, встречающихся в обыденной жизни. Например, каждый знает, что, плывя в лодке вниз по течению, мы движемся быстрее, чем в неподвижной воде, на величину «быстроты» течения воды.

§ 7. Закон сложения ускорений

Под *абсолютным ускорением* $\boldsymbol{j}_{\text{абс}}$ понимают ускорение материальной точки по отношению к основной системе; под *переносным ускорением* $\boldsymbol{j}_{\text{перен}}$ понимают ускорение того места подвижной системы, где в данный момент находится материальная точка, и под *относительным ускорением* $\boldsymbol{j}_{\text{отн}}$ — ускорение, которое материальная точка имеет по отношению к наблюдателю, связанному с подвижной системой. Абсолютное ускорение всецело определяется отношением геометрического приращения абсолютной скорости к элементу времени, но переносное и относительное ускорения не всегда столь же просто связаны с переносной и относительной скоростями.

Напишем векторное уравнение (21), выражающее галилеев закон сложения скоростей, для двух бесконечно близких моментов времени t и $t+dt$; геометрически вычтем из второго уравнения первое, тогда

получим:

$$dv = du + dw. \tag{22}$$

Разделим все члены этого уравнения на dt. Величина $\frac{dv}{dt}$ представляет собой ускорение абсолютного движения $j_{абс}$. Однако, что касается величины $\frac{dw}{dt}$, то она не всегда выражает ускорение относительного движения $j_{отн}$. Действительно, если с точки зрения наблюдателя, связанного с подвижной системой, скорость w относительного движения неизменна по направлению и по численному значению, то очевидно, что ускорение относительного движения равно нулю, тогда как величина dw, определяемая наблюдателем, связанным с основной системой, может оказаться и не равной нулю; так будет, когда подвижная система ориентировки в р а щ а е т с я относительно основной системы; при равномерном прямолинейном относительном движении величина dw будет выражать геометрическое изменение относительной скорости, происходящее благодаря указанному вращению подвижной системы. Например, когда человек идет по палубе корабля прямо от кормы к носу, а в то же время корабль поворачивается, то для наблюдателя, находящегося на берегу, это движение уже не является прямолинейным; вектор скорости, сохраняя неизменную ориентацию по отношению к кораблю, поворачивается вместе с кораблем; иначе говоря, относительная скорость испытывает некоторое геометрическое приращение, вызываемое поворотом корабля.

Полное изменение относительной скорости мы будем рассматривать как геометрическую сумму двух компонентов:

$$dw = (dw)_{отн} + (dw)_{повор}. \tag{23}$$

Здесь первый вектор в правой части уравнения после деления на dt дает относительное ускорение:

$$j_{отн} = \frac{(dw)_{отн}}{dt};$$

второй компонент $(dw)_{повор}$ представляет собой изменение относительной скорости, вызываемое вращением подвижной системы.

Величина $\frac{du}{dt}$ тоже не всегда выражает ускорение переносного движения. Конечно, для любой точки, п о к о я щ е й с я в подвижной системе, указанная величина является не чем иным, как ускорением переносного движения. Но уравнение (22) мы получили, анализируя п е р е м е щ е н и е материальной точки в подвижной системе; если подвижная система вращается относительно основной, то переносная скорость в разных участках подвижной системы не одинакова (например, численно переносная скорость вращения тем более велика,

чем дальше отстоит данный участок от оси вращения). Представим себе, что мы мгновенно переместили материальную точку в подвижной системе в смежное положение по траектории относительного движения; изменение переносной скорости, вызываемое ускорением переносного движения, еще не успеет сказаться, но величина $d\boldsymbol{u}$ будет отлична от нуля и укажет, как в данный момент времени скорости переносного движения в смежных точках на траектории относительного движения геометрически отличаются друг от друга.

Этот компонент в величине $d\boldsymbol{u}$, зависящий от перемены места в подвижной системе, мы обозначим через $(d\boldsymbol{u})_{\text{повор}}$; тогда другая геометрическая часть величины $d\boldsymbol{u}$ представит собой изменение переносной скорости, вызываемое ускорением переносного движения; эту часть мы обозначим через $(d\boldsymbol{u})_{\text{перен}}$. Таким образом,

$$d\boldsymbol{u} = (d\boldsymbol{u})_{\text{перен}} + (d\boldsymbol{u})_{\text{повор}}, \tag{24}$$

причем

$$\boldsymbol{j}_{\text{перен}} = \frac{(d\boldsymbol{u})_{\text{повор}}}{dt}.$$

Из сказанного ясно, что в случае поступательного движения подвижной системы, когда в переносном движении каждая из координатных осей подвижной системы перемещается параллельно себе самой (вращения нет), $(d\boldsymbol{w})_{\text{повор}} = 0$ и $(d\boldsymbol{u})_{\text{повор}} = 0$. В этом случае *при поступательном движении подвижной системы ускорение абсолютного движения равно геометрической сумме ускорений переносного и относительного движений*:

$$\boldsymbol{j}_{\text{абс}} = \boldsymbol{j}_{\text{перен}} + \boldsymbol{j}_{\text{отн}}. \tag{25}$$

В еще более частном случае, когда подвижная система движется поступательно с постоянной скоростью (т. е. $\boldsymbol{j}_{\text{перен}} = 0$), ускорения абсолютного и относительного движений совпадают по величине и по направлению. Иначе говоря, *ускорение движения является одинаковым для наблюдателей, движущихся относительно друг друга поступательно с постоянной скоростью*. В этом смысле говорят, что системы ориентировки, которые движутся по отношению друг к другу поступательно с постоянной скоростью, «равноценны в отношении ускорения».

В общем случае, когда переносное движение связано с вращением подвижной системы относительно основной системы, *ускорение абсолютного движения равно геометрической сумме трех слагаемых*: *ускорения переносного движения*, *ускорения относительного движения и* так называемого *поворотного* (*кориолисова*) *ускорения*:

$$\boldsymbol{j}_{\text{абс}} = \boldsymbol{j}_{\text{перен}} + \boldsymbol{j}_{\text{отн}} + \boldsymbol{j}_{\text{повор}}. \tag{26}$$

По установленным выше обозначениям

$$\boldsymbol{j}_{\text{повор}} = \frac{(d\boldsymbol{w})_{\text{повор}} + (d\boldsymbol{u})_{\text{повор}}}{dt}. \tag{27}$$

Замечательно, что обе части поворотного ускорения (часть, зависящая от влияния вращения на направление относительной скорости, и часть, зависящая от неравенства переносных скоростей на пути относительного движения) всегда являются численно равновеликими и одинаково направленными:

$$\frac{(d\boldsymbol{w})_{\text{повор}}}{dt} = \frac{(d\boldsymbol{u})_{\text{повор}}}{dt}.$$

Вычисления показывают, что каждая из этих частей поворотного (кориолисова) ускорения равна произведению угловой скорости поворота на относительную скорость и синус угла α между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{w}$:

$$\frac{1}{2} j_{\text{повор}} = \frac{(dw)_{\text{повор}}}{dt} = \frac{(du)_{\text{повор}}}{dt} = \omega w \sin\alpha. \tag{28}$$

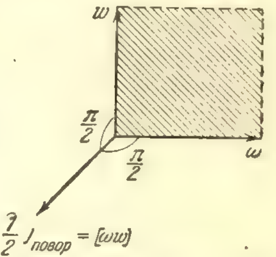


Рис. 12. Взаимное расположение векторов $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{j}_{\text{повор}}$.

Вектор, численно равный произведению числовых величин двух каких-либо векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ на синус угла между ними и направленный перпендикулярно к обоим этим векторам, называют *векторным произведением* и обозначают $[\boldsymbol{AB}]$. Следовательно, векторное произведение численно равно площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, как на сторонах. Положительным направлением вектора $[\boldsymbol{AB}]$ мы будем считать то направление, по которому поворот от $\boldsymbol{A}$ к $\boldsymbol{B}$ виден происходящим по часовой стрелке. Очевидно, что $[\boldsymbol{AB}] = -[\boldsymbol{BA}]$.

Из сказанного выше следует, что поворотное (кориолисово) ускорение $\boldsymbol{j}_{\text{повар}}$ представляет собой удвоенное векторное произведение угловой скорости поворота на относительную скорость (рис. 12):

$$\boldsymbol{j}_{\text{повор}} = 2[\boldsymbol{\omega w}]. \tag{29}$$

ГЛАВА II

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

§ 8. Некоторые исторические замечания

Оформление механики в математически стройную науку произошло в XVII в. Это было время, когда потребности промышленности и торговли дали толчок к развитию точных методов естествознания.

Кроме механического движения, другие физические формы движения материи тогда еще не были освоены техникой. Наблюдения и эксперименты показывали, что механическое движение возникает и исчезает при вполне определенных условиях — при действии сил. В связи с этим сложилось и после Ньютона сделалось господствующим представление о силах как о причинах, порождающих движение и управляющих движением. Только в последующие столетия, когда физикой были изучены другие немеханические формы движения, стало постепенно обнаруживаться, что и сами силы и работа, производимая силами, проявляются только тогда, когда движение преобразуется из одной формы в другую, так что силы только по внешности как бы являются причиной механического движения; в действительности движение порождается только движением.

В XVII в. вопрос о природе и происхождении сил почти не ставился. Само понятие движущей силы сложилось не сразу; только Ньютон придал этому понятию формально полную отчетливость; но в то же время именно Ньютон, желая избежать преждевременных гипотез о природе сил, против своего желания содействовал внедрению в физику неправильного представления о действии сил через пустоту, на расстоянии.

В начале XVII в. были опубликованы исторические труды Иоганна Кеплера: «Новая астрономия» (1609 г.), где были установлены два закона движения планет, и «Гармония мира» (1619 г.), где был дан третий закон движения планет. В те же первые десятилетия XVII в. вышел ряд трудов Галилео Галилея.

Галилей применил точный способ измерения времени с помощью изобретенного им маятника; ввел в астрономию телескопический метод наблюдений, сконструировав зрительную трубу; Галилей открыл фазы Венеры, существование спутников Юпитера и солнечных пятен; наблюдая солнечные пятна, Галилей обнаружил вра-

щение Солнца вокруг своей оси; Галилей внес много усовершенствований и уточнений в кинематику, сформулировал принцип относительности движения, установил закон сложения скоростей и открыл, что в пустоте все тела, независимо от их размера и плотности, должны падать с одинаковым ускорением; Галилей подробно исследовал движение тел по наклонной плоскости, движение брошенных тел и решил ряд задач прикладной механики. Одной из величайших заслуг Галилея была его умелая и настойчивая защита системы Коперника.

В 1632 г. вышла книга Галилея «Диалог о двух системах мира», навлекшая на Галилея гонения со стороны церкви.

Современники Галилея английский философ Бэкон и французский философ и математик Декарт подвергли уничтожающей критике схоластику и противопоставили ей новые принципы объективного, научного изучения мира. Произведения Бэкона и Декарта оказали глубокое влияние на идейное содержание и методы науки в XVII и XVIII столетиях.

Философский труд Бэкона был издан в 1620 г. В нем Бэкон говорит о том, что необходимо «проложить дорогу человеческому разуму при помощи хорошо построенных опытов», предостерегает против ослепления ложными теориями и предвзятыми мнениями. Бэкон отмечает, что люди склонны предполагать в вещах и явлениях больше порядка и единообразия, чем это есть в действительности, придумывать параллели и аналогии, где их нет, и главное — стремиться к преждевременным, плохо обоснованным обобщениям.

«Те, кто занимались науками,— пишет Бэкон,— были или эмпириками, или догматиками. Эмпирики, подобно муравью, только собирают и пользуются собранным. Рационалисты, подобно пауку, из самих себя создают ткань. Пчела же избирает средний способ, она извлекает материал из цветов сада и поля, но располагает и изменяет его собственным умением».

Исходным положением своей методологии Бэкон объявил «союз опыта и рассудка». Развитие науки должно происходить путем *индукции* — переходом от частностей к обобщениям.

В 1644 г. было опубликовано сочинение Ренэ Декарта (Картезия) «Начала философии». В этом сочинении Декарт стремится объяснить строение мира и свойства тел, исходя из некоторой общей картины движения материи. Метод Декарта — метод вывода следствий из обобщенных утверждений, из принципов, метод *дедукции*.

Всестороннее изучение природы, начавшееся в эпоху Возрождения, опиралось только на наблюдения. Но это новое направление науки, отвергавшее средневековую схоластику, страдало отсутствием руководящих идей. Вот почему сочинение Декарта, где был впервые в физике строго развит дедуктивный метод, имело исключительный успех.

Декартом был создан обширный план объяснения всех физических явлений скрытым механическим движением тончайших частиц

«первоматерии». Представления Декарта о строении материи с современной точки зрения кажутся весьма примитивными. Но главным в физике Декарта было не это упрощенное понимание строения материи, а развитое им представление о всеобщности и вечности движения и о саморазвитии мира. Важной чертой учения Декарта являлось также утверждение, что в мире не существует пространства, не заполненного материей. Декарт считал, что все взаимодействия тел происходят вследствие механического влияния, натиска среды на находящиеся в ней тела.

Эта так называемая картезианская программа механистического объяснения всех физических явлений длительное время владела умами физиков. В позднейшее время последователями Декарта сохранялась только основная идея картезианского подхода к физике, тогда как содержание теорий изменялось соответственно успехам физики в изучении строения материи.

В XVIII в. руководящими принципами физики сделались ньютоновы законы динамики. Развитие аналитических методов механики и увлечение многочисленными применениями этих методов вызвали среди физиков охлаждение к картезианской программе построения физики. Труднейший вопрос о происхождении сил был снят с обсуждения. Ньютонианцы в отличие от самого Ньютона стали придерживаться воззрения о возможности действия на расстоянии (через пустоту) — принципа actio in distans. В сравнении с точными методами механики какие бы то ни было гипотезы о природе сил тяготения, электрических и магнитных сил, упругих сил и т. д. казались выдумками, которые не заслуживают внимания.

Однако даже в XIX в. постоянно сказывалось влияние картезианского учения. В частности, это проявилось в настойчивых, многочисленных попытках построить чисто механическую теорию мирового эфира — тонкой материальной среды, заполняющей мировое пространство. На рубеже XX в. Джон Джозеф Томсон защищал гипотезу, что элементарные частицы вещества представляют собой вихревые кольца мирового эфира; Генрих Герц стремился создать механику, не пользуясь понятием силы; Н. А. Умов выступал с картезианскими возражениями против законов Ньютона, и т. д.

В 1687 г. Ньютон издал свое бессмертное произведение «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» («Математические начала натуральной философии», что по современной терминологии означает: математические основы физики).

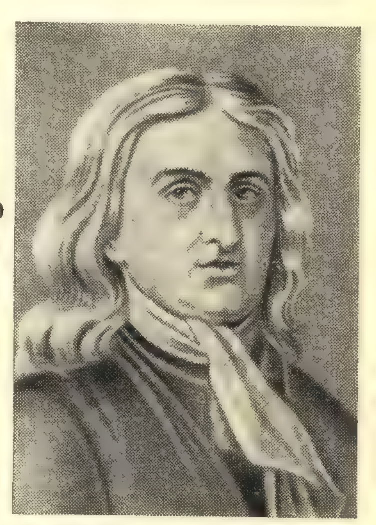
Основой для правильного построения механики Ньютону послужило впервые отчетливо введенное им представление о *массе* тел (до Ньютона понятие массы в большинстве случаев отождествляли с *весом*).

Ньютон ввел представление о массе как о *количестве материи* в теле и доказал, что масса является *мерой инертности* тела, а вместе с тем *источником и объектом тяготения*.

§ 9. Первый ньютонов закон механики (закон инерции)

Идея закона инерции была высказана Галилеем в начале XVII в. Галилей первый ввел в физику представление об «идеальном движении», т. е. о движении, свободном от всяких помех — таких, как трение и сопротивление воздуха. Галилей пришел к правильному выводу, что в идеальном случае тело, освобожденное от влияния тяжести, должно *вечно* двигаться с неизменной скоростью. Декарт развил этот вывод и указал, что свободное тело стремится продолжать свое движение по прямой линии. Ньютон принял закон инерции в качестве первого закона механики и выразил его следующими словами:

Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние.



Исаак Ньютон (1642—1727).

Представляется само собой понятным, что тело, пребывающее в покое, будет оставаться в покое, пока оно не выведено из этого состояния действием каких-либо сил. Точно так же представляется понятным, что если на движущееся прямолинейно тело не действуют никакие силы, то нет причин, которые могли бы побудить тело отклониться от прямолинейного пути (здесь можно было бы сослаться на соображения симметрии; в отсутствии сил отклонение тела от прямолинейного пути в любую наперед указанную сторону не более возможно, чем отклонение в сторону прямо противоположную; поэтому нет оснований, чтобы отклонение произошло). Менее очевидным на первый взгляд является утверждение, что при отсутствии сил скорость тела будет оставаться неизменной; в повседневном опыте мы наблюдаем обратное. Всякое движущееся тело, если его движение не поддерживать действием силы, рано или поздно останавливается, но, с другой стороны, тот же повседневный опыт указывает нам, что остановка происходит тем быстрее, чем более велики существующие сопротивления движению. Мы совершенно правильно привыкли рассматривать силы сопротивления как причину замедления движения; поэтому, если мы вообразим, что некоторое тело движется, не испытывая никаких сопротивлений своему движению, то

естественно ожидать, что в этих условиях скорость тела будет оставаться неизменной.

Вследствие сказанного иногда рассматривают закон инерции как истину *априорную* (т. е. как истину, установленную умозрительно и не нуждающуюся в обосновании посредством опыта). Это, однако, неверно. Все три ньютоновых закона механики (закон инерции и два других закона, которые мы рассмотрим в последующих параграфах) представляют собой истины, добытые *опытным* путем. В этом их значение. Что закон инерции действительно почерпнут из опыта, а не получен чисто умозрительным путем, в этом легче всего убедиться, глубже вникнув в смысл закона инерции и сопоставив его (что будет сделано ниже) с теми представлениями, которые существовали ранее по поводу законов движения электрических зарядов.

Следуя Ньютону, под «инерцией» надлежит понимать не просто факт покоя или факт равномерного движения при отсутствии сил, но некое присущее всякой массе упорное стремление к сохранению состояния покоя и такое же упорное стремление к сохранению равномерного прямолинейного движения. Пока тело предоставлено самому себе, пока на него не действуют никакие силы, «упорство инерции», понятно, не может проявиться ни в чем ином, как в том, что тело продолжает пребывать в покое или продолжает двигаться равномерно и прямолинейно. Но когда мы выводим тело из состояния покоя или заставляем его двигаться быстрее, или затормаживаем его, или отклоняем его от прямолинейного пути, то упорство инерции проявляется в виде оказываемого телом сопротивления, направленного против приложенных к телу сил.

Чтобы оттенить эту мысль, которую мы здесь за отсутствием более подходящих слов стремились выразить словами «упорство инерции», Ньютон говорит, что всякому телу присуща пропорциональная массе этого тела «врожденная сила сопротивления», или, что то же, *сила инерции*. Этот эпитет «врожденная сила» производит впечатление метафизической идеи, однако из всего сказанного Ньютоном о силах инерции ясно, что этим несколько неудачным выражением Ньютон хотел только подчеркнуть, что 1) инерция составляет неотъемлемое свойство всех тел, присущее им независимо от их физического состояния и химической природы и проявляющееся при всех изменениях характера движения тела, 2) инерция существует объективно, а не определяется произвольным выбором системы ориентировки, по отношению к которой исследуется движение тел. Ньютон пишет: «Сила инерции проявляется телом единственно лишь, когда другая сила, к нему приложенная, производит изменение в его состоянии движения. Проявление этой силы инерции может быть рассматриваемо двояко: и как собственно сопротивление и как напор. Как собственно сопротивление, поскольку тело противится действующей на него силе, стремясь сохранить свое состояние

движения; как напор, поскольку то же тело, с трудом уступая силе сопротивляющегося ему препятствия, стремится изменить состояние этого препятствия».

Когда какое-либо тело вследствие каких-либо причин начинает двигаться быстрее или медленнее, то это тело развивает (проявляет) силу инерции, но п р и л о ж е н а эта сила инерции к другим телам и именно к тем, которые изменяют состояние движения первого тела. Так, например, когда мы бросаем камень, то развиваемая камнем сила инерции приложена к нашей руке: камень давит на руку. Когда, стоя на гибкой доске, мы подпрыгиваем, то развиваемая нами сила инерции прогибает доску. Когда велосипедист с большой скоростью врезывается в толпу людей, он, не нажимая педалей, продолжает некоторое время двигаться по инерции, опрокидывая людей, но развиваемая велосипедистом вследствие потери скорости сила инерции приложена, понятно, не к велосипедисту, но именно к тем людям, которых он опрокидывает.

Можно ли сказать, что это представление об инерции, которое и составляет сущность первого закона механики, является продуктом чисто умозрительного творчества, а не обобщением наблюдаемых фактов? Конечно, нет! Мы могли бы вообразить, что какое-либо тело лишено инерции, что действие приложенной к нему силы вызывает и поддерживает его движение, а когда действие приложенной силы прекращается, то тело мгновенно останавливается. Именно эту точку зрения применительно к электрическим зарядам развил Ампер в своих классических трудах по электродинамике; Ампер исходил из принципа, что электричество лишено инерции. Впоследствии было обнаружено, что этот принцип ложен; элементарные электрически заряженные частицы — электроны — имеют массу, и им свойственна инертность. Даже свет имеет инертную массу. На современной ступени развития физики мы не знаем ни одного проявления материи, которое было бы лишено инерции.

§ 10. О понятиях «покоя» и «равномерности»

В первом законе механики говорится о «покое» и о «равномерности» движения. Какой смысл имеют эти слова? О покое по отношению к чему здесь идет речь? Ни Земля, ни Солнце, ни даже так называемые «неподвижные» звезды не находятся в покое; все небесные тела движутся.

Существует ли хотя одно тело, которое находилось бы в полном (абсолютном) покое? Такого тела мы не знаем. Допустим, что кто-либо выскажет предположение, что некое тело пребывает в абсолютном покое; как решить: верно это предположение или ложно? Например, один человек станет утверждать, что такая-то звезда пребывает в полном покое, тогда как все остальные звезды движутся, а другой будет утверждать, что пребывает в покое какая-либо

другая звезда, а движется указанная первым. Как установить, кто из наблюдателей прав?

Чтобы судить, движется ли какое-либо тело вполне равномерно (с абсолютно не изменяющейся скоростью), надо наблюдать движение этого тела, имея часы, про которые было бы заведомо известно, что их ход верен. Но что значит: «заведомо известно»? Нам ничто не может быть известно «заведомо». Если кто-либо скажет, что такие-то часы показывают время абсолютно верно, то как решить, справедливо это утверждение или ложно?

Перед формулировкой основных законов механики Ньютон дает следующие определения:

«*Абсолютное пространство* по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным. *Относительное пространство* есть какая-либо ограниченная подвижная часть абсолютного пространства, принимаемого в обыденной жизни за пространство неподвижное... Так, если рассматривать Землю подвижной, то пространство атмосферного воздуха, которое по отношению к Земле остается всегда одним и тем же, будет составлять то одну часть пространства абсолютного, то другую...

Место есть часть пространства, занимаемая телом... *Абсолютное движение* есть перемещение тела из одного абсолютного его места в другое; *относительное движение* есть перемещение тела из одного относительного его места в другое, относительное же.

Так, на корабле, идущем под парусами, относительное место тела есть та часть корабля, в которой тело находится, например та часть трюма, которая заполнена телом и которая, следовательно, движется вместе с кораблем. Относительный покой есть пребывание тела в той же самой области корабля или в той же самой части его трюма. Истинный покой есть пребывание тела в той же самой части того неподвижного пространства, в котором движется корабль со всем в нем находящимся. Таким образом, если бы Земля на самом деле покоилась, то тело, которое по отношению к кораблю находится в покое, двигалось бы в действительности с той абсолютной скоростью, с которой корабль идет относительно Земли. Если же и сама Земля движется, то истинное абсолютное движение тела найдется по истинному движению Земли в неподвижном пространстве и по относительным движениям корабля по отношению к Земле и тела по отношению к кораблю...

Абсолютное, истинное время само по себе и самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью... Абсолютное время различается в астрономии от обыкновенного солнечного времени уравнением времени; ибо естественные солнечные сутки, принимаемые в повседневной практике за равные для измерения времени, на самом деле между собой не равны; это неравенство и исправляется

астрономами, чтобы при измерениях движений небесных светил применять более правильное время».

Мы видим, что эти ньютоновы определения по сути дела не устраняют перечисленных выше трудностей.

Из приведенных определений Ньютона вытекает, что:

1) пространство и время обладают объективной реальностью; это правильно;

2) пространство и время не связаны органически с материей; это неверно. Такой подход к понятиям о пространстве и времени метафизичен.

Для правильного понимания ньютоновой механики весьма важно иметь в виду, что по ньютонову определению термин *абсолютное движение* имеет другой смысл, чем по тому определению, которое в настоящее время принято в кинематике и которое было пояснено в § 6. В кинематике любую систему ориентировки можно условно считать неподвижной; движение по отношению к такой условно неподвижной системе ориентировки принято называть абсолютным движением, но с ньютоновой точки зрения это движение *не* будет являться абсолютным движением, если система ориентировки, условно считаемая нами неподвижной, в действительности движется. Когда по ходу изложения не будет самоочевидно, в каком смысле употребляется термин «абсолютное движение», то ньютоново применение этого термина мы будем обозначать словами *истинно абсолютное движение*.

Из определений Ньютона мы не получаем ответа на вопрос: какой физический смысл имеют слова «покой» и «равномерность» движения в первом законе механики? Мы вправе, конечно, требовать, чтобы на этот, казалось бы, «простой» вопрос был дан совершенно ясный ответ. Однако именно «простые» вопросы часто оказываются наиболее трудными для разрешения.

Ни один из вопросов, касающихся сущности основных понятий физики, в действительности не является «простым». В этом отношении понятия физики гораздо сложнее математических. С ними нельзя обращаться, как с понятиями математическими, и не приходится требовать, чтобы вся глубина, весь истинный смысл физического понятия были исчерпаны в его определении; многие вопросы, возникающие сразу после рождения нового физического понятия, проясняются постепенно, по мере развития физики. Физический смысл «покоя» и «равномерности» раскрывается не в определениях, которые предшествуют труду Ньютона, а в итоговых выводах ньютоновой механики.

В кинематике, где мы отвлекаемся от причин, вызывающих движение, и не принимаем в расчет массу движущегося объекта, является безразличным, какую систему ориентировки считать условно неподвижной. Не удивительно поэтому, что когда мы переходим от кинематики к динамике, то сразу обнаруживаются глубочайшие трудности

в применении кинематических понятий «покой» и «равномерность». Эти трудности вполне сознавались Ньютоном. Сразу после вышеприведенных определений Ньютон пишет: «Распознавание истинных движений отдельных тел и точное их разграничение от кажущихся весьма трудно, ибо части того неподвижного пространства, о котором говорилось и в котором совершаются истинные движения тел, не ощущаются нашими чувствами».

Однако то обстоятельство, что абсолютное пространство не ощущается нашими чувствами, ни в какой мере не поколебало убежденности Ньютона в том, что понятие об абсолютном пространстве (как и об абсолютном времени) должно быть положено в основу механики. Объективная реальность абсолютного пространства и абсолютного времени для Ньютона не подлежала сомнению, поэтому и к понятиям «покой» и «равномерность» Ньютон относился, как к понятиям, выражающим объективную реальность, вне зависимости от того, легко или трудно нам распознать эту реальность. Ньютон говорит: «Может оказаться, что в природе не существует покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и движения прочих... Возможно, что не существует в природе такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенной точностью». Ньютон считает, что эти вопросы должны быть исследованы и изучены. Не останавливаясь ни перед какими трудностями, Ньютон видит задачу механики и физики в «...нахождении истинных движений тел по причинам, их производящим, по их проявлениям и по разностям кажущихся движений...».

Из совокупного содержания всех трех книг «Математических начал натуральной философии», в особенности из последней книги, посвященной системе мира, ясно видно, что Ньютон как гениальный физик-материалист сам упорно стремился преодолеть отмеченную выше метафизичность сделанных им определений пространства и времени. Ньютон видел, что для преодоления метафизичности необходимо установить связь пространства и времени с материей. В третьей книге («Система мира») Ньютон обнаруживает органическую связь абсолютного пространства с материей, но по вине тогдашнего невысокого уровня космогонических познаний выводы Ньютона, правильные по существу, еще не имеют должной широты: то, что является справедливым в отношении мира в целом, Ньютон относит к солнечной системе.

Правильное построение механики Ньютона привело к преодолению метафизичности первоначального ньютонова определения абсолютного пространства и показало, что пространство органически связано с материей. Эта связь пространства с материей дана в устройстве мира, дана космогонически.

Органическая связь пространства и материи становится явной, когда в оценке объективного значения различных систем ориентировок мы идем по тому пути, который исторически отмечен переходом

от взглядов Птолемея к учению Коперника — Галилея — Кеплера — Ньютона и дальше — к естественному и неизбежному расширению идей Коперника — Ньютона на все звездные скопления, на весь мир в целом.

§ 11. Инерциальная система. Принцип относительности

В формулировке закона инерции ничего не говорится о том, по отношению к какой системе координат тело, на которое не действуют силы, будет по инерции сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Астрономические наблюдения и вычисления показывают, что закон инерции оправдывается в координатной системе, связанной с Солнцем. Приближенно закон инерции оправдывается также и для движений, отнесенных к Земле.

Материальную систему, в которой с полной точностью оправдывается закон инерции, называют *инерциальной* (или, иначе, *галилеевой*) системой. Поясним понятие инерциальной системы примером.

Пусть нас интересует движение мяча, подброшенного к потолку одним из пассажиров железнодорожного вагона. Чтобы следить за движением мяча, мы можем избрать в качестве системы координатных плоскостей стенки вагона. Наряду с этой изберем еще другую систему координат, связанную с Землей. Если вагон стоит неподвижно, то движение подброшенного в вагоне мяча будет, понятно, одинаковым по отношению к обеим избранным нами координатным системам. Когда вагон движется равномерно и прямолинейно, наблюдатель, находящийся внутри вагона, может считать, что все предметы в его вагоне по инерции пребывают в покое, а подброшенный мяч ему будет казаться поднявшимся и опустившимся по вертикали. Наблюдатель же, стоящий у полотна железной дороги, скажет, что предметы внутри вагона движутся по инерции с общей скоростью (в частности и подброшенный мяч). Поскольку в неподвижном вагоне был справедлив (с некоторой степенью приближения) закон инерции, постольку и в движущемся равномерно и прямолинейно вагоне будет также справедлив закон инерции (с той же степенью приближения).

Иначе обстоит дело, если вагон движется ускоренно, или замедленно, или хотя бы и равномерно, но по криволинейному пути. Тогда движение подброшенного внутри вагона мяча приобретает совершенно иной характер: при ускоренном движении вагона подброшенный вертикально мяч упадет сзади бросившего его пассажира; при движении вагона по криволинейному пути он упадет сбоку и т. д. При резком затормаживании вагона неподвижно лежавшие на столике предметы соскальзывают и падают на пол вперед по направлению движения вагона. Стоящие пассажиры с трудом удерживаются на ногах, а пассажиры, сидящие спиной к движению, чувствуют, что, помимо своей воли, они вдруг оказывают давление на спинки скамеек. Закон инерции — в ньютоновом понимании его

содержания — перестает (в применении к интересующей нас координатной системе) быть справедливым. Действительно, ведь в вагоне неподвижные относительно стенок и пола предметы при резком затормаживании вагона вдруг приобретают по отношению к вагону ускорение вперед, несмотря на то, что к ним не были извне приложены никакие силы, которые могли бы сообщить им это ускорение; какое-либо равномерно двигавшееся внутри вагона тело при затормаживании вагона вдруг испытывает изменение скорости своего движения относительно связанной с вагоном координатной системы; если вагон проходит по закруглению пути, то мяч, брошенный пассажиром параллельно стене вагона, будет приближаться к стене вагона или удаляться от нее.

Понятно, что всякий пассажир, осведомленный о том, как движется вагон, сумеет легко разобраться во всех этих явлениях, которые кажущимся образом опровергают закон инерции применительно к связанной с вагоном системе.

Из сказанного напрашивается следующий действительно справедливый вывод: *если какая-либо система движется прямолинейно и равномерно относительно некоторой инерциальной системы, то подвижная система также является инерциальной*. Если же подвижная система движется относительно второй инерциальной системы непрямолинейно или хотя бы и прямолинейно, но неравномерно, то она не будет инерциальной системой.

Приведенные утверждения являются следствием совмещения закона инерции с законом сложения ускорений. Действительно, согласно закону сложения ускорений (§ 7) две системы ориентировки, движущиеся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, *равноценны в отношении ускорения*, т. е. в этом случае (и только в этом случае) ускорение относительного движения равно ускорению абсолютного движения. Следовательно, если одна из упомянутых систем является инерциальной системой и некоторое тело, свободное от воздействия сил, движется по отношению к этой системе равномерно и прямолинейно, иначе говоря, движется с ускорением, равным нулю, то и по отношению к другой из упомянутых систем движение тела будет происходить также с ускорением, равным нулю, т. е. равномерно и прямолинейно. А это и означает, что вторая из рассмотренных систем тоже является инерциальной системой.

Как уже упоминалось, с Солнцем можно связать координатную систему, являющуюся инерциальной. Координатные оси этой системы надо мыслить себе пересекающимися в некоторой точке Солнца (*в центре массы* солнечной системы). Поскольку Земля в своем обращении вокруг Солнца движется с определенным центростремительным ускорением, то, строго говоря, любая координатная система, связанная с Землей, не является инерциальной. Но если учесть, что в течение 30 минут Земля в своем движении вокруг Солнца описывает дугу, лишь немного бóльшую 1′ (это указывает, насколько

мала кривизна земной орбиты), то становится понятной крайняя малость влияния криволинейности движения Земли на инерциальные свойства координатной системы, связанной с Землей.

Гораздо большее, но практически все же несущественное влияние оказывает суточное вращение Земли. Если бы этого вращения не существовало, то камень, уроненный с башни, падал бы точно по вертикальной линии. Вследствие суточного вращения Земли каждая точка земной поверхности имеет некоторую горизонтальную скорость перемещения с запада на восток; для вершины башни эта скорость больше, чем для ее основания; поэтому уроненный с высокой башни камень опережает почву в движении на восток и падает не в ту точку, которая является основанием вертикали, проходящей через начальное положение камня, но несколько восточнее этой точки (рис. 13). Это отклонение от вертикали при высоте падения в 20 *м* составляет всего несколько миллиметров (для средних широт). Отсюда видно, что координатную систему, связанную с поверхностью Земли, можно с достаточной для практических целей точностью рассматривать как инерциальную.

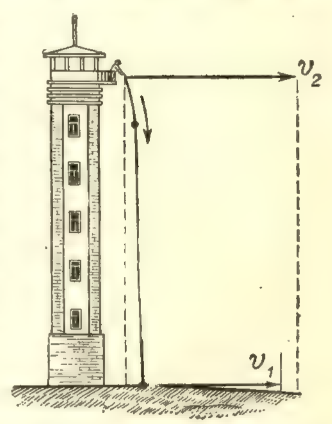


Рис. 13. Камень, сброшенный с высокой башни вследствие суточного вращения Земли имеет горизонтальную скорость $v_2—v_1$ относительно земной поверхности.

Отклонения от закона инерции, вызываемые суточным вращением Земли, легче всего заметить, следя за плоскостью качания маятника (маятник Фуко). Чтобы нагляднее представить себе сущность явления, укрепим на оси центробежной машины металлический диск с дугой и к той точке дуги, которая приходится в точности на оси вращения, привесим маятник (рис. 14) посредством шарнирчика *C*, который способен с малым трением вращаться в отверстии, сделанном в дуге. Маятник, раз приведенный в качание, сохраняет свою первоначальную плоскость колебаний даже при сравнительно быстром вращении дуги. Это понятно, так как на маятник не действуют никакие силы, способные изменить (повернуть) плоскость качаний маятника (это есть вертикальная плоскость, проходящая через направление первоначального отклонения маятника; сила веса маятника неизменно лежит в этой плоскости, а не направлена к ней под углом; если не учитывать малых, по условию, сил трения в точке подвеса, то никаких других сил, действующих на маятник, не имеется).

Изменим теперь масштаб опыта: центробежную машину заменим земным шаром, испытывающим суточное вращение, дугу — потолком

и стенами какой-либо комнаты. Через несколько минут мы заметим, что плоскость качания маятника как бы поворачивается «по солнцу», т. е. с востока на юг. Вообразим, что указанный опыт производится на одном из полюсов Земли. Тогда плоскость качания маятника, поворачивающаяся с точки зрения земного наблюдателя, в действительности была бы неподвижна по отношению к инерциальной астрономической системе координат. Когда опыт с маятником Фуко производят в какой-либо другой точке Земли, то, поскольку плоскость качания маятника постоянно проходит через вертикаль, эта плоскость будет поворачиваться не только по отношению к земному наблюдателю, но в определенных пределах и по отношению к инерциальной астрономической системе координат.

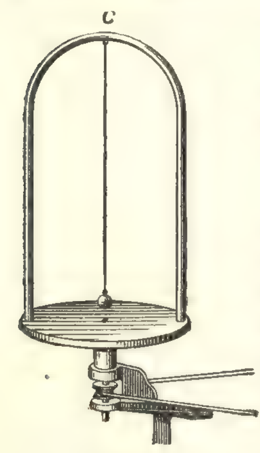


Рис. 14. При вращении центробежной машины плоскость качаний маятника остается неизменной.

На описанные опыты можно смотреть как на экспериментальное доказательство вращения Земли. Точные наблюдения над отклонением от вертикали падающих тел были произведены Бенценбергом в 1802 и 1804 гг. и позднее неоднократно повторялись различными исследователями. Опыт с маятником впервые был произведен Вивиани во Флоренции в 1661 г., затем Бартолини в 1833 г. и Фуко в 1850—1851 гг. (об опытах своих предшественников Фуко не знал). Опыт Фуко был произведен с маятником длиной 67 *м*; медный шар этого маятника весил 28 *кГ*.

Соображения, высказанные выше в связи с утверждением, что материальная система, которая движется равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы, также является инерциальной системой, приводят к следующему выводу:

Никакие механические опыты и наблюдения, производимые внутри инерциальной системы, не дают возможности решить вопрос, имеет ли вся эта система в целом прямолинейное равномерное движение или же она находится в покое. Это заключение резюмирует соображения, высказанные в основе своей еще Галилеем, и поэтому называется *принципом относительности Галилея* (приведенная формулировка была дана Эйнштейном). Из этого принципа непосредственно вытекает положение, что в мире не существует абсолютно неподвижного тела; всякий «покой» является относительным.

Галилей указал принцип относительности, разбирая вопрос о том, каким образом общее быстрое движение Земли не расстраивает частных движений, происходящих на ее поверхности. Галилей поясняет этот принцип следующим примером: «Заключите себя с каким-нибудь приятелем в зале под палубой какого-нибудь большого корабля...

и заставьте привести в движение корабль с какой угодно быстротой. И вот (если только движение будет равномерное) вы не заметите ни малейшей перемены во всех явлениях и ни по одному из них не в состоянии будете судить — движется ли корабль или стоит на месте: вы, прыгая, будете проходить по полу те же самые пространства, как и при покое корабля, т. е. вы не сделаете — оттого, что корабль движется весьма быстро — бóльших прыжков к корме, чем к носу корабля, хотя в то время, когда вы находитесь в воздухе, пол, находящийся под вами, бежит в сторону, противоположную вашему прыжку, и, бросая какую-нибудь вещь товарищу, вам не нужно будет с большей силой кидать ее, если он будет около носа корабля, вы же около кормы, чем если бы вы стояли наоборот; капельки из подвешенной к потолку кружки с водой будут падать вертикально на пол и ни одна не упадет по направлению к корме, хотя, покуда капля находится в воздухе, корабль уходит вперед...».

Принцип относительности Галилея устанавливает, что посредством механических наблюдений и опытов, производимых внутри системы, нельзя обнаружить существование прямолинейного равномерного движения всей системы. Но принцип этот ничего не говорит о том, нельзя ли это движение обнаружить посредством каких-либо иных, немеханических наблюдений и опытов, например посредством оптических опытов.

А. Эйнштейн в 1905 г. расширил принцип относительности Галилея утверждением, что не только механические опыты и наблюдения, но вообще никакие физические, в частности оптические и электрические, опыты не могут обнаружить прямолинейного и равномерного движения системы, в которой производятся эти опыты. Если K есть инерциальная система, то каждая движущаяся по отношению к K равномерно и без вращения система K' будет также инерциальной; *законы природы выражаются одинаково во всех инерциальных системах*. Это — *принцип относительности Эйнштейна*.

Руководствуясь этим принципом и связанным с ним утверждением, что скорость света в вакууме во всех направлениях для всех инерциальных систем одинакова, Эйнштейн разработал механику движений со скоростями, соизмеримыми со скоростью света, — *релятивистскую механику*, получившую название *теории относительности* (т. III). Заметим, что в релятивистской механике галилеев закон сложения скоростей заменяется другим, более сложным законом, который, однако, для движений, происходящих со скоростями, малыми в сравнении со скоростью света, практически не отличается от закона Галилея. В релятивистской механике учитывается и получается в качестве следствия подтвержденная на опыте зависимость массы от скорости, но эта зависимость обнаруживается также только при скоростях, соизмеримых со скоростью света.

Основываясь на принципе относительности, часто делают *неверное* заключение, что механическое движение существует только по

отношению к наблюдателю, т. е. что всякое механическое движение является будто бы «не имеющим физического смысла», а значит, как бы не существующим, когда не определена система ориентировки, по отношению к которой исследуется движение. Это неверно потому, что движение материи существует объективно, независимо от способов его наблюдения. Реальные процессы движения становятся относительными, когда мы их исследуем по отношению к той или иной системе отсчета. Мы получаем при этом *относительные отображения реального, объективного движения.*

С кинематической точки зрения, отрывающей движение от материальной основы, все инерциальные системы отсчета равноценны. Но абсолютно инерциальной системы отсчета вообще не существует. Такая система могла бы существовать там, где нет сил тяготения, т. е. вне реального мира. Все действительно возможные, т. е. *приблизительно инерциальные*, системы отсчета фактически неравноценны, так как они в разной мере, по-разному неинерциальны. Поэтому кинематическое утверждение о полной равноценности инерциальных систем в физико-философском отношении является бессодержательным.

Исследуя относительные отображения какого-либо движения в разных системах ориентировки, мы получаем приблизительное представление об объективной картине движения, и нужно сказать, что чем менее инерциальна система, чем больше массы, с которыми она реально связана, тем обычно мы ближе подходим к истинной картине движения.

§ 12. Второй ньютонов закон механики

Во втором законе Ньютона говорится об изменении количества движения и о силе. В механике и в физике *количеством движения* называют произведение массы m на скорость тела v. Когда в обыденной жизни говорят о «количестве движения», то чаще всего вкладывают в эти слова смысл, аналогичный величине mv. Действительно, если по какой-либо безлюдной улице с большой скоростью бежит один человек, то никто не скажет, что движение по этой улице велико; если на улице находится неподвижная толпа ожидающих чего-либо людей, то опять-таки никто не скажет про эту улицу, что движение по ней велико; уличное движение все мы измеряем (иногда сами этого не замечая) произведением числа движущихся по улице людей на среднюю скорость их движения.

Количество движения представляет собой вектор, имеющий направление скорости, но по численному значению превосходящий скорость во столько раз, во сколько раз масса тела m больше единицы массы.

Строго говоря, вышеприведенное определение количества движения справедливо только для материальной точки; в общем случае

разные участки движущегося тела могут иметь неодинаковые скорости; тогда рассматривают тело как совокупность материальных точек и под количеством движения понимают геометрическую сумму количеств движения всех материальных точек, составляющих тело.

Часто вместо термина «количество движения» пользуются для обозначения величины mv термином *импульс.*

Сила также является вектором. О силах мы судим: во-первых, по их статическому проявлению (например, по давлению, которое тело оказывает на опору; давление может привести к прогибу поверхности, к сжатию пружины и т. д.), во-вторых, по их динамическому проявлению, т. е. по ускорениям, которые тела приобретают под действием силы. В первом случае, при статическом проявлении, векторность силы легко может быть обнаружена опытным путем: силы при их статическом проявлении складываются геометрически (по правилу параллелограмма, а при более чем двух силах — по более общему правилу многоугольника [1])). Во втором случае, при динамическом проявлении, векторность «движущей» силы вскрыта вторым законом механики.

Второй закон механики состоит в следующем утверждении (приводим ньютонову формулировку этого закона):

Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

Здесь речь идет о *геометрическом* изменении количества движения за *единицу времени*, причем в качестве единицы времени должен быть избран достаточно малый промежуток, а именно настолько малый, чтобы в продолжение его изменение количества движения можно было считать происходящим равномерно. Чтобы освободить себя от этого стеснительного условия в выборе единицы времени, нужно в приведенной выше формулировке второго закона слова «изменение количества движения...» заменить словами «изменение количества движения, происходящее за элементарно малый промежуток времени и разделенное на этот промежуток времени...». Далее, условимся измерять упоминаемые во втором законе величины в таких единицах, чтобы можно было слово «пропорционально» заменить словом «равно». Тогда, полностью сохраняя смысл приведенной выше ньютоновой формулировки второго закона, мы можем выразить этот закон так:

Геометрическое изменение количества движения, происходящее за элементарно малый промежуток времени и разделенное на этот промежуток времени, равно приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

---

[1]) Изображение силы в виде вектора первым стал применять один из основателей статики Стевин (около 1600 г.).

Следовательно, если $\boldsymbol{F}$ есть «движущая» сила, приложенная к телу (точнее, к «материальной точке»), масса которого есть m и скорость $\boldsymbol{v}$, то

$$\boldsymbol{F}=\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}. \tag{1}$$

Когда масса постоянна, то изменение количества движения происходит вследствие одного лишь изменения скорости: $\Delta(m\boldsymbol{v})=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1=m(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)=m\Delta\boldsymbol{v}$; поэтому при $m=\text{const}$

$$\boldsymbol{F}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \tag{2}$$

или, если под $\boldsymbol{j}$ подразумевать вектор ускорения, то при $m=\text{const}$

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{j}. \tag{2a}$$

Имея в виду это уравнение, второй закон механики часто формулируют так: *сила равна произведению массы на ускорение.*

Заметим, что вектор «движущей» силы находится в таком же соотношении с ускорением, как вектор количества движения со скоростью; действительно, количество движения совпадает по направлению со скоростью и численно равно произведению массы на скорость; аналогично сила совпадает по направлению с ускорением и численно равна произведению массы на ускорение.

Вспомним, что проекции вектора ускорения $\boldsymbol{j}$ на оси координат равны частным производным второго порядка от координат по времени (§ 3, уравнение (9)]. Проекции силы $\boldsymbol{F}$ на оси координат (компоненты вектора силы) обозначим через X, Y, Z. Векторное уравнение (2) равносильно трем скалярным уравнениям для компонентов силы:

$$X=m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y=m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z=m\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{3}$$

Это — *ньютоновы уравнения движения.*

Еще Галилеем было установлено, что у поверхности Земли все тела падают (в безвоздушном пространстве) с одинаковым ускорением g, которое для средних географических широт равно приблизительно 9,8 *м/сек*^{2}. (Как будет показано в главе VI, галилеев закон свободного падения тел является одним из следствий ньютонова закона всемирного тяготения.) Таким образом, *сила тяжести* $\boldsymbol{P}$, которая статически проявляется в весе тел, *динамически проявляется в одинаковом для всех тел ускорении* $\boldsymbol{g}$. Следовательно, по второму закону механики

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}; \tag{4}$$

вес тела пропорционален массе тела; коэффициентом пропорциональности является ускорение силы тяжести.

Смысл второго закона Ньютона, пожалуй, наиболее отчетливо виден при такой формулировке этого закона, когда используется понятие импульса силы. Когда сила, действующая на материальную точку, постоянна по величине и направлению, то под *импульсом силы* понимают произведение силы на время ее действия. В общем случае, когда величина и направление силы непостоянны, общее время действия силы разбивают на столь малые промежутки времени, чтобы в пределах каждого такого промежутка времени с изменением силы можно было не считаться. Произведение силы на бесконечно малый промежуток времени ее действия называют *элементарным импульсом силы*; элементарный импульс представляет собой бесконечно малый вектор $\boldsymbol{F}dt$, имеющий направление действующей силы. Под *суммарным импульсом* понимают геометрическую сумму элементарных импульсов силы.

По второму закону механики

$$\boldsymbol{F}\,dt = d\,(m\boldsymbol{v}).$$

Следовательно, пользуясь понятием об импульсе силы, второй закон механики можно сформулировать так: *изменение количества движения за любой бесконечно малый промежуток времени равно элементарному импульсу силы.*

Представим себе, что для каждого из всех промежутков времени написано уравнение второго закона механики в только что приведенной форме. Сложим все эти векторные уравнения, т. е. построим два многоугольника; сторонами одного многоугольника будут служить элементарные импульсы, сторонами второго — бесконечно малые изменения количества движения. Очевидно, что геометрическая сумма всех векторов $d(m\boldsymbol{v})$ (т. е. сторона, замыкающая многоугольник, построенный из этих векторов) будет представлять собой не что иное, как суммарное приращение количества движения материальной точки за рассматриваемый промежуток времени t; с другой стороны, очевидно также, что суммарное приращение количества движения за время t равно геометрической разности между тем количеством движения, которое материальная точка имеет к концу времени t, и тем количеством движения, которое материальная точка имела в начальный момент времени. Таким образом,

$$\text{импульс силы} = \sum \boldsymbol{F}\,dt = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1. \qquad (5)$$

Здесь $\sum$ есть знак суммы, причем — так как за этим знаком стоит вектор — в данном случае $\sum$ означает геометрическую сумму.

Если в начальный момент времени материальная точка находилась в покое ($\boldsymbol{v}_1 = 0$), то количество движения, приобретенное материальной точкой за время t, равно импульсу силы. Поэтому для обозначения величины $m\boldsymbol{v}$ наряду с термином «количество движения» применяют также термин *импульс.*

В расширенном понимании в слово «импульс» вкладывается смысл: «толчок», «побуждающая» причина. Понятием импульса силы в особенности часто пользуются, когда анализируют действие кратковременных, так называемых «мгновенных» сил. Называя величину $m\boldsymbol{v}$ импульсом, имеют в виду, что величина $m\boldsymbol{v}$ указывает интенсивность и направление толчка, который нужно было бы сообщить материальной точке m, чтобы «мгновенно» перевести ее из состояния покоя в движение со скоростью $\boldsymbol{v}$. Можно также сказать, что величиной $m\boldsymbol{v}$ измеряется толчок, который произвела бы материальная точка, если ее «мгновенно» затормозить до состояния покоя.

Второй закон механики содержит еще и следующую мысль:

Если к телу приложено одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает телу определяемое вторым законом ускорение так, как если бы других сил не было.

Это утверждение иногда называют *принципом независимости действия сил*. Решая задачи механики методами Ньютона, этим принципом приходится широко пользоваться. При умелом подходе применение этого принципа может оказаться чрезвычайно полезным при решении трудных задач. Если к телу приложена всего одна сила, то все же нередко представляется удобным разбить эту силу на две или три слагающие, геометрической суммой которых являлась бы заданная сила. Так, например, если тело при своем движении должно оставаться на некоторой жесткой поверхности, то почти всегда представляется полезным разбить приложенную к телу силу на две составляющие: одну, которая направлена по касательной к этой поверхности, и другую, которая направлена по нормали к поверхности; понятно, что эта вторая составляющая не сообщит телу численного увеличения скорости и проявится в давлении, которое тело при своем движении будет оказывать на поверхность.

Действие силы сказывается не только независимо от действия других приложенных к телу сил, но также независимо от того, пребывало ли ранее тело в покое или же двигалось с некоторой скоростью. Скорость, сообщаемая приложенной к телу силой, геометрически складывается со скоростью инерциального движения тела. Примером этого может служить движение брошенного тела (в пустоте): для любого момента времени вектор скорости брошенного тела геометрически слагается из вектора начальной (сообщенной телу при бросании) скорости, сохраняемой телом по инерции, и направленной вертикально вниз скорости падения тела (движение брошенного тела подробно рассматривается в § 14).

Как было показано в § 4, ускорение $\boldsymbol{j}$ всегда можно разложить на два компонента: на тангенциальное ускорение j_τ (по касательной к траектории) и на центростремительное ускорение j_r (по радиусу кривизны). Соответственно и движущую силу $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{j}$ всегда можно разложить на две составляющие: на *тангенциальную силу* F_τ, на-

правленную по касательной к траектории и проявляющуюся в изменении численного значения скорости, и на *центростремительную силу* F_r, направленную по главной нормали к центру кривизны и проявляющуюся в изменении направления движения, в отклонении тела от прямолинейной траектории, по которой тело стремится двигаться вследствие инерции:

$$F_\tau = mj_\tau, \quad F_r = mj_r.$$

Вспоминая выведенные в § 4 выражения для тангенциального и центростремительного ускорений, получаем нижеследующие формулы для тангенциальной и центростремительной сил:

$$F_\tau = m\frac{dv}{dt}, \tag{6}$$

$$F_r = \frac{mv^2}{R}. \tag{7}$$

Воспользовавшись понятием угловой скорости ω (§ 5) и учитывая, что $v=\omega R$, формулу для центростремительной силы можем переписать так:

$$F_r - m\omega^2 R. \tag{8}$$

Если уравнение второго закона относить не к отдельной материальной частице, а к телу в целом, то даже в весьма простых задачах механики часто приходится сталкиваться со случаем, *когда масса тела не остается постоянной* во время движения. Представим себе, например, что на совершенно гладкой скользкой палубе корабля лежит канат, один конец которого спущен в воду; под действием неизменной по величине силы — под действием тяжести части каната, свисающей через борт,— канат будет сползать с палубы; это движение будет ускоренным; чтобы правильно вычислить ускорение, надо учесть, что масса, которой сообщается ускорение, во время движения уменьшается. Важным примером движения, когда масса не остается постоянной, является полет ракеты.

В последние годы в связи с развитием реактивной техники механика тел переменной массы приобрела большое значение. Пионером в этой области был профессор Петербургского университета И. В. Мещерский, опубликовавший в 1897 г. монографию «Динамика точки переменной массы». Законы полета ракет были впервые подробно теоретически исследованы русским ученым Константином Эдуардовичем Циолковским.

Следует иметь в виду, что ньютоново уравнение

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

при изменяемой массе относится к случаю, когда прирост или уменьшение массы m происходит за счет присоединения (или отделения)

частиц массы, бывших неподвижными (или становящихся неподвижными).

Для самого общего случая, когда изменение массы происходит за счет частиц, имеющих некоторую абсолютную скорость v', совмещение второго и третьего законов Ньютона приводит, как показал Мещерский, к формуле

$$\frac{d(mv)}{dt}=F+v'\frac{dm}{dt}. \tag{9}$$

По правилу дифференцирования произведения двух функций

$$\frac{d(mv)}{dt}=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt};$$

подставляя это выражение в формулу (9), мы видим, что при $v=v'$ вторые члены в левой и правой частях получающегося уравнения сокращаются. Стало быть, если присоединяемые (или отделяемые) частицы массы не были неподвижны (или не становятся неподвижными), но, наоборот, имеют в момент присоединения (или отделения) ту же скорость, что и главная масса m (т. е. когда $v'=v$), то, несмотря на изменяемость массы m, в этом частном случае мы можем пользоваться уравнением

$$F=m\frac{dv}{dt}.$$

Введем относительную скорость присоединяемых (или отделяемых) масс

$$w=v'-v$$

(что удобно, например, при анализе движения ракеты); тогда наиболее общее уравнение (9) можно свести к «школьной» формулировке второго закона Ньютона [к уравнению (2)]:

$$m\frac{dv}{dt}=F+F', \quad \text{где } F'=w\frac{dm}{dt}.$$

Здесь F' есть «сила реакции», действующая на массу m вследствие отделения или присоединения к ней частиц массы.

§ 13. Различные понимания второго закона механики

Имеются разногласия в понимании и в оценке значения второго закона Ньютона.

Вслед за Э. Махом, который в книге «Механика», опубликованной в 1883 г., предпринял попытку радикального пересмотра основных положений ньютоновой механики, многие физики стали рассматривать второй закон Ньютона как определение понятий массы или силы, а не как обобщение наблюдений и экспериментов.

Те физики, которые рассматривают второй закон как определение понятия силы, читают второй закон так: «силой называется произведение массы на ускорение». При такого рода понимании второй закон, взятый в отдельности, утрачивает какое бы то ни было физическое содержание; ведь мы вольны давать названия по усмотрению. Назвав силой произведение массы на ускорение, мы этим не устанавливаем никакой новой физической истины и, конечно, не можем претендовать на то, чтобы это с о г л а ш е н и е о термине «сила» рассматривалось как закон природы. С указанной точки зрения второй закон не есть закон, но является просто как бы предисловием к третьему закону.

В третьем законе устанавливается, что всегда существует только взаимодействие тел: силы, приложенные к различным взаимодействующим телам, попарно равны и направлены противоположно; они сообщают взаимодействующим телам равные по величине, но противоположные по знаку изменения количества движения. Поэтому взаимодействие между телами не может изменить суммарного количества движения этих тел: насколько возрастает количество движения какого-либо одного тела, настолько уменьшается количество движения других тел, взаимодействующих с первым (закон сохранения количества движения). Обо всем этом мы будем ниже говорить подробнее. Сейчас мы упомянули об этом только в целях сопоставления второго закона с третьим.

Физики, которые рассматривают второй закон как определение силы, считают, что действительным принципом механики (почерпнутым из опыта) является третий закон. Этот третий закон можно было бы сформулировать и не прибегая к понятию силы (прямо в виде закона сохранения количества движения). Таким образом, можно прийти к выводу, что понятие силы *не* является необходимым для построения механики. И действительно, многие рассматривают «силу» как понятие вспомогательное; при этом некоторыми высказывалось мнение, что понятие силы при желании можно исключить из физики без существенного ущерба для ее содержания.

Взамен ньютоновых законов можно положить в основу механики, как было показано многими учеными, другие принципы. Такие общие принципы механики, вполне заменяющие законы Ньютона и иногда более широкие, были высказаны Гамильтоном, Лагранжем, Якоби, Гауссом и др.

Эти принципы (в рамках данного курса они не могут быть изложены), вообще говоря, не имеют назначения устранить из механики понятие силы, но они во всяком случае отводят этому понятию более скромную роль, чем та, которую играет сила в ньютоновой механике. Герц построил механику (исходя из принципа, высказанного Гауссом), в основном не прибегая при анализе движений к понятию силы. Но не следует забывать, что задачи физики обширны; уже в статике и в особенности в учении о сопротивлении материалов понятие силы приносит неоценимые услуги; оно позволяет излагать динамику

с наибольшей в математическом отношении простотой; оно позволяет придать бо́льшую наглядность описанию и анализу электрических явлений и т. д.

Некоторые другие физики, подобно первой группе, рассматривают второй закон как определение, но не как определение силы, а *как определение понятия массы*; они читают второй закон так: «инертной массой называется отношение силы к вызываемому этой силой ускорению». В отличие от этой «инертной массы» массу, определяемую на основе закона тяготения, называют «тяготеющей», или гравитационной, массой.

Многие физики придерживаются ньютоновой точки зрения, которая совершенно не совпадает с двумя изложенными выше взглядами.

Несомненно, что механику можно построить, давая разное определение понятиям и исходя из тех или иных принципов; но поскольку, изучая механику, мы полагаем в основу законы Ньютона, мы должны совершенно отчетливо представлять себе смысл, который Ньютон вкладывал в сделанные им утверждения. Не подлежит сомнению, что Ньютон высказал свой второй закон как аксиому, обобщающую опыт, а не как определение понятий «сила» и «масса».

Русский переводчик сочинения Ньютона — акад. А. Н. Крылов — в одном из своих примечаний к первой книге «Математических начал натуральной философии» справедливо замечает: «Давая определение понятия *движущая сила*, т. е. того, что теперь зовут просто *сила*, Ньютон обращает внимание на способ ее измерения и именно способ *статический* — уравновешивание другой силой, препятствующей движению... Сила, статически вдвое бо́льшая, сообщает и вдвое большее количество движения... Нигде Ньютон не говорит, чтобы сила и з м е р я л а с ь произведением массы на ускорение...».

По Ньютону, и сила и масса измеряются с т а т и ч е с к и: «Измеряется масса по весу посредством рычажных весов...; движущая сила распознается по силе, ей равной и противоположной, которая могла бы воспрепятствовать ускорению движения тела...» (из «Определений» Ньютона, которые предшествуют формулировке «Аксиом движения»).

Коль скоро каждая из трех величин, входящих во второй закон, определена и измерена независимо от двух остальных, то второй закон приобретает, очевидно, смысл установленного опытом факта. Придерживаясь указанной выше терминологии, можно сказать:

Физическим содержанием второго закона является почерпнутая из опыта истина, что «инертная масса» тела (т. е. отношение силы к ускорению) всегда равна «тяготеющей массе» того же тела.

Но тогда становится ясным, что нет надобности различать инертную массу от тяготеющей и, следовательно, нет необходимости вводить эти два термина; Ньютон и не употреблял их и всегда пользо-

вался одним термином — «quantitas materiae» («количество материи»), который равнозначен слову «масса».

Первое доказательство справедливости сделанного выше утверждения о равенстве инертной и тяготеющей масс дают законы падения Галилея, из которых вытекает независимость ускорения силы тяжести от специального выбора падающего тела. Но, разумеется, эти опыты могли оказаться недостаточно точными. Поэтому справедливость высказанного выше утверждения проверялась позднее Ньютоном, затем Бесселем и венгерским физиком Этвешем. По Бесселю, разница между инертной и тяготеющей массой во всяком случае не превосходит 1/20 000; по Этвешу, она не может быть более 1/10 000 000. Таким образом, утверждение о равенстве инертной и тяготеющей масс следует рассматривать как точный закон природы. В ньютоновой механике равенство обеих масс принимается как экспериментальный факт.

Приняв точку зрения Ньютона-физика, мы, однако, отвергаем идеи Ньютона-философа; согласившись с разумностью определения понятий силы и массы на основе статического способа их измерения, приняв, таким образом, второй закон как опытный факт, а не как определение, мы вовсе не обязаны рассматривать силу как некую таинственную первопричину движений, к чему был склонен Ньютон в своих философских рассуждениях. Первопричиной движений является само движение; одна форма движения переходит в другие формы движения. Силы служат нам средством распознавания и средством исследования этих процессов перехода и преобразования движений. Силы существуют реально в своем проявлении как промежуточное звено этого перехода, но, когда их хотят рассматривать как первопричину движений, они становятся фикцией.

«Представление о силе заимствовано, как это признается всеми,... из проявлений деятельности человеческого организма по отношению к окружающей его среде. Мы говорим о мускульной силе,... о секреторной силе желез и т. д., ... сочиняем столько же сил, сколько существует различных явлений...» (Ф. Энгельс, Диалектика природы). По мере роста наших познаний относительно сущности изучаемых явлений, представление о силах отступает на второй план в сравнении со многими другими постепенно обнаруживаемыми величинами, которые более полно характеризуют какое-либо интересующее нас явление.

§ 14. Движение под действием постоянной силы

Чтобы показать, как применяются законы Ньютона для решения задач динамики, рассмотрим два примера: прямолинейное движение под действием постоянной силы и движение брошенного тела. Оба случая являются важными сами по себе.

Когда действующая на тело сила изменяется при движении тела и когда вследствие этого движение оказывается сложным, часто обнаруживается возмож-

ность для коротких промежутков времени считать силу приближенно постоянной, что позволяет применить для анализа движения на отдельных участках траектории выведенные ниже простые формулы.

Прямолинейное движение под действием постоянной силы. При неизменной величине и при неизменном направлении сила и, очевидно, ускорение сохраняют *постоянную* по численному значению и по направлению величину во все время движения; если при этом сила направлена по движению, то скорость растет (ускорение j положительно), движение *равноускоренное*; если же сила направлена противоположно движению, то скорость убывает (ускорение j отрицательно), движение *равнозамедленное*.

Камень, отпущенный (уроненный) без толчка, движется равноускоренно по вертикали вниз под действием постоянной силы тяжести. Камень, брошенный вертикально вверх, движется сначала равнозамедленно, а достигнув наивысшей точки, движется затем вниз равноускоренно.

В технике мы часто встречаем случаи, когда в первом приближении для выполнения ориентировочных расчетов движение можно считать равноускоренным или равнозамедленным. Так, например, можно говорить о равноускоренном движении поезда при его отправлении со станции и о равнозамедленном движении его при торможении перед остановкой.

Рассмотрим прямолинейное равноускоренное или равнозамедленное движение и найдем, как изменяются скорость и пройденный путь в такого рода движении.

Пусть в некоторый начальный момент времени точка имеет скорость v_0. Так как ускорение j представляет изменение скорости за единицу времени, то через t секунд скорость изменится на величину $j \cdot t$ и, следовательно, скорость в момент t будет:

$$v = v_0 + jt. \qquad (10)$$

Чтобы рассчитать пройденный за время t путь, заметим, что хотя скорость во время движения возрастает или убывает, но ввиду равномерности ее изменения мы можем для вычисления пройденного расстояния считать движение в промежутке времени от 0 до t происходящим с некоторой *средней* для этого промежутка времени скоростью $v_{\text{средн}}$. Ее находим как среднее арифметическое между начальной скоростью v_0 и конечной $v_0 + jt$, а именно:

$$v_{\text{средн}} = \frac{v_0 + (v_0 + jt)}{2} = v_0 + \frac{jt}{2}.$$

Тогда пройденный за время t путь выразится произведением $v_{\text{средн}} \cdot t$, т. е.

$$s = v_0 t + \frac{jt^2}{2}. \qquad (11)$$

Это и есть *уравнение движения* при $j = \text{const}$.

Если начальная скорость $v_0 = 0$, то формулы упрощаются:

$$v = jt, \quad s = \frac{jt^2}{2}.$$

Особенный интерес представляет случай движения тел под действием силы тяжести.

1. Если тело у р о н е н о (отпущено без толчка), то оно будет равноускоренно двигаться вертикально вниз. Это движение определяется формулами

$$v = gt, \quad s = \frac{gt^2}{2},$$

где g — ускорение силы тяжести, равное 981 *см/сек*². Из этих двух формул, исклю-

чая время t, можно определить конечную скорость тела при падении с высоты h:

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (12)$$

2. Если тело брошено вертикально вниз с начальной скоростью v_0, то

$$v = v_0 + gt, \quad s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

3. Если тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0, то, считая направление вверх положительным, а вниз — отрицательным (так что $j = -g$), имеем:

$$v = v_0 - gt, \quad s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда легко найти время наивысшего поднятия t' и наибольшую высоту $s_{макс}$. В самом деле, полагая $v = 0$, находим: $t' = \frac{v_0}{g}$, а подставив это значение во вторую формулу, найдем: $s_{макс} = \frac{v_0^2}{2g}$.

Движение брошенного тела. Рассмотрим полет снаряда, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту (рис. 15). Направим ось X горизонтально, а ось Y вертикально и разложим начальную скорость v_0 на горизонтальную составляющую $v_0 \cos \alpha$ и вертикальную составляющую $v_0 \sin \alpha$.

Так как сила тяжести P горизонтальной составляющей не имеет, то горизонтальная скорость v_x остается постоянной:

$$v_x = v_0 \cos \alpha.$$

Абсцисса x определится как путь, пройденный в равномерном движении со скоростью $v_0 \cos \alpha$:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t. \qquad (13)$$

Рис. 15. Полет снаряда, брошенного под углом α к горизонту. Пунктиром показана баллистическая кривая.

Вертикальная составляющая скорости v_y меняется со временем: она представляет собой разность между вертикальной составляющей начальной скорости $v_0 \sin \alpha$, направленной вверх, и скоростью, получаемой снарядом под действием силы тяжести, направленной вниз и численно равной gt, т. е.

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Ордината y найдется как разность между перемещением в равномерном движении вертикально вверх со скоростью $v_0 \sin \alpha$ и, значит, численно равным $v_0 \sin \alpha \cdot t$ и перемещением по вертикали вниз в равноускоренном движении под действием силы тяжести, численно равным $\frac{gt^2}{2}$, так что

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (14)$$

Определим время наивысшего подъема t', максимальную высоту $y_{макс}$ и дальность полета $x_{макс}$. Так как в точке M наивысшего подъема вертикальная состав-

ляющая скорости равна нулю, то из уравнения для v_y

$$t' = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Вставляя в уравнение (14) $t = t'$ и в уравнение (13) $t = 2t'$, получим высоту и дальность полета:

$$y_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

$$x_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

При заданной начальной скорости v_0 $x_{\text{макс}}$ будет иметь наибольшее значение, если $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = 45°$. Значит, наибольшая дальность

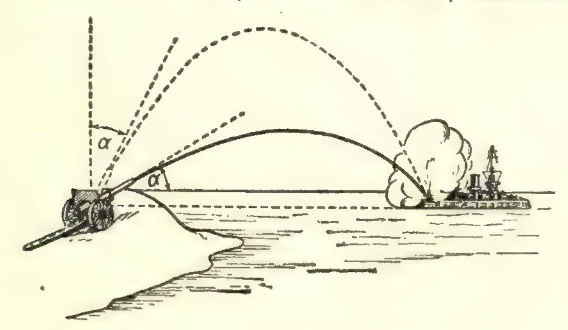


Рис. 16. Навесная и настильная стрельба.

полета снаряда получается при угле подъема, равном 45°. Далее, так как $\sin 2\alpha = \sin(180° - 2\alpha) = \sin 2(90° - \alpha)$, то дальность при данной начальной скорости v_0 будет одна и та же при угле бросания α и $90° - \alpha$; значит, существуют *две* траектории, двигаясь по которым брошенное тело попадает в одну и ту же точку. Одну из них (более пологую) называют *настильной*, другую — *навесной* (рис. 16).

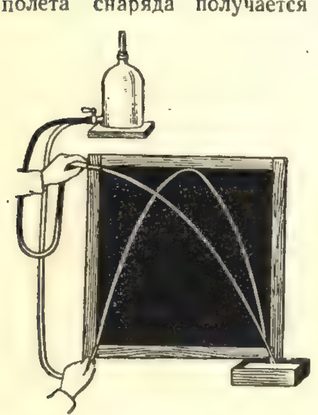
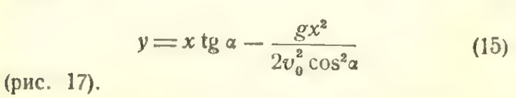


Рис. 17. Простейшая демонстрация траектории брошенного тела.

Исключая время из уравнений (13) и (14), получаем уравнение траектории снаряда — *параболу*:



$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \qquad (15)$$

(рис. 17).

Уравнения выведены в предположении, что воздух не оказывает сопротивления движению брошенного тела. При больших начальных скоростях такое предположение не может быть принято, и в приведенные уравнения должны быть введены существенные поправки. Траектория уже не будет параболой; ее нисходящая ветвь оказывается значительно круче восходящей (так называемая баллистическая кривая); дальность и высота полета значительно уменьшаются.

§ 15. Третий ньютонов закон механики

Третий закон динамики Ньютона устанавливает, что при всех изменениях движения, вызываемых действием сил, а также и при статическом проявлении сил всегда имеет место в з а и м о д е й с т в и е двух или более тел.

Ньютон так сформулировал третий закон:

Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, другими словами — действия двух тел друг на друга всегда равны и направлены в противоположные стороны.

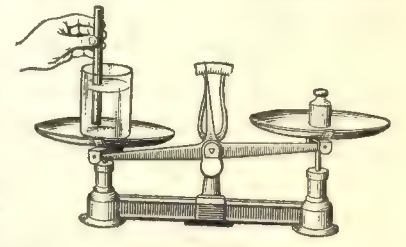


Рис. 18. К телу, погруженному в жидкость, со стороны жидкости приложена выталкивательная сила; противодействие сказывается как бы в увеличении веса жидкости.

Содержание этого закона он поясняет следующими словами: «Если кто нажимает пальцем на камень, то и палец его также нажимается камнем. Если лошадь тащит камень, привязанный к канату, то и, обратно, она с равным усилием оттягивается к камню, ибо натянутый канат своей упругостью производит одинаковое усилие на лошадь в сторону камня и на камень в сторону лошади... Если какое-нибудь тело, ударившись о другое тело, изменяет его количество движения на сколько-нибудь, то оно само претерпит в своем собственном количестве движения то же самое изменение, но обратно направленное, ибо давления этих тел друг на друга постоянно равны».

Тела действуют друг на друга всегда взаимно; так, Земля притягивает камень с силой его веса, с той же силой и камень действует на Землю. Мы говорим: «камень падает на Землю»; в действительности имеет место встречное движение, но в согласии со вторым законом ускорение Земли несоизмеримо мало: оно во столько же раз меньше ускорения, испытываемого камнем, во сколько раз масса камня меньше массы Земли.

Впадая в ошибку, иногда рассуждают так: если действующая сила всегда вызывает равную по величине, но противоположно направленную силу противодействия, то результирующая сила всегда как будто равна нулю; как же в таком случае под действием силы может произойти изменение движения? Что надо иметь в виду, чтобы не впасть в это противоречие? Только то, что действие есть сила, приложенная к о д н о м у из взаимодействующих тел, а противодействие — сила, приложенная к д р у г о м у телу, и поэтому каждое из тел находится под действием одной силы, которая и вызывает его движение.

Поскольку действие и противодействие всегда направлены в противоположные стороны, очевидно, что два тела вследствие одного только взаимодействия друг с другом не могут прийти в движение оба в одном и том же направлении. Если имеется ускоренное движение совокупности двух каких-либо взаимодействующих друг с другом тел (например, лошади и повозки), то сила, сообщающая этим телам ускорение, есть всегда некоторая внешняя сила, приложенная одновременно к обоим этим телам и порождаемая взаимодействием одного из этих тел или обоих с некоторым третьим телом, относительно которого рассматриваемые тела испытывают ускорение. Так, когда лошадь тянет повозку, когда паровоз движет вагоны, когда один из двух людей, преодолевая сопротивление другого, тащит его за собой,— движущей силой является взаимодействие лошади или человека с почвой, взаимодействие колес паровоза с рельсами (рис. 19), вообще — противодавление опоры (важна горизонтальная составляющая противодавления).

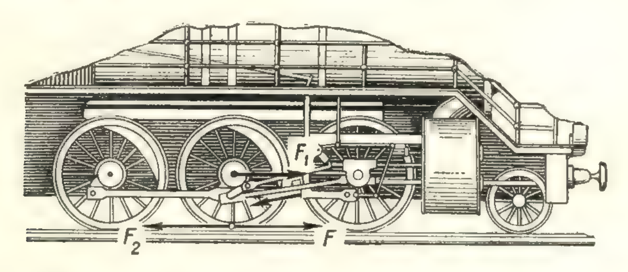


Рис. 19. Трение направлено всегда противоположно относительной скорости скольжения. Пара сил F_1 и F_2 вращает ведущее колесо паровоза и стремится побудить его к скольжению по рельсу. Поэтому сила трения скольжения F, приложенная к бандажу колеса, направлена в сторону движения; она уравновешивает одну из сил вращающей пары — силу F_2. Другая сила пары ($F_1 = F$) движет ось. Трение катания тормозит движение.

Во всех этих случаях имеются два вида взаимодействия с опорой: во-первых, противодавление опоры, во-вторых, трение.

Чтобы противодавление опоры, хотя бы в некоторой своей части, явилось движущей или затормаживающей силой, оно должно быть направлено под острым, а не под прямым углом к поверхности опоры; в упомянутых случаях движения лошади и повозки, движения поезда и т. д. вертикальная составляющая противодавления уравновешивается весом; что же касается горизонтальной составляющей противодавления, то она может существовать, лишь поскольку имеется трение [1]).

---

[1]) Поэтому горизонтальную составляющую противодавления опоры часто называют *ведущим* трением в отличие от *тормозящего* трения.

Если трения нет, то противодавление всегда направлено нормально к поверхности опоры, и поэтому оно не способно ни вызвать, ни затормозить движение тела в направлении, параллельном этой поверхности. На идеально гладкой поверхности человек не в состоянии был бы сделать ни шагу; при гололедице, когда трение мало, лошадь не в состоянии сдвинуть повозку; если бы не было трения между ведущими колесами паровоза и рельсами, паровоз не в состоянии был бы сдвинуть поезд с места.

Чтобы привести себя в движение, необходимо иметь опору, от которой можно было бы оттолкнуться. Так, стоя на плоту, мы приводим плот в движение, отталкиваясь шестом от берега или от дна реки. Всякого рода сопротивление движению может быть использовано как более или менее надежная опора для подобного рода отталкивания. Вода оказывает довольно значительное сопротивление движению погруженных в нее тел, поэтому мы имеем возможность привести лодку в движение, погружая весла в воду и продвигая их в воде в направлении, противоположном тому, куда мы хотим направить лодку. Воздух также оказывает некоторое сопротивление движению, только поэтому и возможен полет птиц и самолетов.

По третьему закону Ньютона действие не может существовать без противодействия, поэтому ни одна машина не способна сама по себе развить силу, приводящую ее в движение; необходимо участие еще по крайней мере одного (внешнего по отношению к машине) тела, противодействие которого приведет машину в движение [1]).

Одновременное возникновение этих двух противоположно направленных сил означает согласно второму закону, что оба взаимодействующие тела испытывают равные, но противоположно направленные изменения количества движения. Так, когда лодка продвигается вперед, то под давлением весел вода движется назад. Поезд, трогающийся с места, дает в обратном направлении толчок рельсам, полотну железной дороги и вместе с ними всему земному шару; понятно, что благодаря большой массе Земли ускорение, приобретаемое ею, ничтожно мало в сравнении с ускорением, которое от этого взаимодействия получает поезд.

Для правильного понимания третьего закона как широкого принципа физики важно обратить внимание на то, что в приведенной выше ньютоновой формулировке этого закона нет указания, направлены ли действие и противодействие по одной прямой; утверждается только, что они направлены в противоположные стороны, т. е. что они антипараллельны.

Третий закон применяют двояко: 1) в качестве закона, определяющего *непосредственное взаимодействие* тел, рассматриваемых как материальные точки, и 2) в качестве закона, определяющего

---

[1]) В случае ракетного двигателя движущей силой является реактивное давление на двигатель, развиваемое выбрасываемыми газами.

результативное взаимодействие тел, осуществляющееся посредством ряда промежуточных тел или среды.

При непосредственном взаимодействии тел, рассматриваемых как материальные точки, действие и противодействие почти всегда направлены по одной прямой, конечно, в разные стороны. Важным исключением является взаимодействие магнитов с токонесущими проводниками, когда действие и противодействие (т. е. действие элемента тока на магнитный полюс и магнитного полюса на ток) по величине равны и направлены в разные стороны, но не по одной прямой, а по двум параллельным прямым.

Что касается результирующего взаимодействия тел, то из-за наличия промежуточных материальных звеньев действие и противодействие направлены, вообще говоря, не по одной прямой, а только антипараллельно.

Если же в передаче сил участвуют массивные тела, служащие «точками опоры», то результативное действие и противодействие в такой, уже не изолированной, системе могут быть не одинаковы по величине и направлены друг по отношению к другу под произвольным углом. Так, при использовании блоков и рычагов сила, которую мы прилагаем, чтобы поднять груз, и сила противодействия тяжести груза оказываются направленными не по одной прямой и благодаря действию точек опоры могут составлять любой угол; например, они могут быть ориентированы в одну сторону по двум параллельным прямым, а для неравноплечих рычагов они, кроме того, оказываются и численно разными. Ньютон в заключительном поучении первого раздела своих «Математических начал натуральной философии» отмечает, что в механизмах и машинах противоположная направленность результативного действия и противодействия для начального и конечного звеньев обнаруживается не в геометрическом направлении этих сил, а в прямо противоположном характере их проявления. Действительно, эффекты, производимые действием и противодействием, всегда противоположны динамически или же энергетически: эти силы или вызывают противоположно направленное движение, или же при совместном движении взаимодействующих тел одна из этих сил производит работу, а другая потребляет работу. Следствием этого, как мы увидим, является общий принцип, определяющий равновесие из условия, что сумма произведений малых возможных перемещений на спроектированные на них векторы действия и противодействия равна нулю (§ 24).

§ 16. Статическое и динамическое проявления сил

В теоретической механике обычно принимают схематизированное представление о силах и о телах, находящихся под действием сил, а именно, считают, что сила приложена или к материальной точке, или к абсолютно твердому телу (под абсолютно твердым телом пони-

мают тело, совершенно несжимаемое и совершенно неизменяемое по форме). При такого рода упрощении единственным проявлением силы является ее динамическое действие, т. е. сообщаемое ею ускорение. Если какое-либо тело не испытывает ускорения, то отсюда заключают, что на это тело не действует сила.

С более широкой физической точки зрения это упрощение не всегда является уместным. Какой-либо груз, лежащий на платформе, находится под действием двух уравновешивающихся на нем сил: силы веса и равного, но обратно направленного противодавления опоры. Вещество груза с ж а т о этими силами, и состояние его отлично от того, которое имелось бы, если бы на груз не действовали никакие силы. Чтобы применить выводы теоретической механики к исследованию существующих внутри тела давлений или натяжений, возникающих в результате уравновешивания на этом теле двух равных, но противоположно направленных сил, надо рассматривать тело как совокупность материальных точек, а для этого необходимо сделать особые гипотезы о строении тела.

Имея в виду только одни абсолютно твердые тела и системы материальных точек, можно придерживаться представления о силе как о произведении массы на ускорение (без учета статического действия силы); однако это представление вносит в механику только чисто математические упрощения; с точки зрения физики им следует пользоваться с некоторой осторожностью.

По ньютонову пониманию, сила может проявляться двояко: *динамически*, сообщая телу ускорение, и *статически*, побуждая тело оказывать давление на другие тела, препятствующие движению рассматриваемого тела. Чтобы пояснить отличие этого понимания силы от того, которое учитывает только динамическое действие, мы рассмотрим с обеих точек зрения несколько простых примеров движений.

Некоторый груз положен на платформу, которую удерживают канатом (рис. 20). К грузу приложена сила его веса P. Когда платформа неподвижна, а также и тогда, когда платформу опускают с постоянной скоростью (без ускорения), вся приложенная к грузу сила веса проявляется статически в давлении, которое груз оказывает на платформу (на этом рисунке, как и на остальных в данном параграфе, извилистая стрелка изображает статическое проявление силы).

Когда канат отпускают так, что платформа падает ускоренно, то сила веса частью проявляется динамически, сообщая грузу ускорение j, остальная ее часть проявляется в статическом давлении груза на платформу: $F_c=P-mj$. Следовательно, в этом случае груз давит на платформу с меньшей силой, чем когда груз опускают равномерно. С точки зрения наблюдателя, удерживающего канат, груз, опускаемый с ускорением, тем более «теряет в весе», чем с бо́льшим ускорением он падает. Если груз падает вместе с плат-

формой «свободно» (т. е. имеет полное ускорение g, которое способна сообщить телу сила тяжести, целиком проявляющаяся динамически), то груз не будет оказывать никакого давления на платформу и канат совершенно не будет натянут.

Рассмотрим тот же пример «несвободного» падения груза иначе. Будем рассуждать так. Сила веса сообщает грузу ускорение g, направленное в н и з; когда канат натянут с силой полной тяжести груза, то давление платформы на груз сообщает грузу ускорение g, направленное в в е р х; геометрическая сумма ускорений, полу-

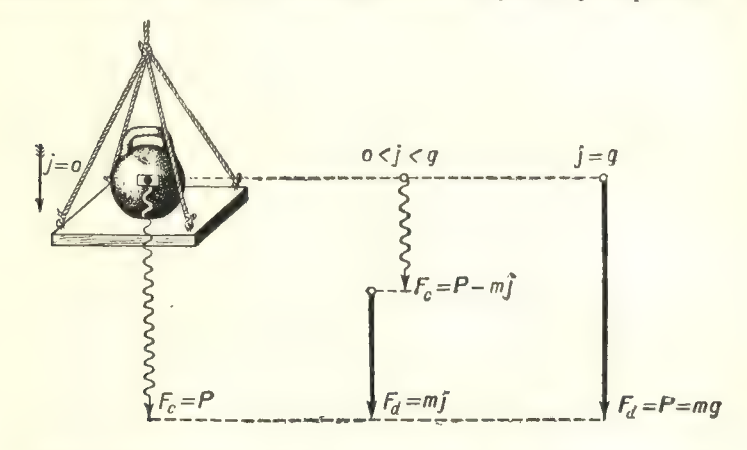


Рис. 20. Статическое (F_c) и динамическое (F_d) проявление веса («потеря веса» при падении с ускорением).

чаемых грузом, равна нулю; следовательно, груз будет неподвижен. Если груз падает с ускорением j вместо g, то это означает, что давлением платформы ему было сообщено ускорение вверх ($g - j$) и, следовательно, натяжение каната равно $P - mj$. Груз будет падать с ускорением g, когда платформа не оказывает на него давления, т. е. когда канат не натянут.

В пределах обычных задач механики обе точки зрения математически равноправны.

При несвободном падении груза статическое проявление веса, т. е. давление груза на платформу, вызывает, по третьему закону, противодавление (*реакцию*) платформы. Когда груз неподвижен, реакция уравновешивает вес. Когда груз падает с некоторым ускорением, реакция платформы уравновешивает ту часть веса груза, которая проявляется статически; остальная часть веса (равная как раз равнодействующей приложенных к телу сил) остается неуравновешенной и сообщает грузу ускорение.

Представим себе, что на совершенно гладкую наклонную плоскость положено некоторое тело. Геометрическая составляющая

веса, перпендикулярная к наклонной плоскости, проявляется статически в давлении, которое тело будет оказывать на плоскость; другая составляющая веса, параллельная направлению плоскости, проявляется динамически: она сообщает телу ускорение (рис. 21). Статическое проявление силы — это геометрическая составляющая

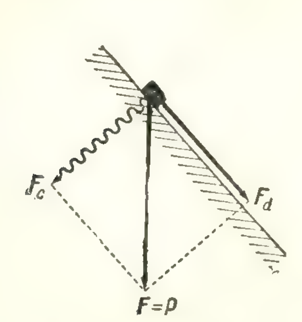


Рис. 21. Статическая и динамическая слагающие силы F.

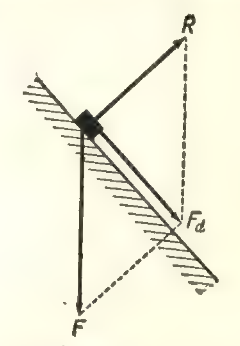


Рис. 22. Движущая сила F_d есть равнодействующая приложенных к телу сил: силы F и реакции опоры R.

силы F, *приложенной к телу*, но вместе с тем это сила, *развиваемая* телом и *приложенная к опоре*; динамическая составляющая приложена только к рассматриваемому телу. Статическое проявление силы вызывает равную по величине, но противоположную по направлению реакцию опоры. Тело будет двигаться под действием равнодействующей двух приложенных к нему сил: веса и реакции (рис. 22), но эта равнодействующая и есть та сила, которую мы обозначили как динамическое проявление тяжести рассматриваемого тела.

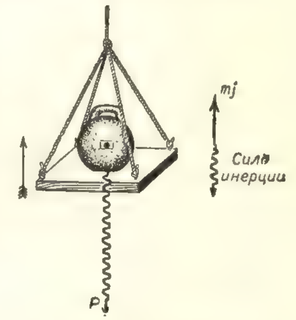


Рис. 23. «Увеличение веса» при поднятии с ускорением происходит за счет развиваемой телом силы инерции.

§ 17. Силы инерции. Центробежная сила

Чаще всего силы инерции проявляются статически в давлении, которое какое-либо тело, развивающее силу инерции, оказывает на другое тело, повинное в изменении состояния движения первого тела. Груз, ускоренно поднимаемый кверху, оказывает на платформу вследствие силы инерции дополнительное давление (рис. 23). Наблюдателю, тянущему канат, кажется, что груз тем более «увеличивается в весе», чем с бо́льшим ускорением его поднимают.

Когда давление или натяжение со стороны каких-либо тел вынуждает некоторое движущееся тело отклоняться от прямолинейного пути, мы говорим, что *отклоняющееся от прямолинейного пути тело развивает центробежную силу инерции*, направленную противоположно центростремительной силе, с которою тела, вызвавшие искривление траектории, давят на движущееся тело или тянут его. По закону равенства действия и противодействия эти две силы численно всегда одинаковы, поэтому центробежная сила определяется формулой

$$F_r = \frac{mv^2}{R},$$

или, что то же:

$$F_r = m\omega^2 R. \qquad (16)$$

Центростремительная сила направлена всегда к центру кривизны и приложена к движущемуся телу; центробежная сила равна центростремительной по величине, но направлена в противоположную сторону, т. е. от центра кривизны в сторону выпуклости траектории, и *приложена к телам, вызывающим искривление траектории движущегося тела.*

Массивный шар, подвешенный на прочной нити, натягивает ее при покое с силой тяжести шара P, но, будучи приведен в колебание, он натягивает ее с силой F, большей, чем его тяжесть, на величину развиваемой им центробежной силы инерции:

$$F = P + \frac{mv^2}{r}.$$

Автомобиль, проезжающий по мосту, несколько прогибающемуся под его тяжестью, давит на мост с силой, превышающей вес автомобиля на величину центробежной силы инерции. Поэтому при прочих равных условиях давление автомобиля на вогнутый мост будет тем более велико, чем больше скорость движения автомобиля. Чтобы избежать действия центробежных сил, мосты делают обычно несколько выпуклыми (рис. 24). В этом случае вес быстро движущихся по мосту машин частью проявляется динамически, сообщая им центростремительное ускорение, направленное вниз; поэтому давление на выпуклый мост быстро проезжающих по нему машин будет меньше их веса.

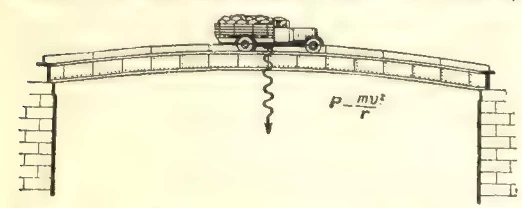


Рис. 24. Проезжая по выпуклому мосту, автомобиль давит на мост с силой, меньшей своего веса.

На закруглениях пути колеса вагонов поезда или трамвая оказывают на внешний рельс горизонтальное давление вследствие разви-

ваемой вагоном центробежной силы инерции. Чтобы не происходило опрокидывания вагона, равнодействующая давления, создаваемого весом вагона, и центробежной силы должна быть направлена между рельсами перпендикулярно к поверхности рельса; для этого на закруглениях внешний рельс прокладывают несколько выше внутреннего (рис. 25).

По аналогичным причинам конькобежец, описывая окружность, наклоняет свой корпус к центру окружности (рис. 26). Отметим еще раз, что на рис. 25 и 26, как это вообще принято в данном курсе, волнистыми стрелками показаны статические проявления сил (в первом случае — сил, приложенных к рельсу, во втором — ко льду). На рис. 26, кроме того, показано, *как реакция опоры и вес* конькобежца *обеспечивают в сумме центростремительную силу*, которая приложена к центру инерции конькобежца и проявляется динамически в центростремительном ускорении при движении конькобежца по дуге окружности. Точно таким же построением можно было бы дополнить и рис. 25. Центростремительное ускорение, обеспечивающее движение вагона по закруглению пути, при правильном подъеме наружного рельса (как и в случае, изображенном на рис. 26) создается за счет геометрической суммы реакции рельсов и веса вагона. Наклон полотна хотя и не устраняет горизонтальной составляющей давления колес на рельсы, но снижает (при правильном угле наклона — до нуля) боковое давление бандажей, параллельное плоскости шпал. Если бы наружный рельс не был приподнят и, таким образом, на закруглениях вагон двигался бы строго вертикально, то, кроме тенденции к опрокидыванию, развивались бы большие силы, смещающие крепление рельсов к шпалам; в этом случае центростремительная сила на закруглениях пути создавалась бы за счет указанных сил, стремящихся оторвать наружный рельс, тогда как при правильном наклоне полотна никаких смещающих сил в плоскости полотна нет, так как итоговое давление на рельсы перпендикулярно к этой плоскости.

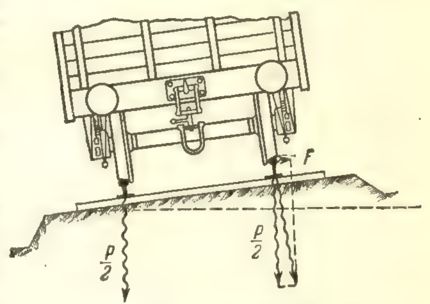


Рис. 25. На закруглениях внешний рельс укладывают выше внутреннего.

В случаях, подобных представленному на рис. 26, центростремительная сила приложена к центру тяжести движущегося тела, а точки приложения центробежной силы определяются геометрическими условиями соприкосновения движущегося тела с телом, к которому приложена центробежная сила и противодействие которого обеспечивает кривизну траектории; поэтому указанные

численно равные силы хотя и направлены, как действие и противодействие, антипараллельно, но не по одной прямой.

Вещество вращающегося твердого тела находится в напряженном состоянии, так как каждая частица вращающегося тела развивает центробежную силу инерции, приложенную к смежным частицам тела, препятствующим рассматриваемой частице удалиться от оси вращения. Силы инерции, направленные по радиусу от центра, стремятся оторвать внешние слои вещества от внутренних.

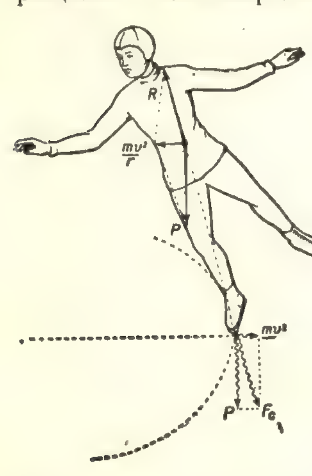
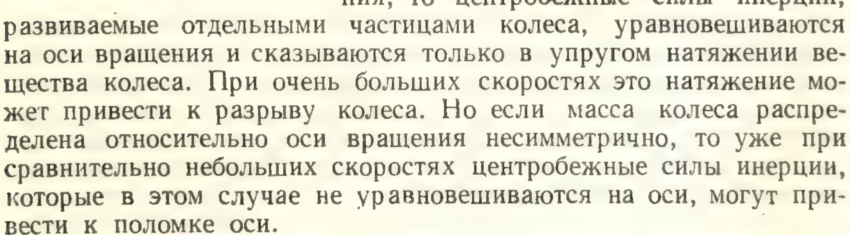


Рис. 26. Описывая дугу окружности, конькобежец наклоняет свой корпус так, чтобы реакция R льда проходила через центр тяжести тела; тогда равнодействующая реакции R и веса P дает центростремительную силу.

Если прочность вещества недостаточна, то при большой скорости вращения центробежные силы инерции разрушают тело, разрывая его на части. Во избежание подобных аварий все быстро вращающиеся части машин (роторы) и быстроходные маховики изготовляют из наиболее прочных металлов (обычно из стали).

О величине центробежных сил инерции во вращающихся частях машин можно судить по следующему примеру. Ротор одного из гирокомпасов при диаметре 12 *см* и весе 2,5 *кг* делает 20 000 об/мин. Центробежная сила, развиваемая на его ободе какой-либо массой, в 25 тысяч раз превышает вес этой массы.

Силы инерции часто оказывают разрушительное действие на отдельные части машин. Когда колесо насажено на ось так, что вся масса его распределена симметрично относительно оси вращения, то центробежные силы инерции,



развиваемые отдельными частицами колеса, уравновешиваются на оси вращения и сказываются только в упругом натяжении вещества колеса. При очень больших скоростях это натяжение может привести к разрыву колеса. Но если масса колеса распределена относительно оси вращения несимметрично, то уже при сравнительно небольших скоростях центробежные силы инерции, которые в этом случае не уравновешиваются на оси, могут привести к поломке оси.

У колес паровоза несимметричное распределение сил инерции способно создать одностороннее давление на ось в несколько тонн; в связи с этим при вращении такого колеса давление колеса на рельс то возрастает (когда результирующая неуравновешенных центробежных сил направлена вниз), то убывает (когда она направлена вверх) — рельс как бы находится под действием ударов тяжелого молота.

При проектировании какой-либо новой машины производят детальный расчет сил инерции, которые могут возникнуть в ней при различных условиях ее работы. С проявлением неуравновешенных сил инерции приходится вести борьбу посредством точного распределения масс и согласования движений отдельных частей машины.

Но силы инерции, в частности центробежные силы, имеют в технике также и положительное применение, весьма обширное и разнообразное (работа молотов, центробежные машины, центрифуги и т.д.).

Заметим, что термин «центробежная сила» не вполне удачен; он наталкивает на неправильное понимание этой силы. Термин «центробежная сила» побуждает думать о движении от центра вращения по радиусу. Хотя центробежная сила и действует по радиусу от центра, но *никакого движения в этом направлении она не вызывает и не способна вызвать* потому, что она *приложена к связям* [1]). Если связи, удерживавшие тело на неизменном расстоянии от центра, вдруг устранены (например, разорвалась веревка, к которой привязан камень, вращаемый нами по окружности), то двигавшееся по окружности тело будет удаляться от центра окружности, конечно, не по радиусу, а по касательной к окружности, так как оно по инерции сохранит то направление скорости, которое имело в момент разрыва связей.

[1]) Под связями в механике подразумевают существующие ограничения в свободе движения рассматриваемых тел. Например, по отношению к ободу колеса спицы играют роль связей, для поезда в целом роль связей исполняют рельсы, и т. д.

ГЛАВА III

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

§ 18. Работа, энергия, мощность. Элемент и интеграл работы

Представление о работе, как и о силах, заимствовано из нашего повседневного опыта. Но в обыденной жизни мы вкладываем в слова «работа», «энергия», «сила» более широкий и менее определенный смысл, чем в физике. В физике между величинами силы, работы и энергии установлена связь:

Работу измеряют произведением силы, действующей на тело в направлении перемещения, на величину перемещения точки приложения силы.

Энергию измеряют работой, которую может произвести тело.

Силы и работа проявляются при преобразовании движения. С количественной стороны преобразование движения характеризуется импульсом силы и работой силы, а именно:

Изменение *количества движения* определяется, как было пояснено выше, импульсом силы, т. е. произведением силы на время действия силы.

Изменение *энергии движения* определяется работой силы, т. е. произведением силы на путь, пройденный в направлении силы.

Мощностью P называют отношение работы к тому промежутку времени, в течение которого она была произведена. Стало быть, если работа производится равномерно, т. е. в одинаковом количестве за равные промежутки времени, то мощность измеряется работой, произведенной за 1 сек. Когда сила, оставаясь постоянной, идет на преодоление сопротивления движению и когда в связи с этим скорость движения v тоже остается постоянной, то $P = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot l}{t} = F \cdot v$.

Таким образом, при постоянстве силы произведение силы на время определяет количество движения, произведение силы на путь определяет энергию движения, а произведение силы на скорость определяет мощность движения [1]).

---

[1]) Сопротивление воздуха движению самолета, сопротивление воды движению корабля оказываются пропорциональными квадрату скорости. Поэтому мощности самолетных и судовых двигателей при прочих одинаковых условиях должны быть пропорциональны кубу скорости. Если пароход при двигателе мощностью в 100 *л. с.* развивал скорость хода 15 *км/час*, то для повышения скорости хода до 30 *км/час* потребуется двигатель в 800 *л. с.*

В механике различают энергии кинетическую и потенциальную. Под *кинетической* энергией понимают энергию механического движения тела, измеряемую работой, которую тело способно произвести при затормаживании тела до полной остановки. Под *потенциальной* энергией понимают энергию скрытых форм движения, измеряемую работой, которую тело способно произвести, когда его перемещают без изменения скорости из одного положения в пространстве в другое положение (например, потенциальная энергия тяжести) или когда тело восстанавливает свою форму (потенциальная энергия упруго деформированного тела).

Каждая физическая форма движения характеризуется тем или иным видом энергии. Когда мы изучаем тепловое движение, то имеем дело с *внутренней* энергией. В учении об электричестве и магнетизме мы сталкиваемся с *электрической* энергией и с *магнитной* энергией.

Во времена Ньютона точного представления об энергии не существовало. Оно было установлено в середине прошлого столетия, когда опытным путем была доказана эквивалентность теплоты и работы, т. е. их взаимная превращаемость с сохранением неизменной пропорции между количеством затраченной работы и полученного тепла. В настоящее время представление об энергии является в физике основным, и физика в значительной своей части является учением о законах взаимопревращений различных видов энергии.

Энергия, так же как и масса, неуничтожаема и несозидаема. Этот закон сохранения энергии главенствует над всеми законами физики. Для обширного класса механических движений этот закон может быть выведен из законов Ньютона, но в своем всеобъемлющем смысле он принят физикой как независимый от законов Ньютона, установленный опытом принцип.

Процессы работы и теплопередачи следует рассматривать как формы передачи энергии от одного тела к другому.

Энергия представляет собой «запас» возможной, но еще не осуществившейся работы; в отличие от этого понятие работы связано с представлением о *процессе* перемещения точки приложения силы [1]). Когда какое-либо тело производит работу, то энергия этого тела уменьшается; при этом всегда существует какое-либо другое тело, на которое затрачивается (направлена) работа первого тела и энергия которого поэтому возрастает. «Работа — это изменение формы движения, рассматриваемое с его количественной стороны» [2]).

---

[1]) Для вопросов, изучаемых механикой, вышеприведенное определение понятия энергии является достаточным. Однако, переходя от изучения механического движения к изучению других форм движения, определение понятия энергии, как указывает термодинамика, нужно расширить: энергия измеряется суммой работы и тепла, которые могут быть отданы телом: $U = A + Q$.

[2]) Энгельс, Диалектика природы, 1949, стр. 70.

Затронутые здесь вопросы подробнее будут рассмотрены в главе, посвященной изложению термодинамики.

По приведенному выше определению, работа A, производимая силой F, направленной под углом α к перемещению, на пути l равна

$$A = F\cos\alpha \cdot l. \qquad (1)$$

Сила, направленная перпендикулярно к перемещению ($\alpha = 90°$, $\cos\alpha = 0$), не производит работы; с этой точки зрения разложение силы на тангенциальную и центростремительную составляющие приобретает особый физический смысл; действие центростремительной силы сказывается только в изменении направления движения, тогда как тангенциальная сила производит работу, что сказывается или в увеличении скорости движения, или же в преодолении сил сопротивления или трения.

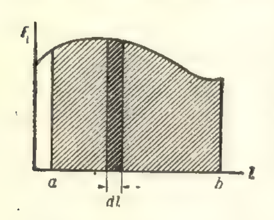


Рис. 27. Силовая диаграмма. Элемент работы — узкая, густо заштрихованная полоса; интеграл работы—вся заштрихованная площадь

Работу постоянной силы, действующей в направлении перемещения или же под неизменным углом к перемещению, можно изобразить площадью прямоугольника, одной стороной которого является длина пути, а другой — величина проекции силы на путь. Если по мере перемещения точки приложения силы величина силы или угол, составляемый силой с направлением перемещения, изменяются, то графически работу можно вычислить, как показано на рис. 27. Здесь по оси абсцисс отложена длина пути l, а по оси ординат — величина проекции силы $\boldsymbol{F}$ на направление перемещения. Для бесконечно малой длины пути dl *элемент работы* δA выражается, по определению, формулой

$$\delta A = F \cdot \cos(\boldsymbol{F}, \ d\boldsymbol{l}) \cdot dl, \qquad (2)$$

или

$$\delta A = F_l \cdot dl.$$

На рис. 27 δA изобразится бесконечно узкой вертикальной полоской шириной dl и высотой F_l. Вся работа на пути l графически выразится площадью под кривой $F_l = f(l)$; на рисунке эта площадь заштрихована. Сумму бесконечно малых величин такого рода $\sum f(l) \cdot dl$ в анализе называют *интегралом* [1]) и обозначают знаком $\int$, заменяя

[1]) Понятие об интеграле устанавливается следующим образом. Предположим, что нам даны функция $f(x)$ и два значения переменной x: $x = a$ и $x = b$, и пусть $a < b$. Между a и b произвольно разместим $n - 1$ точек: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; получим последовательность точек

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

этим символом знак $\sum$. Поэтому аналитически работа переменной силы может быть выражена формулой

$$A = \int_a^b F_l \cdot dl. \qquad (3)$$

Силу $\boldsymbol{F}$ можно рассматривать как геометрическую сумму трех векторов, направленных по координатным осям. Алгебраические величины этих векторов (компоненты силы $\boldsymbol{F}$) обозначим через X, Y, Z. Следовательно, работа силы $\boldsymbol{F}$ на перемещении $d\boldsymbol{s}$ должна быть равна сумме работ компонентов силы при том же перемещении $d\boldsymbol{s}$. Это позволяет применить для вычисления элемента работы наряду с формулой (2) еще такую формулу:

$$\delta A = X\cos(\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{s})\cdot ds + Y\cos(\boldsymbol{y},\ d\boldsymbol{s})\cdot ds + Z\cos(\boldsymbol{z},\ d\boldsymbol{s})\cdot ds. \qquad (4)$$

Здесь множители при компонентах силы представляют собой не что иное, как проекции элементарного перемещения $d\boldsymbol{s}$ на оси координат: $ds\cdot\cos(\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{s}) = dx$ и т. д. Следовательно,

$$\delta A = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \qquad (5)$$

Суммарная работа выразится интегралом

$$A = \int_a^b (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \qquad (6)$$

§ 19. Кинетическая энергия и потенциальная энергия

Кинетическая энергия тела измеряется работой, которую тело может произвести благодаря инерции при затормаживании тела до остановки. Вычислим эту работу.

Сила инерции, развиваемая движущимся телом при торможении, производит работу, идущую на преодоление сопротивлений движе-

---

В каждом из образовавшихся промежутков (x_{k-1}, x_k) выберем точку ξ_k и составим сумму $S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

В анализе доказывается, что при некоторых предположениях, налагаемых на функцию $f(x)$, эти суммы стремятся к вполне определенному пределу, если только длина наибольшего из частичных промежутков стремится к нулю, и что предел этот не зависит ни от того, как выбраны точки ξ_k в промежутках (x_{k-1}, x_k), ни от того, каким образом мы разбиваем промежуток (a, b) на частичные промежутки. Этот предел называется определенным интегралом от a до b функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

нию. Сила инерции действует по направлению движения ($\cos\alpha=1$) и численно равна $-m\frac{dv}{dt}$. В течение бесконечно малого промежутка времени, когда затормаживаемое тело, преодолевая сопротивления движению, перемещается на расстояние ds, развиваемая телом сила инерции производит работу

$$\delta A = -m\frac{dv}{dt}\cdot ds,$$

или (делаем такое преобразование: $\frac{dv}{dt}\cdot ds = dv\frac{ds}{dt} = dv\cdot v$)

$$\delta A = -mv\cdot dv.$$

Здесь в правой части стоит знак минус, но δA есть величина положительная, так как при затормаживании $dv<0$. Кинетическая энергия тела, движущегося со скоростью v, представляет собой сумму работ, производимых силой инерции при затормаживании тела до полной остановки (т. е. в течение того промежутка времени, пока скорость тела убывает от значения v до нуля). Величину этой суммы мы определим графически [1]).

Будем изображать численное значение скорости длиной отрезка, отложенного по оси OX, а также длиной такого же отрезка, отложенного в направлении другой оси OY (рис. 28). Очевидно, что численное значение произведения $v\cdot dv$ изобразится площадью весьма малой вертикальной полоски, имеющей высоту v и ширину dv (будем представлять себе величину dv как положительную, тогда в формуле для δA знак минус должен быть изменен на плюс: $\delta A = mv\cdot dv$).

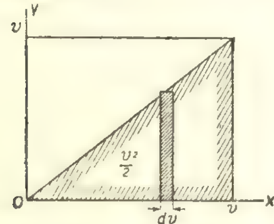


Рис. 28. К вычислению кинетической энергии.

Для различных моментов времени скорость v затормаживаемого тела будет иметь различную величину, а также различную величину будет иметь численное изменение скорости dv, происходящее в некоторый определенный промежуток времени dt. Поэтому и работа силы инерции за один и тот же промежуток времени в различные моменты времени будет неодинаковой (на нашей диаграмме изображающие произведение $v\cdot dv$ площадки будут иметь различную вы-

[1]) Применением интегрального исчисления эта сумма находится сразу:

$$E_{кин} = \sum \delta A = -\int_v^0 mv\,dv = \frac{mv^2}{2}.$$

соту и неодинаковую ширину). Суммируя работу, произведенную силой инерции за все время затормаживания, мы можем вынести за скобку величину массы m, которая входит в выражение каждой элементарной работы. Что же касается суммы произведений $v \cdot dv$, то нетрудно сообразить, что она изобразится на нашей диаграмме общей площадью всех отдельных площадок, подобных той, которая заштрихована на рис. 28; она будет равна, следовательно, $\frac{v^2}{2}$. Таким образом, мы вывели теорему о кинетической энергии.

Работа, которую движущееся тело способно произвести при его затормаживании, не зависит ни от траектории движения, ни от того, как (с какой быстротой и каким образом) производилось затормаживание. Работа эта — кинетическая энергия тела — равна половине произведения массы на квадрат скорости[1]):

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}. \tag{7}$$

По самому ходу приведенного выше рассуждения ясно, что *кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий тел (или материальных точек), составляющих систему*:

$$E_{\text{кин}} = \sum \frac{mv^2}{2}. \tag{8}$$

Потенциальная энергия измеряется работой, которую тело способно совершить при перемещении из исходного положения в какое-либо другое положение. Следовательно, потенциальная энергия только тогда имеет определенный физический смысл, когда указаны два сопоставляемых друг с другом положения тела.

Из начального курса физики известно, что потенциальная энергия тяжести измеряется произведением веса тела на высоту поднятия: $U = Ph$. Если в какой-либо местности, расположенной на высоте 10 *м* над уровнем моря, мы поднимем некоторое тело на высоту 1 *м* над поверхностью земли, то по отношению к уровню моря потенциальная энергия тяжести его будет, как легко сообразить, в 11 раз больше, чем по отношению к поверхности земли в данной местности. Потенциальная энергия того же тела по отношению к вершине какой-либо горы, очевидно, представит собой величину отрицательную (от перемещения тела вверх работа не может быть получена, но, напротив, на это перемещение она должна быть затрачена).

---

[1]) Представление о кинетической энергии введено Лейбницем (1686), который применил термин «живая сила» для произведения mv^2. Позже, по предложению Кориолиса, живой силой стали называть величину $\frac{1}{2} mv^2$.

В физике принято потенциальную энергию рассматривать по отношению к тому положению взаимодействующих тел, когда эти тела бесконечно удалены друг от друга. При таком рассмотрении потенциальная энергия взаимного притяжения двух каких-либо (или же многих) тел всегда представляет собой величину отрицательную, так как переход от какого-либо заданного расположения тел к тому, когда они бесконечно удалены друг от друга, не дает работы, но, напротив, требует для своего осуществления затраты работы по преодолению действующих между телами сил притяжения. В противоположность этому потенциальная энергия отталкивания представляет собой величину положительную.

Зная закон взаимодействия тел, т. е. зная, как изменяется с расстоянием сила их взаимодействия, всегда можно вычислить для любого заданного расположения тел их потенциальную энергию (для этого, как уже было пояснено, надо подсчитать работу, производимую силами взаимодействия при удалении рассматриваемых тел из занимаемых ими положений на бесконечно большое расстояние друг от друга). В последующем нам придется неоднократно проделывать такие вычисления.

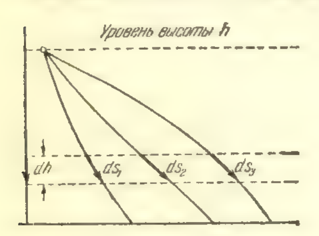


Рис. 29. Проекции элементарных перемещений ds_1, ds_2, ds_3 на вертикальное направление равны dh.

Работу сил взаимодействия можно отождествлять с потенциальной энергией только в тех случаях, когда работа, производимая силами взаимодействия, не зависит от вида траекторий, по которым взаимодействующие тела перемещаются из начального расположения в конечное расположение. Нужно, чтобы работа однозначно определялась начальным и конечным расположениями тела. Иначе говоря, *работа должна быть одинакова для всех путей перемещения* тел из начального в конечное расположение.

Например, работа силы тяжести не зависит от пути перемещения. Действительно, если P есть вес тела, то по формуле (3) работа тяжести при перемещении с уровня 1 на уровень 2 равна:

$$A = \int_1^2 P \cdot \cos\alpha \cdot ds,$$

где α — угол, образуемый элементарным перемещением ds с вертикалью. Обозначим высоту тела над уровнем моря через h. Очевидно, что $ds \cdot \cos\alpha = dh$ (рис. 29). Далее, считая, что сила тяжести неизменна (для не слишком больших высот подъема), мы можем вынести P как общий множитель при всех слагаемых за знак интеграла. Тогда под знаком интеграла останется бесконечно малое приращение высоты dh, наблюдаемое при перемещении тела ds по какой угодно

траектории. Очевидно, что алгебраическая сумма всех этих бесконечно малых изменений высоты, $\int dh$, по какой бы траектории мы ни перемещали тело от уровня моря до высоты h, всегда будет равна h:

$$U_2 - U_1 = A = P \cdot h.$$

Стало быть, работа силы тяжести действительно не зависит от пути перемещения.

Под потенциальной энергией понимают «запас» работы, которая может быть произведена системой за счет изменения положения тел системы. Следовательно, по мере того как система *производит* работу A, ее потенциальная энергия U *убывает*. Поэтому

$$dA = -dU. \qquad (9)$$

§ 20. Системы мер и размерность механических величин

Для измерения масс и сил часто пользуются единицами, имеющими одинаковое название: например, килограммом для массы в 1 *кг* и для силы в 1 *кГ*. Применение одного термина для обозначения двух различных единиц — единицы массы и единицы силы — приводит к большой путанице. Чтобы обезопасить себя от ошибок, в которые легко впасть вследствие двойственного смысла термина «килограмм» (а также и «грамм»), нужно помнить, что системы мер механических величин установлены так, что коэффициент пропорциональности в уравнении второго закона $F = Cmj$ при пользовании любой системой мер равен единице, $C = 1$.

Абсолютная система единиц. В физике принято измерять длины в сантиметрах (*см*), время — в секундах (сек.) и массы — в граммах (*г*). Эту систему называют *абсолютной системой единиц*, или системой *CGS* [1]). Термин «абсолютная» весьма неудачен, так как эта система единиц установлена путем соглашения, причем избранные единицы вовсе не представляют каких-либо величин, выбор которых был бы подсказан их особой физической ролью.

В системе *CGS* единицей скорости служит 1 *см/сек*, единицей ускорения служит 1 *см/сек*^{2}. Положив в вышеприведенной формуле $C = 1$, мы видим, что в *системе CGS единицей силы должна служить такая сила, под действием которой масса в* 1 *г приобретает ускорение в* 1 *см/сек*^{2}. Этой силе присвоено название *дина*.

Масса в 1 *г* под действием силы в одну дину приобретает ускорение только 1 *см/сек*^{2}. Очевидно, что сила тяжести, приложенная к каждому грамму массы, во сколько раз больше одной дины, во сколько раз ускорение g, вызываемое силой тяжести, больше 1 *см/сек*^{2}. Следовательно, *вес* 1 *г массы на высоте уровня моря и на широте* 45° *равен* 980,665 *дины*. Там же вес массы в 1 *кг* равен 980 665 динам, т. е. почти миллиону дин. Силу, равную весу 1 *кг*

---

[1]) Система сантиметр — грамм — секунда.

массы на высоте уровня моря и на широте 45°, обозначают: 1 *кГ*. Мы видим, что 1 *кГ*=980 665 динам. Вообще

$$\text{вес } P, \text{ выраженный в динах}, = g \text{ (в } см/сек^2) \cdot m \text{ (в } г).$$

Техническая система единиц. В технике часто измеряют длины — в метрах, время — в секундах, а за единицу силы принимают 1 *кГ* (килограмм-силу) — это так называемая *техническая система мер*, или, как ее кратко обозначают, *MkGS* [1]). В ней единицей скорости является 1 *м/сек*, единицей ускорения 1 $м/сек^2$.

Чтобы во втором законе механики коэффициент пропорциональности C был равен единице, очевидно, *необходимо, применяя техническую систему мер, считать единицей массы такую массу, которая под действием силы в* 1 *кГ приобретает ускорение* 1 $м/сек^2$. Вообразим, что на идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит тело, имеющее массу 1 *кг*. Если на это тело мы будем действовать в горизонтальном направлении (например, толкать его) с силой в 1 *кГ*, т. е. с силой, равной весу тела, то это тело будет скользить по горизонтальной поверхности с таким же численно ускорением, которое оно имело бы, падая под действием силы тяжести, т. е. с ускорением 9,8 $м/сек^2$. Чтобы под действием силы в 1 *кГ* тело приобретало ускорение, равное только 1 $м/сек^2$, тело должно быть более массивным, а именно оно должно иметь массу 9,8 *кг*. Стало быть,

$$\text{масса } m, \text{ выраженная в технических единицах}, = \frac{P \text{ (в } кГ)}{g \text{ (в } м/сек^2)}.$$

Применяя абсолютную систему мер, мы должны выражать энергию в эргах: *эрг — это работа, производимая силой в 1 дину на пути в* 1 *см*. Так, потенциальная энергия тела, весящего 1 *кГ*, на каждый метр подъема составляет $0{,}98 \cdot 10^6 \cdot 100 = 9{,}8 \cdot 10^7$ эргов = 9,8 джоуля (так как, по определению, джоуль — это 10 млн. эргов). В технической системе мер та же самая величина выражается просто одним *килограммометром* (сокращенно *кГм*):

$$1 \; кГм = 9{,}8 \text{ джоуля}.$$

Пользование абсолютной системой мер имеет то неудобство, что приходится силы, которые по условию задачи часто бывают заданы в килограммах, выражать обязательно в динах. Пользование технической системой мер сопряжено с другим неудобством: приходится массу выражать в технических единицах массы.

Если расчет вести в *абсолютной* системе мер, то формулы для потенциальной энергии тяжести и кинетической энергии удобно записывать, не пользуясь обозначением веса:

$$U = mgh, \quad E = \frac{mv^2}{2};$$

[1]) Система метр — килограмм (сила) — секунда.

подразумевается, что масса m выражена в граммах, g — в *см/сек*², h — в сантиметрах, v — в *см/сек*; величины U и E получаются выраженными в эргах.

Если же вести расчет в *технической* системе мер, то формулы для потенциальной и кинетической энергии удобнее писать, не пользуясь символом массы:

$$U = Ph, \quad E = \frac{Pv^2}{2g};$$

подразумевается, что вес P выражен в *кГ*, h — в *м*, g — в *м/сек*² и v — в *м/сек*; величины U и E получаются выраженными в килограммометрах.

Например, кинетическая энергия массы в 2 *кг*, движущейся со скоростью 1 *м/сек*, в абсолютных единицах: $E = \frac{2000 \cdot 100^2}{2} = 10^7$ эргов = 1 джоулю, а в технических единицах $E = \frac{2 \cdot 1^2}{9{,}8 \cdot 2} = \frac{1}{9{,}8}$ *кГм*.

Система единиц *МКС*. В технических расчетах и в особенности в электротехнике часто пользуются системой единиц метр — килограмм (масса) — секунда. В этом случае единицей силы служит сила, сообщающая массе в 1 *кг* ускорение в 1 *м/сек*². Такую силу называют *ньютон* (сокращенное обозначение *н*). Так как под действием силы тяжести 1 *кг* массы приобретает ускорение 9,80665 *м/сек*², то очевидно, что сила в 1 ньютон в 9,80665 раз меньше силы в 1 *кГ*, которая равна 980 665 динам. Следовательно,

$$1 \text{ ньютон} = 10^5 \text{ дин.}$$

Единицей работы и энергии в системе *МКС* служит работа силы в 1 ньютон на пути в 1 метр, равная, как легко видеть, 10^7 эргам, т. е. 1 джоулю.

Единицей мощности во всех системах мер является мощность, равная единице энергии в 1 сек., а именно: в абсолютной системе — 1 *эрг* в 1 сек., в технической системе — 1 килограммометр в 1 сек. и в системе *МКС* — 1 джоуль в 1 сек. (эта последняя единица мощности носит название *ватт*, сокращенно *вт*). Наряду с указанными единицами мощности применяют также *лошадиную силу*:

$$1 \text{ л. с.} = 75 \text{ кГм/сек} = 0{,}736 \text{ квт.}$$

Размерность механических величин. Под размерностью какой-либо величины понимают форму зависимости единицы, служащей для измерения этой величины, от основных единиц измерения. Иначе говоря, размерность физической величины указывает, как изменяется число, выражающее результат измерения данной физической величины, при изменении масштабов применяемых единиц. Так, если в n раз увеличить единицу длины, то объем, который должен теперь считаться единицей объема, будет в n^3 раз больше прежней

единицы объема; в этом смысле говорят, что объем имеет размерность куба длины. Если в n раз увеличить единицу длины и в m раз увеличить единицу времени, то скорость, которую теперь нужно будет считать единицей скорости, будет в $\frac{n}{m}$ раз больше прежней единицы скорости; желая кратко выразить этот факт, говорят, что скорость имеет размерность отношения длины ко времени.

Размерность величин записывают двумя способами.

По первому способу (запись наименованиями) размерность какой-либо величины пишут, указывая наименования основных единиц измерения; например, размерность скорости — *см/сек*.

По второму способу (запись символами) размерность какой-либо величины записывают посредством условного обозначения основных единиц измерения. Часто пользуются такими символами: единица длины L, единица времени T, единица массы M. Тогда размерность скорости есть $\frac{L}{T}$, или, что то же, LT^{-1} («отношение длины ко времени»). Чтобы символы размерности величин не путать с обозначениями самих величин, принято символическую запись размерности заключать в квадратные скобки, например размерность ускорения $[LT^{-2}]$. Записью размерности удобно пользоваться для проверки формул: *размерность всех членов формул всегда должна быть одинаковой*, так как складывать или вычитать и приравнивать можно только числа одинаковых наименований.

ГЛАВА IV

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

§ 21. Механическая система. Внутренние и внешние силы. Центр масс

Совокупность материальных точек (или тел, которые по условию задачи оказалось возможным рассматривать как материальные точки) называют *механической системой*, или *системой материальных точек.*

На материальные точки или тела механической системы действуют силы двоякого происхождения. Во-первых, всякое тело взаимодействует с другими телами системы (вагон — с другими вагонами, Солнце — с планетами, части машины — между собой); силы такого взаимодействия называют *внутренними* силами системы. Во-вторых, тела (материальные точки) механической системы испытывают силы воздействия со стороны посторонних, не входящих в данную систему тел; такие силы называют *внешними.* Для поезда таковыми являются: сила тяжести, «ведущее трение», тормозящее трение, сопротивление воздуха.

Понятия «внутренние» и «внешние» силы относительны. Так, силы взаимодействия между атомами, образующими молекулу, являются внешними по отношению к каждому из этих атомов как к отдельной системе, но эти силы становятся внутренними, когда всю молекулу мы рассматриваем как единую систему.

По третьему закону, если какое-либо тело A действует на тело B с некоторой силой, то и тело B действует на тело A с равной, но обратно направленной силой; поэтому *все* внутренние силы механической системы попарно равны и противоположны. В поезде сила, с которой каждый вагон тянет следующий, равна силе, с которой тот его задерживает. Если мы сложим геометрически все внутренние силы, приложенные ко всем телам какой-либо системы, то силы взаимодействия каждых двух ее тел дадут в сумме нуль, а потому *геометрическая сумма внутренних сил всякой механической системы равна нулю.*

Геометрически суммируя внешние силы, действующие на какую-либо механическую систему, мы не должны включать в эту сумму силы противодействия, так как они приложены к телам, не входя-

щим в состав системы. Поэтому сумма действующих на систему внешних сил в общем случае не равна нулю.

В § 12 уже была речь о векторе количества движения тела. *Под количеством движения механической системы понимают геометрическую сумму количеств движения всех входящих в систему тел.*

Возможен случай, когда все тела системы находятся в движении, но общее количество движения системы равно нулю. Примером такого рода служит вращение маховика вокруг неподвижной оси (рис. 30); любые две частицы маховика, симметрично расположенные относительно оси вращения, движутся в противоположные стороны, и поэтому геометрическая сумма их количеств движения равна нулю; если вся масса маховика распределена симметрично относительно оси вращения, то, геометрически складывая количества движения всех частиц маховика, мы в итоге получим нуль. Физически это означает, что маховик как целое не перемещается; если бы он катился наподобие колеса, количество его движения не было бы равно нулю.

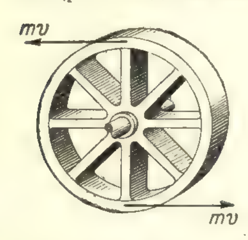


Рис. 30. Общее количество движения при вращении маховика вокруг неподвижной оси равно нулю.

Движение каждого отдельного тела механической системы определяется совокупностью всех действующих на него сил, как внешних, так и внутренних. Но на движение системы в целом влияют, как мы увидим далее, только внешние силы. Что следует понимать под «движением системы в целом»? Под этим понимают перемещение «центра масс» системы.

Из начального курса физики известно понятие о *центре тяжести* тела. Когда говорят, что центр тяжести шара находится в его геометрическом центре или что центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан, то этим хотят выразить ту мысль, что при любом положении шара или треугольной пластинки относительно земной поверхности равнодействующая весов всех частиц тела (вес тела) действует по вертикальной прямой, неизменно проходящей в случае шара через его центр, а в случае треугольника — через точку пересечения медиан.

Чтобы какое-либо тело при любом положении пребывало в равновесии, силу, уравновешивающую вес, нужно приложить к центру тяжести тела.

Понятие центра тяжести можно обобщить на совокупность нескольких тел (на систему тел). Такое обобщение вполне естественно: достаточно вообразить себе все данные тела соединенными между собой твердыми, но легкими (как бы невесомыми) стержнями; подобным образом соединенные тела составят одно тело, центр тяжести которого и называют их общим центром тяжести (*центром тяжести системы*). Центр тяжести двух материальных точек располо-

жен на прямой, их соединяющей, и делит расстояние между ними обратно пропорционально их массам. Под *центром тяжести деформируемой массы* (например, жидкости) мы понимаем центр тяжести того твердого тела, которое она образовала бы, мгновенно затвердев в данном положении.

Понятие центра тяжести связано с весом, а вес зависит от положения тела по отношению к земной поверхности. Неотъемлемым же свойством всякого тела является его масса. Поэтому более общим и более важным является понятие о центре масс.

Центром масс двух материальных точек, независимо от того, находятся ли они под действием силы тяжести или нет, называют точку, *делящую расстояние между ними обратно пропорционально их массам*. Центр масс трех материальных точек делит расстояние между центром масс каких-либо двух из них и третьей материальной точкой обратно пропорционально отношению суммы первых двух масс к третьей массе (рис. 31). Таков же переход от трех материальных точек к четырем и вообще к любому их числу. Следовательно, центр тяжести какого-либо тела, находящегося на земной поверхности, является в то же время центром массы этого тела.

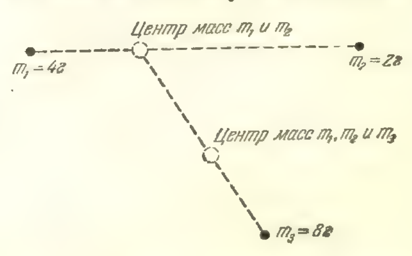


Рис. 31. Пример нахождения центра масс трех материальных точек.

Из самого определения следует, что центр масс каких-либо материальных точек расположен где-то между ними и никак не может оказаться вне сферы, заключающей внутри себя все данные массы.

Название «центр масс» может быть оправдано следующими соображениями. Вообразим, что между всеми частицами тел, образующих систему, действуют бесконечно возрастающие с течением времени силы притяжения. По третьему закону, силы взаимодействия, приложенные к двум материальным точкам, численно равны. Сближаясь, если ничто тому не препятствует, под действием этих сил обе материальные точки будут двигаться согласно второму закону с ускорениями, обратно пропорциональными их массам, и так же будут относиться между собой при отсутствии начальной скорости пройденные ими до встречи пути, т. е. материальные точки сойдутся в их центре масс. Присоединяя к двум материальным точкам третью, к трем — четвертую и т. д., получим тот же результат для любой механической системы. Таким образом, *центр масс механической системы есть та точка, вокруг которой собралась бы в виде чрезвычайно плотного сферического тела вся масса системы, если бы между материальными точками системы действовали бесконечно возрастающие с течением времени силы притяжения.*

§ 22. Закон сохранения количества движения и теорема о движении центра масс

Напишем уравнение, выражающее второй закон Ньютона, для каждого из n тел механической системы; равнодействующую приложенных к данному телу внутренних сил системы обозначим вектором $\boldsymbol{f}$, равнодействующую приложенных к нему внешних сил — вектором $\boldsymbol{F}$:

$$\frac{d(m_1\boldsymbol{v}_1)}{dt}=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{F}_1,$$

$$\frac{d(m_2\boldsymbol{v}_2)}{dt}=\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{F}_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d(m_n\boldsymbol{v}_n)}{dt}=\boldsymbol{f}_n+\boldsymbol{F}_n.$$

Сложим (по правилу многоугольника) векторы, стоящие в левых и в правых частях этих уравнений:

$$\frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+m_n\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\ldots+\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\ldots$$

Находящаяся в правой части уравнения сумма внутренних сил

$$\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\ldots+\boldsymbol{f}_n$$

равна нулю, так как все эти силы попарно равны по величине и противоположно направлены. Остаются лишь внешние силы. Поэтому получаем:

$$\frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+m_n\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\ldots+\boldsymbol{F}_n. \qquad (1)$$

Геометрическое изменение количества движения системы, происходящее за бесконечно малый промежуток времени и разделенное на этот промежуток времени, равно геометрической сумме внешних сил, действующих на систему. Другими словами, изменение со временем величины и направления количества движения системы определяется действующими на систему внешними силами. *Внутренние силы не могут изменить количества движения системы в целом.* Следовательно, в системе, на которую внешние силы не действуют или их равнодействующая равна нулю, количество движения остается постоянным.

Этот закон сохранения количества движения является одним из важнейших законов физики. Приведем несколько примеров, поясняющих этот закон.

Когда человек, ранее стоявший неподвижно на тележке, прыгает вперед, то тележка откатывается назад, так что их суммарное количество движения, которое было равно нулю, остается равным нулю (рис. 32): $m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2=0$.

Если человек вбегает на катящуюся ему навстречу тележку (легкую и медленно двигающуюся), то, остановившись на ней, он будет двигаться вместе с тележкой с таким же количеством движения, какой была вначале геометрическая сумма количеств движения человека и тележки:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v.$$

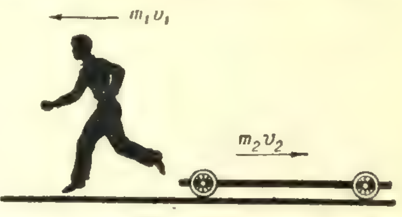
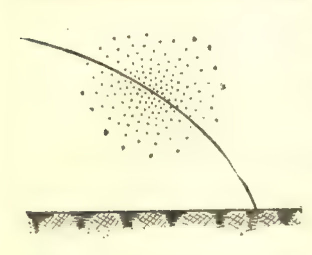


Рис. 32. $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$.

Когда человек бежит через неподвижно стоящую тележку, не замедляя скорости своего движения, тележка останется стоять неподвижно.

При разрыве шрапнели осколки разлетаются в разные стороны, но никогда не летят все вниз или все вверх от траектории снаряда. Геометрическая сумма количеств движения осколков после разрыва остается такой же, каким было количество движения снаряда до разрыва (рис. 33).

Внутренние силы не влияют на движение центра масс. Но внутренние силы могут вызвать взаимное движение тел системы. При этом изменения скоростей двух тел под действием внутренних сил обратно пропорциональны их массам и противоположны по направлению.


Рис. 33. Центр масс разлетающихся в разные стороны осколков шрапнели продолжает двигаться по той же траектории, по которой двигался бы снаряд, если бы разрыва не произошло.

Так, когда человек спрыгивает с легкой тележки, то она с большой скоростью откатывается назад, тогда как тяжелая тележка откатится медленно. Оба эти движения вызваны действием внутренних сил; подобное проявление внутренних сил носит название *отдачи*. Стоя на коньках, бросим вперед какой-либо тяжелый предмет; мы неизбежно покатимся назад, но медленно, так как наша масса сравнительно велика. При выстреле, если орудие не укреплено неподвижно (т. е. нет внешнего противодействия), оно откатывается назад.

Явлением отдачи объясняется движение ракеты: ракета взрывом (внутренние силы) выбрасывает назад газы; выброшенные газы и сама ракета удаляются в противоположные стороны от их общего центра масс.

Докажем, что центр масс системы, если представить себе, что в нем сосредоточена вся масса системы, является носителем всего количества движения системы.

Вообразим, что внутри системы действуют бесконечно возрастающие с течением времени силы взаимного притяжения частиц и тел,

а внешних сил нет. Тогда, продолжая совместное движение по инерции, все материальные частицы системы будут одновременно сближаться, и точкой их встречи будет центр масс (§ 21). В дальнейшем они будут двигаться совместно, как одно тело с массой

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n,$$

а так как при отсутствии внешних сил количество движения системы измениться не могло, то скорость $\boldsymbol{v}$ совместного движения соединившихся масс должна удовлетворять условию:

$$M\boldsymbol{v} = \text{количеству движения системы.}$$

Этот вывод имеет большое принципиальное значение, и его формулируют так: *полное количество движения механической системы таково же, как если бы вся масса системы была сосредоточена в ее центре масс и двигалась вместе с ним.*

Поэтому количество движения системы называют также количеством движения ее центра масс. Равенство количества движения системы и количества движения ее центра масс математически выражается формулой

$$M\boldsymbol{v} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n, \tag{2}$$

где M — масса всей системы, $\boldsymbol{v}$ — скорость движения ее центра масс, m_1 m_2, ..., m_n— массы отдельных тел (или материальных точек) системы, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ — их скорости.

Заменив в уравнении (1) геометрическую сумму количеств движения тел системы вектором количества движения ее центра масс, получаем:

$$\frac{d(M\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n. \tag{3}$$

Это новое уравнение таково же, как уравнение, выражающее второй закон Ньютона для тела с массой M, движущегося под действием силы

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n.$$

Отсюда делаем вывод: *центр масс механической системы движется так, как если бы в нем была сосредоточена вся масса системы и на него действовала бы сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к телам системы.*

Эту теорему называют *теоремой о движении центра масс.*

В частности, при отсутствии внешних сил или при равенстве нулю их геометрической суммы центр масс системы движется как изолированное тело, т. е. равномерно и прямолинейно, либо остается в покое.

Из независимости действия сил следует применимость теоремы о движении центра масс к движению вдоль каждого направления

в отдельности. Математически это выражается тем фактом, что векторное уравнение (3) равносильно трем скалярным уравнениям для проекций тех же векторов на три взаимно перпендикулярные оси:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Mv_x)&=F_{1x}+F_{2x}+\ldots+F_{nx},\\ \frac{d}{dt}(Mv_y)&=F_{1y}+F_{2y}+\ldots+F_{ny},\\ \frac{d}{dt}(Mv_z)&=F_{1z}+F_{2z}+\ldots+F_{nz}.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Руководствуясь принципом независимости действия сил и исследуя движение центра массы вдоль какого-нибудь направления, например вдоль оси x, мы можем рассматривать это движение так, как если бы движения в направлении двух других осей не происходило.

К примерам, которые были приведены выше для пояснения закона сохранения количества движения и которые в то же время служат подтверждением теоремы о движении центра массы, присоединим еще один важный пример. Представим себе, что на твердое тело, находившееся в покое, начали действовать две численно равные, противоположно направленные параллельные силы (так называемая *пара сил*). Как будет двигаться тело? На первый взгляд кажется, что тело начнет вращаться вокруг точки D, лежащей посредине между точками приложения пары сил (рис. 34). Но это заключение ошибочно (нередко эту ошибку делают при решении задач). Геометрическая сумма приложенных внешних сил $\boldsymbol{F}$ и $-\boldsymbol{F}$ равна нулю. Следовательно, движение центра масс не изменится. Он был в покое и останется в покое. Тело будет вращаться вокруг неподвижного центра масс C.

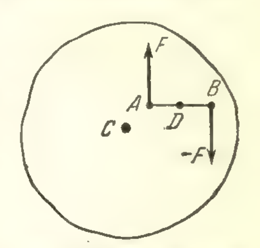


Рис. 34. Как бы ни была приложена к телу пара сил $\boldsymbol{F}$ и $-\boldsymbol{F}$, она вращает тело вокруг оси, проходящей через центр масс C.

Если нагрузить лодку-плоскодонку посредине тяжелыми камнями, много тяжелее веса нашего тела, и, сев где угодно, на носу или на корме лодки, грести одним веслом вперед, другим назад, то лодка будет поворачиваться вокруг середины (вокруг центра масс). Если переложить камни на нос лодки, то центр масс, а с ним и центр вращения переместятся к носу. Наконец, если камни положить на корме, лодка будет поворачиваться около центра масс, перемещенного к корме.

[В применении к вращательному движению закон сохранения количества движения может быть преобразован в форму, более удобную для анализа вращательных движений,— в *закон сохранения момента количества движения*. Понятие о моменте количества движения (или, что то же, об импульсе вращения) и закон сохранения момента количества движения при вращении твердого тела будут пояснены в главе VII.]

§ 23. Закон сохранения энергии в консервативных системах. Минимум потенциальной энергии при равновесии

Работа силы тяжести, как было пояснено в § 19, не зависит от пути перемещения тела с одного уровня на другой. Работа сил тяготения вообще не зависит от пути перемещения. Точно так же не зависит от пути перемещения и работа сил электростатического взаимодействия наэлектризованных тел.

Силы взаимодействия, работа которых не зависит от пути перемещения тел, называют *консервативными силами* (от латинского conservare, что значит «сохранять»).

Это название имеет следующий смысл: в механических системах, где действуют одни только консервативные силы (в *консервативной системе*), сумма кинетической и потенциальной энергий всегда остается неизменной. Иначе говоря, в консервативной системе при ее движении может происходить превращение кинетической энергии только в потенциальную энергию или же потенциальной в кинетическую, но не в какие-либо другие виды энергии.

Таким образом, консервативная система являет собой пример системы, где движение всегда остается механическим движением и не превращается в более сложные формы движения. В действительности во всех механических системах наряду с консервативными силами действуют и неконсервативные силы (например, трение). Кроме того, не следует забывать, что потенциальная энергия представляет собой скрытые формы движения, более сложные, чем механическое движение. Поэтому механический закон сохранения энергии в консервативных системах не имеет такого (всеобщего) значения, как универсальный закон сохранения энергии, указывающий на превращаемость всех видов энергии друг в друга.

Закон сохранения энергии в консервативных системах можно вывести из законов Ньютона. Исходим из уравнений движения

$$X = m\frac{dv_x}{dt}, \quad Y = m\frac{dv_y}{dt}, \quad Z = m\frac{dv_z}{dt}.$$

Напишем эти уравнения для всех материальных точек механической системы. Умножим первое из этих уравнений для первой материальной точки на dx_1; аналогичное уравнение для второй материальной точки умножим на dx_2 и т. д.; каждое второе уравнение умножим соответственно на dy_1, dy_2 и т. д.; каждое третье — на dz_1, dz_2 и т. д. Сложим теперь все эти уравнения; получаем:

$$\sum (X_i\,dx_i + Y_i\,dy_i + Z_i\,dz_i) = \\ = \sum m_i\left(\frac{dv_{x,i}}{dt}dx_i + \frac{dv_{y,i}}{dt}dy_i + \frac{dv_{z,i}}{dt}dz_i\right).$$

Здесь Σ означает, что берется сумма написанных выражений для всех материальных точек, $i=1, 2, \ldots, n$. Каждый из членов, стоящих в правой части, преобразуем следующим образом:

$$\frac{dv_{x,i}}{dt} dx_i = dv_{x,i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = v_{x,i} \cdot dv_{x,i}.$$

Это произведение представляет собой дифференциал величины $\frac{v^2_{x,i}}{2}$. Учитывая это, а также принимая во внимание, что

$$v^2_{x,i} + v^2_{y,i} + v^2_{z,i} = v^2_i,$$

предыдущее уравнение можно переписать так:

$$\sum (X_i\, dx_i + Y_i\, dy_i + Z_i\, dz_i) = \sum d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right).$$

(Массы m_1, m_2 и т. д. мы считаем неизменными; на этом основании величины $m_i d\left(\frac{v_i^2}{2}\right)$ мы заменили через $d\left(\frac{m_i v_i}{2}\right)$; в случае масс, изменяющихся во время движения, мы должны были бы исходить из уравнений (1), где под знаком дифференциала находится количество движения, а не скорость.)

В правой части вышеприведенного уравнения мы имеем изменение кинетической энергии системы за время dt. Поэтому правую часть уравнения можно обозначить $dE_{кин}$, где $E_{кин}$— кинетическая энергия системы. Что же касается левой части уравнения, то это есть работа dA, производимая всеми материальными точками системы за время dt. Когда силы консервативны, эта работа однозначно определяется положением материальных точек до и после перемещения за время dt и поэтому может быть выражена как убыль потенциальной энергии. Таким образом, вышеприведенное уравнение для консервативных систем приобретает такой вид:

$$-dU = dE_{кин},$$

или

$$dE_{кин} + dU = 0,$$

или, наконец, что то же:

$$d(E_{кин} + U) = 0.$$

Итак, изменение суммы кинетической и потенциальной энергий консервативной системы за любой бесконечно малый промежуток времени dt, а значит, и за любой конечный промежуток времени равно нулю. Иначе говоря, *полная энергия консервативной системы*

(*сумма кинетической и потенциальной энергий*) *остается при движении системы неизменной*:

$$E_{\text{кин}}+U=\text{const}. \qquad (5)$$

Так, например, потенциальная энергия тяжести какого-либо тела при падении тела убывает на столько, на сколько при этом возрастает кинетическая энергия тела. Потенциальная энергия тела, брошенного вверх, по мере подъема тела возрастает на величину, равную убыли кинетической энергии. Подъем тела, брошенного вверх, прекращается, когда вся кинетическая энергия превращается в потенциальную.

При каждом качании маятника, когда маятник достигает крайнего отклонения, вся кинетическая энергия маятника превращается в потенциальную; при свободном качании маятника полная энергия маятника во всех его положениях одинакова.

Затухания колебаний маятника, так же как и потеря некоторой доли кинетической энергии у тела, брошенного в воздухе вверх, когда оно опускается до первоначального уровня, объясняются влиянием сил трения, вследствие которых ни одна механическая система в действительности не является вполне консервативной. Однако такие системы, как, например, солнечная система (движение планет вокруг Солнца), можно с чрезвычайно большой степенью точности считать консервативными системами.

Докажем весьма важную теорему, что *состоянием устойчивого равновесия изолированной консервативной системы является такое состояние, в котором потенциальная энергия системы минимальна.*

По закону сохранения энергии, полная энергия консервативной системы, слагающаяся из ее кинетической энергии E и потенциальной энергии U, должна оставаться неизменной:

$$E_{\text{кин}}+U=\text{const}.$$

Кинетическая энергия есть всегда величина *положительная*. Поэтому, если в начальный момент все тела, составляющие рассматриваемую нами систему, были *неподвижны*, то движение может возникнуть только вследствие *уменьшения* потенциальной энергии, причем убыль потенциальной энергии будет равна возникшей кинетической энергии. Если же в начальный момент потенциальная энергия была *минимальна* (что имеет место, когда любое перемещение тел в новое их положение приводит к увеличению потенциальной энергии), то тогда, очевидно, не может произойти возрастание кинетической энергии, и движение, отсутствовавшее в начальный момент, никогда не возникнет; система будет пребывать в *устойчивом равновесии*, из которого она может быть выведена только действием внешних сил.

В частном случае, когда имеется одно какое-либо тело, находящееся под действием силы тяжести, можно утверждать, что состоянию устойчивого равновесия будет соответствовать *наинизшее положение центра тяжести тела*; в противном случае потенциальная энергия тяжести не была бы минимальной.

§ 24. Число степеней свободы и работа сил связи. Принцип возможных перемещений

Числом степеней свободы системы называют число *независимых* механических *движений*, которые одновременно может испытывать механическая система. Иначе говоря, числом степеней свободы называют число *независимых координат*, определяющих положение механической системы (т. е. положение всех ее материальных точек).

Положение одной материальной точки определяется тремя координатами x, y, z; если механическая система состоит из n материальных точек, то нужно знать $3n$ координат этих точек, чтобы иметь точное представление о положении механической системы в пространстве. Однако весьма часто движение материальных точек бывает стеснено теми или иными условиями, вследствие чего не все координаты являются независимыми; зная часть координат, другие можно определить из условий, ограничивающих свободу движения материальных точек.

Материальная точка, движение которой *не* стеснено никакими условиями, имеет, очевидно, *три* степени свободы. Если движение материальной точки ограничено так, что точка может перемещаться только по некоторой поверхности $f(x, y, z) = 0$, то достаточно знать две координаты точки, чтобы третью координату можно было вычислить; следовательно, материальная точка, принужденная двигаться *по поверхности*, имеет *две* степени свободы. Если же движение стеснено так, что материальная точка принуждена двигаться *по линии* [а линию всегда можно рассматривать как пересечение каких-либо двух поверхностей: $f_1(x, y, z)=0$ и $f_2(x, y, z)= 0$], то в этом случае материальная точка имеет *одну* степень свободы; зная одну из координат точки, две другие координаты можно вычислить по уравнениям линии.

Ограничения свободы движения могут быть весьма разнообразными. Например, движение может быть стеснено тем, что между некоторыми телами, которые мы рассматриваем как материальные точки, имеются легкие, но жесткие стержни, связывающие эти тела, или же гибкие, но нерастяжимые нити, и т. п. Любые способы ограничения свободы движения в механике называются *связями*.

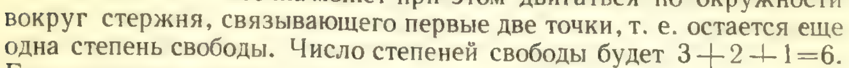
Примеры некоторых видов связи уже были рассмотрены нами, когда мы говорили о силах инерции, которые всегда приложены к связям (§ 17). Примером связи, побуждающей материальную точку двигаться по поверхности, может служить шарнирный подвес мас-

сивного шара на легком жестком стержне (рис. 35): такой маятник может качаться в любой плоскости, причем центр массы маятника будет двигаться по поверхности сферы. Тот же шар, будучи подвешен на двух жестких стержнях, может совершать качания только в одной плоскости; центр массы шара будет двигаться по линии, т. е. сохранится одна степень свободы.

Рис. 35. Движение материальной точки по поверхности: две степени свободы.

Подсчитаем, каково число степеней свободы у двух материальных точек, связанных весьма легким, но жестким стержнем (рис. 36, *а*). Если одну из этих точек мы закрепим, то тем самым мы отнимем у системы три степени свободы; другая материальная точка может при этом двигаться по поверхности сферы, т. е. остаются еще две степени свободы. Следовательно, *две материальные точки, связанные жестким стержнем, имеют пять степеней свободы.*

Пусть система состоит из трех материальных точек, связанных друг с другом тремя жесткими стержнями (рис. 36, *б*). Закрепив одну из материальных точек, мы отнимаем у системы три степени свободы; закрепив вторую точку, отнимаем еще две степени свободы; третья материальная точка может при этом двигаться по окружности вокруг стержня, связывающего первые две точки, т. е. остается еще одна степень свободы. Число степеней свободы будет $3+2+1=6$.



Если система состоит из четырех или еще большего числа материальных точек, которые все попарно связаны друг с другом жесткими стержнями, то, когда закреплены первые три не лежащие на одной прямой точки, никакое движение других материальных точек уже не является возможным. Итак, *три или большее число материальных точек, связанных друг с другом жесткими стержнями, имеют шесть степеней свободы.* Силы, приложенные к материальным точкам вследствие существования связей, мы будем называть *реакциями связей* или просто *силами связи.*

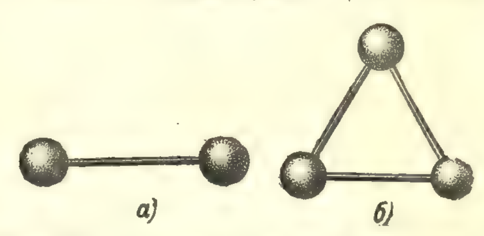


Рис. 36. *а* — система с пятью степенями свободы движения, *б* — система с шестью степенями свободы движения.

В предыдущем изложении мы не выделяли сил связи из других сил. Силы, передаваемые и развиваемые связями, часто являются внутренними силами системы. Однако, когда движение системы ограничено внешними телами, то реакции таких связей мы должны рас-

сматривать как внешние силы. Например, для маятника, изображенного на рис. 35, реакции связей будут внешними силами. Для поезда реакции рельсов также будут внешними силами, тогда как реакции сцепки вагонов и буферов — внутренними силами.

Силы связи выделены в особую категорию не по каким-либо принципиальным соображениям, но вследствие желания упростить решение задач. Даже в сравнительно простых системах вычисление сил связи часто представляет значительные трудности. Вместе с тем силы связи только ограничивают свободу движения системы, но в отличие от других сил не оказывают глубокого влияния на движение системы, а именно, мы убедимся сейчас, что *суммарная работа сил связи равна нулю*. Поэтому во многих случаях можно полностью исследовать движение механической системы, не затрачивая времени на вычисление сил связей.

Силы связи, и внутренние и внешние, непосредственно не могут изменить ни кинетическую, ни потенциальную энергию системы. На взаимопревращаемость кинетической и потенциальной энергий силы связи могут влиять только косвенно, создавая ограничения движению (так, например, если бы массивный шар маятника, изображенного на рис. 35, не был подвешен на стержне, то шар упал бы и его потенциальная энергия тяжести стала бы превращаться в кинетическую; реакция стержня удерживает шар от падения и единственно возможным для маятника движением делает качание).

Для доказательства, что суммарная работа сил связи равна нулю, рассуждаем следующим образом. Пусть имеется какая угодно механическая система, свобода движения которой ограничена некоторыми связями. Вообразим, что на материальные точки системы не действуют никакие силы, кроме сил связей. Дадим материальным точкам системы толчок в любом направлении и предоставим им двигаться по инерции и под действием сил связей. Наша материальная система представляет собой механизм, который, по условию, не обладает потенциальной энергией и в котором ввиду отсутствия каких бы то ни было сил, кроме сил связи, кинетическая энергия не может превращаться в другие виды энергии. Следовательно, кинетическая энергия такого механизма, по закону сохранения энергии, должна оставаться неизменной. Но если бы суммарная работа сил связи не была равна нулю, то кинетическая энергия должна была бы измениться на величину этой работы. Следовательно, суммарная работа сил связи равна нулю, каково бы ни было движение материальных точек, допускаемое связями. Это приводит нас к формуле

$$\sum (R_{xi}\,\delta x_i + R_{yi}\,\delta y_i + R_{zi}\,\delta z_i) = 0. \qquad (6)$$

Здесь R_{xi}, R_{yi}, R_{zi} — компоненты силы, с которой связи действуют на i-ю материальную точку; величины δx_i, δy_i, δz_i представляют собой бесконечно малые изменения координат i-й материальной точки при каком-либо совместимом со связями перемещении этой точки

(через δs принято обозначать любое *возможное*, или, что то же, *виртуальное* перемещение, в отличие от ds, означающего фактически происходящее перемещение).

Приведенное выше обоснование формулы (6) ясно показывает, что эта формула справедлива постольку, поскольку реализация связей может считаться и д е а л ь н о й; например, в стержнях и в нитях, реализующих связи, не должно происходить «рассеяние» механической энергии, т. е. превращение ее в энергию упругих деформаций и в энергию молекулярно-теплового движения.

Теорема о равенстве нулю суммарной работы сил связей вносит значительные упрощения в методы решения задач статики и динамики.

Имеются различные приемы изложения вопросов статики, но несомненно, что самый общий и вместе с тем простейший метод решения задач статики заключается в применении принципа возможных перемещений. Этот метод применялся еще Галилеем; его значение понял и оценил Иоганн Бернулли (1717 г.), но полное развитие этот метод получил позднее благодаря работам Лагранжа (1788 г.). В самом общем виде принцип возможных перемещений был установлен и развит в своих применениях в середине прошлого столетия замечательным русским математиком и механиком Михаилом Васильевичем Остроградским.

Как уже было сказано в предыдущем параграфе, *возможным перемещением* называют такое *бесконечно малое перемещение* тела или материальной точки, которое допускается *связями системы*, т. е. существующими ограничениями свободы передвижения тел, образующих систему. Так, например, по условию задачи может быть задано, что тело при своем перемещении должно оставаться на некоторой поверхности; стало быть, возможным перемещением в этом случае является перемещение по этой поверхности. Вообще под возможными перемещениями понимают только те перемещения, которые не противоречат условиям рассматриваемой задачи; при этом имеют в виду перемещения бесконечно малые.

Принцип возможных перемещений заключается в следующем:

Необходимое и достаточное условие равновесия состоит в том, что сумма работ всех сил, приложенных к телам системы, для каждого возможного перемещения системы должна быть равна нулю или меньше нуля.

Для перемещений, допускаемых «удерживающими» (двусторонними) связями, сумма работ должна быть равна нулю; для перемещений, допускаемых «неудерживающими» (односторонними) связями, сумма работ должна быть меньше нуля или равна нулю. Примером односторонних связей может служить тело, лежащее на какой-либо поверхности.

Когда тела, образующие систему, связаны какими-либо совершенно жесткими стержнями или натянутыми нерастяжимыми ни-

тями, то, применяя принцип возможных перемещений, нет надобности рассматривать «силы связей» (давления и натяжения, передаваемые связями, и реакции связей), так как, как было доказано в предыдущем параграфе, суммарная работа этих сил при всяком перемещении всегда будет равна нулю. Это право игнорирования сил жестких (недеформируемых) связей крайне упрощает решение многих задач статики, позволяя при применении принципа возможных перемещений ограничиваться рассмотрением одних только внешних сил и силы трения.

Отбрасывая работу сил связи, которая в сумме для всех материальных точек равна нулю, и сохраняя для компонентов приложенных сил прежние обозначения X, Y, Z, принцип возможных перемещений аналитически можно выразить следующей формулой:

$$\sum (X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\,\delta z_i) \leqslant 0. \qquad (7)$$

Здесь, как было отмечено выше, знак равенства относится к случаю «удерживающих» (двусторонних) связей, тогда как для «неудерживающих» (односторонних) связей наряду со знаком равенства может иметь место и знак неравенства.

Уравнение (7) является наиболее общим уравнением равновесия.

Принцип возможных перемещений можно рассматривать как следствие закона сохранения энергии. Действительно, если в начальный момент все тела системы были неподвижны, а в последующее время они пришли в движение, то это означает, что приложенные к телам силы произвели работу, равную возникшей кинетической энергии. Кинетическая энергия не может возникнуть, и следовательно, система будет пребывать в равновесии, если для всякого возможного перемещения работа всех приложенных к телам сил (внешних и внутренних) равна нулю или меньше нуля.

Принцип возможных перемещений был установлен задолго до того, как был открыт и общепризнан закон сохранения энергии; поэтому в свое время был предложен ряд доказательств справедливости этого принципа, подчиняющих этот принцип другим, подтвержденным на опыте утверждениям.

В дальнейшем мы применим принцип возможных перемещений к расчету условий равновесия некоторых простейших механизмов.

§ 25. Принцип Даламбера и релятивистское понимание инерции

Как показал Даламбер, для решения задач динамики искусственно можно воспользоваться методами статики. Такое упрощение задач динамики достигается тем, что наряду с *фактически* действующими в системе силами рассматривают некоторые *фиктивные*, т. е. несуществующие, воображаемые силы. Это делается следующим образом.

Пусть материальная точка с массой m находится под действием приложенной к ней силы $\boldsymbol{F}$, например силы тяжести (рис. 37). Эта приложенная к материальной точке сила частью (компонент $\boldsymbol{F}_d$) проявляется динамически, создавая ускорение $\boldsymbol{j}$, частью (компонент $\boldsymbol{F}_c$) проявляется статически в давлении, которое материальная точка оказывает на связи, или в натяжении, которое она создает в связях. Компонент приложенной силы $\boldsymbol{F}_c$, проявляющийся статически, Даламбер назвал *потерянной силой*. Действительно, эта геометрическая часть приложенной к материальной точке силы не влияет на ускорение материальной точки, и в этом смысле она является «потерянной». По третьему закону Ньютона, поскольку материальная точка действует на связи с силой $\boldsymbol{F}_c$, то и связи действуют на материальную точку с равной, но противоположно направленной силой $\boldsymbol{R}$; эту силу $\boldsymbol{R}$ называют *реакцией связи*. Таким образом, с одной стороны, мы можем считать, что ускорение $\boldsymbol{j}$ создается динамическим компонентом приложенной силы:

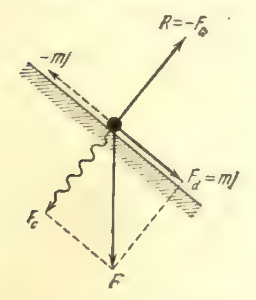


Рис. 37. $\boldsymbol{F}_c$ — потерянная сила, $(-m\boldsymbol{j})$ — даламберова сила.

$$\boldsymbol{F}_d = m\boldsymbol{j};$$

с другой стороны, мы можем считать, что то же самое ускорение $\boldsymbol{j}$ создается совокупно всеми действующими на материальную точку силами, а на материальную точку действуют вся приложенная сила $\boldsymbol{F}$ и, помимо того, реакция связей $\boldsymbol{R}$; следовательно,

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} = m\boldsymbol{j}.$$

Мы видим, что *динамический компонент приложенной силы представляет собой равнодействующую приложенной силы и реакции связей.*

Последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{j} = \boldsymbol{R}.$$

Представим себе, что такие уравнения написаны для всех материальных точек. Умножим каждое из них на возможное элементарное перемещение материальной точки и на косинус угла между направлением этого перемещения и направлением реакции связей. Сложим теперь все такие уравнения, выписанные для всех материальных точек. Тогда в правой части мы получим суммарную работу сил связи, которая, как было доказано в § 24, равна нулю. Следовательно, и сумма членов левой части уравнения тоже равна нулю. Мы получаем, таким образом, уравнение Даламбера, которое, поль-

зуясь выражением работы через компоненты сил [§ 18, формула (5)], можно написать так:

$$\sum \left[\left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \right.$$
$$\left. + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right] = 0. \qquad (8)$$

Здесь δx_i, δy_i, δz_i суть компоненты любых *возможных* перемещений, т. е. перемещений, допускаемых связями системы.

Уравнение Даламбера является удобным для решения прикладных задач динамики и в то же время в аналитической механике оно служит основой для вывода ряда других важных своей общностью и полезных в практике уравнений (например, уравнений Лагранжа).

Изложенный метод Даламбер сформулировал в виде принципа, как бы сводящего динамику к статике. Сопоставляя уравнения (7) и (8), легко видеть, что эти два уравнения — одно, являющееся основой статики, и другое, выражающее принципы динамики,— во многих отношениях аналогичны. Уравнение Даламбера можно было бы уподобить уравнению статики, если бы на материальные точки системы, помимо действительно приложенных к ним сил, действовали силы, равные произведению массы на ускорение и направленные противоположно ускорению. Эти в действительности не существующие фиктивные силы $-m_1\boldsymbol{j}_1$, $-m_2\boldsymbol{j}_2$ и т. д. мы будем называть *силами Даламбера.*

Как уже было сказано выше, динамический компонент $m\boldsymbol{j}$ приложенной силы $\boldsymbol{F}$ всегда представляет собой геометрическую сумму приложенной силы $\boldsymbol{F}$ и реакции связей $\boldsymbol{R}$ (рис. 37). Поэтому, если бы к действующим на материальную точку силам мы присоединили еще даламберову силу, равную $m\boldsymbol{j}$, но направленную противоположно, то влияние сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$ оказалось бы устраненным и точка должна была бы двигаться по инерции или оставаться в покое:

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i + (-m_i\boldsymbol{j}_i) = 0.$$

Можно сказать поэтому, что в случае движения механической системы *присоединение даламберовых сил к реально действующим силам позволяет условно считать все силы в системе уравновешенными.*

Во многих книгах силы Даламбера называют *силами инерции по Даламберу* или даже просто силами инерции. Мы будем употреблять термин «сила инерции» только в ньютоновом смысле, т. е. для обозначения реальной силы $m_i\boldsymbol{j}_i$, которая представляет собой *противодействие*, оказываемое телом m_i, когда связи или другие тела изменяют его состояние движения. Ясно, что сила инерции в ньютоновом понимании отличается от даламберовой силы тем, что: 1) сила инерции есть реальная сила, а даламберова сила является вымыслом; 2) сила инерции $m_i\boldsymbol{j}_i$ приложена к связям или другим

телам, а не к телу m_i, даламберову же силу воображают приложенной к телу m_i.

Итак, с ньютоновой точки зрения, даламберовы силы не только не являются силами инерции, но вообще не существуют, представляют собой фикцию, вымысел, который никакой реальности не отвечает. Тем не менее представление о вымышленных (фиктивных) силах Даламбера оказалось очень удобным; оно помогает сжато формулировать некоторые уравнения аналитической механики [подобно приведенной выше формулировке уравнения (8)]. Ясно, что ньютоново понимание реальных сил инерции не исключает широкого использования, где это удобно, даламберовых фиктивных сил. Казалось бы, здесь ничто не должно было порождать недоразумения и какие-либо разногласия. На деле же оказалось, что затронутый вопрос стал одним из самых спорных, и в разных руководствах он поныне освещается с разных позиций.

Применение одного и того же термина «силы инерции» к столь разным понятиям, как ньютоновы силы инерции и даламберовы силы, постоянно приводит к недоразумениям, которые, вероятно, не исчерпаются до тех пор, пока не установится традиция выражать представление о ньютоновых и даламберовых силах отчетливо различающимися терминами.

Однако дело здесь не ограничивается простой несогласованностью терминов. За двойственным использованием термина «сила инерции» скрывается борьба разных философских подходов к пониманию «реальности» и «фиктивности». В данном случае, как это было отмечено Э. Махом, противоположность понятий «реальности» и «фиктивности» при определенных условиях стушевывается и как бы исчезает. В связи с этим понятию инерции в теории относительности дано истолкование, существенно отличающееся от ньютонова. Это естественно, так как в теории относительности по-иному ставится вопрос о *реальности* величин. Там о реальности говорится в смысле наблюдаемости и учитывается, что все наблюдаемое нами в высокой мере зависит от способа наблюдения; если ньютонова механика различает истинный взгляд на вещи от кажущегося восприятия вещей, то для теории относительности все кажущиеся восприятия, выдержавшие определенный математический экзамен, в равной мере истинны, все они одинаково отвечают реальности; существование же *абсолютной*, *объективной* реальности, не зависящей от способа наблюдения, отрицается (считается «не имеющей физического смысла»). Если в ньютоновой механике сила, например сила тяжести, есть объективная реальность, а даламберовы силы суть фикция, вымысел, то в теории относительности и сила тяжести и даламберовы силы трактуются как одинаково условные понятия.

Например, представим себе, что наблюдатель, находящийся в вагоне поезда, движущегося ускоренно, не знает, что он вместе со всеми предметами, имеющимися в вагоне, приобретает ускорение $\boldsymbol{j}$

(в системе координат, связанной с железнодорожным полотном). Этот наблюдатель, понятно, заметит все те явления, которые для указанного примера уже были перечислены на стр. 49, т. е. он заметит, что незакрепленные предметы вдруг приобрели по отношению к вагону ускорение — j, а закрепленные стали в том же направлении оказывать давление на опоры — mj. Вообразим, что указанный наблюдатель не только не знает, что вагон движется ускоренно, но почему-либо убежден, что ускорения нет. Такой наблюдатель, не зная истинной причины замеченных им явлений, может сделать вывод, что сам он и все предметы в вагоне вдруг оказались под действием силы — mj. Даламберовы силы представятся упомянутому наблюдателю как силы объективно существующие.

Хотя наблюдателю в системе отсчета, движущейся с ускорением, даламберовы силы могут показаться существующими объективно, однако он не обнаружит для них сил противодействия, которые, по третьему закону Ньютона, вызываются любой реально действующей силой. На основе факта, что даламберовы силы не порождают сил противодействия, упомянутый наблюдатель должен был бы догадаться, что он неправильно истолковал проявление инерции предметов в вагоне и что даламберовы силы фиктивны. Но, как справедливо указал Эйнштейн, упомянутый наблюдатель имеет право и иначе истолковать отсутствие сил противодействия, а именно: он может предположить, что обнаруженные им даламберовы силы созданы внешним полем тяготения. Тогда свою систему отсчета (вагон, движущийся ускоренно) он должен будет считать частью более широкой системы.

Итак, факт проявления инерции при ускорении вагона упомянутый наблюдатель, отрицая наличие ускорения $+j$, может истолковать как проявление поля тяготения, создавшего ускорение $-j$. Такая схема трактовки инерции родственна идеям общей теории относительности.

Представление о даламберовых силах, как выражающих кажущееся проявление инерции в системах отсчета, движущихся с ускорением, оказалось чрезвычайно удобным для обоснования общей теории относительности. Общая теория относительности с большой точностью предсказала ряд явлений (о некоторых из них сказано в т. III). Вследствие фундаментального значения общей теории относительности в руководствах по теоретической физике при изложении не только теории относительности, но и ньютоновой механики стремятся меньше пользоваться ньютоновым пониманием инерции и широко используют представление о даламберовых силах. Это обеспечивает сжатость изложения и, при необходимых оговорках, само по себе, конечно, не приводит к каким-либо философски неправильным интерпретациям механики. Но, к сожалению, при указанном подходе нередко делаются обобщения, ведущие к отрицанию материалистического понимания реальности.

Здесь следует в дополнение к сказанному в § 1 отметить, что нужно отличать основные, объективно правильные схемы явлений от условных схем, представляющих только математическое удобство. Можно указать немало примеров успешного использования в физике условных схем и фиктивных понятий. Такие схемы чаще всего вводят, чтобы удобнее было проводить аналогии. Так, для вычисления магнитных сил часто пользуются представлением о «магнитных зарядах», причем учение о взаимодействии таких «магнитных зарядов» оказывается аналогичным электростатике. Однако в действительности никаких магнитных зарядов нет, что в корне отличает магнитные явления от электрических.

Примером такой же *условной*, чисто умозрительной схемы может служить предложенная Даламбером замена задач динамики задачами статики посредством введения в уравнения механики фиктивных даламберовых (в отличие от реальных — ньютоновых) сил инерции.

Условные схемы, применяемые в узких рамках, часто полезны. Но когда забывают их вымышленный характер и ставят их наряду с основными схемами, которые *объективно верно отражают главную взаимосвязь явлений*, это может привести к идеалистическим извращениям науки.

Увлечение схемами, даже наилучшими, всегда сопряжено с риском, что изучаемые явления окажутся искусственно обедненными, утратившими свое истинное многообразие.

Схематизирование явления, его изоляция от существующих влияний, отвлечение от неисчерпаемой сложности всякого явления необходимы нам только как ступени познания. Схема полезна, пока она играет вспомогательную роль при анализе явления. Схема становится вредной, опасной, когда в увлечении ею перестают видеть за схемой всю сложность явления, когда схема ослепляет и заслоняет собой те стороны явления, которые не предусмотрены ею.

Люди, недостаточно опытные в науке, нередко чрезмерно увлекаются схемами и, в частности, условными схемами, «схемами по аналогии». Это происходит от недооценки взаимосвязи явлений и может развить склонность к схоластике. Опытные люди, напротив, часто оказываются стихийными диалектиками: опытность прежде всего сказывается в умении правильно понять всю сложность явления, не упустить его конкретные особенности.

Следует заметить, однако, что опытность не влияет на позицию физиков-махистов. Махисты отрицают существование абсолютной истины, они отрицают возможность точного и полного познания действительной, истинной картины явлений. Они считают, что задача физики принципиально ограничена схематизированным описанием явлений; поэтому они безоговорочно применяют сколь угодно искусственную, совершенно условную схему, если она кажется им обес-

печивающей «экономию мышления». Вопрос о том, приближает ли нас та или иная схема к познанию истинной картины явлений или же только подменяет ее воображаемой, но далекой от истины картиной, для них не существует, так как они считают единственным критерием истинности удобство математического «описания фактов». Это и создает почву для рискованных, а иногда даже и просто ошибочных физико-философских обобщений.

Делались предложения установить некоторые как бы компромиссные или «расширенные» трактовки сил инерции. Эти предложения, неизбежно связанные с коренным пересмотром механики, не имеют, однако, под собой объективной почвы, так как, основываясь на экспериментальных данных, в настоящее время можно указать только две области, где ньютонова механика нуждается в уточнении; это, во-первых, динамика движений со скоростями, близкими к скорости света, и, во-вторых, механика микрочастиц. Какие-либо иные субъективные поправки и перестройки ньютоновой механики остаются малооправданными.

ГЛАВА V

МЕХАНИЧЕСКАЯ ПЕРЕДАЧА СИЛ И ЭНЕРГИИ (ТРЕНИЕ, УДАР, ТЯГА)

§ 26. Трение. Тяга

Различают два вида трения: *трение скольжения* и *трение катания.*

Основной причиной возникновения трения скольжения является *макро-* и *микрошероховатость* соприкасающихся предметов. При движении одной поверхности вдоль другой их микроскопические выступы ударяются друг о друга и ломаются; вещество трущихся поверхностей размельчается, или, как говорят, *диспергируется*; это уже создает некоторую силу, задерживающую движение, всегда направленную против движения.

Нет таких твердых тел, поверхность которых была бы идеально гладка, поэтому работа, затрачиваемая на преодоление силы трения, всегда в той или иной мере идет на диспергирование (размельчение) поверхностных слоев трущихся тел. При этом значительная часть этой работы, производящей диспергирование поверхности, расходуется на нагревание трущихся тел, вызываемое ударами друг о друга размельченных частиц, скользящих по поверхности, и переходом энергии упругих напряжений в энергию молекулярного теплового движения.

Другая часть силы трения обусловлена микрошероховатостью поверхности, т. е. такими неровностями поверхности, которые соизмеримы по величине с размером молекул. В твердых кристаллических телах молекулы расположены закономерно, в определенном порядке. Из-за промежутков между молекулами даже так называемая зеркальная грань кристаллов (т. е. поверхность настолько ровная, что она отражает свет, как зеркало) является микрошероховатой.

Скольжение одной зеркальной грани кристалла по другой может сопровождаться «молекулярным диспергированием», т. е. нарушением порядка в естественном расположении молекул, отрывом и перемещением некоторых из них. Даже помимо такого разрушения молекулярного строения граней кристалла, скольжение одного кристалла по зеркальной грани другого вызывает вследствие микрошероховатости колебательное движение элементарных частиц

кристалла (молекул, атомов), вернее, усиливает всегда существующие колебания частиц, что приводит к нагреванию кристалла.

Чем глаже поверхности, тем в большем числе точек они соприкасаются при придавливании друг к другу; поэтому было бы ошибочно думать, что микрошероховатость мало влияет на величину трения в сравнении с макрошероховатостью.

Законы, которым подчиняется трение скольжения, были установлены французским физиком Амонтоном в 1699 г. и независимо от него, в более развитой форме, Кулоном в 1785 г. Если обозначить силу трения через F, а силу, с которой трущиеся поверхности прижимаются друг к другу, через P, то по закону Амонтона — Кулона

$$F = k_{\text{скольж}} P, \tag{1}$$

т. е. *сила трения прямо пропорциональна силе, прижимающей поверхности тел*. Здесь $k_{\text{скольж}}$ (часто мы будем писать просто k) представляет собой некоторый коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом трения скольжения*[1]).

Приведем *коэффициенты трения скольжения* для некоторых случаев:

Сталь по стали	0,17
» » чугуну	0,17
Железо » железу	0,34
» » латуни	0,2
» » чугуну и бронзе	0,18
Бронза » »	0,22
Латунь » »	0,16
Дуб по дубу при параллельных волокнах	0,4
» » » » перпендикулярных волокнах	0,2
Кожаный ремень по дереву	0,4
» » » чугуну	0,28
Кирпич по кирпичу	0,7
Сталь » льду	0,02
» » твердому грунту	0,2—0,4
» » рыхлому »	0,4—0,8
Резина (шина) по твердому грунту	0,4—0,6
Дерево (полозья) по льду	0,035

[1]) Один из простейших способов измерения коэффициента трения k заключается в определении угла α наклона плоскости, когда тело начинает скользить по плоскости под действием силы тяжести P.

Как ясно из рис. 38,

$$P \sin\alpha = k \cdot P \cos\alpha,$$

откуда

$$k = \operatorname{tg}\alpha.$$

Рис. 38. К определению угла скольжения.

Угол, при котором происходит (под действием силы тяжести) равномерное соскальзывание тела по наклонной плоскости, называют *углом трения*. Коэффициент трения равен тангенсу угла трения.

Во многих случаях наблюдается, что трение между разнородными поверхностями меньше, чем между однородными. Этим часто пользуются в технике; например, вкладыши подшипников делают из другого металла, чем цапфы (концы вала). Чем тверже тела, тем трение меньше; подшипники в часовых механизмах изготовляют из очень твердых камней (например, агатов или алмазов).

Кулон предполагал, что коэффициент трения является величиной постоянной и не зависит ни от скорости движения, ни от величины давления, ни от площади трущихся поверхностей. Однако опытные исследования показали, что *трение скольжения уменьшается с увеличением скорости движения и несколько увеличивается при увеличении давления.* Например, сила торможения чугунными колодками стальных железнодорожных колес при скорости поезда в 100 *км/час* в четыре раза меньше, чем при 10 *км/час*, и в пять раз меньше, чем при начале движения поезда. Поэтому при остановке трамвайного вагона, когда скорость уменьшается и трение тормозных колодок о колеса сильно возрастает, тормоз во избежание толчков постепенно выключают.

Зависимость коэффициента трения от давления сказывается только при значительных давлениях. Так, коэффициент трения железа по железу при давлениях, не превышающих 18 $кГ/см^2$, как было указано в вышеприведенной таблице, равен 0,34; при давлении в 36 $кГ/см^2$ он становится равным 0,41. При давлениях порядка 50 $кГ/см^2$ трущиеся металлические поверхности (железо, чугун, латунь) существенно повреждаются. При дальнейшем увеличении давления коэффициент трения снова уменьшается. Так, коэффициент трения стали о чугун при давлениях порядка 500 $кГ/см^2$ составляет всего 0,12, т. е. он в три раза меньше, чем при средних давлениях в 15—50 $кГ/см^2$, когда он равен 0,4—0,3.

Во многих случаях изменение температуры способно сильно влиять на коэффициент трения скольжения. При скольжении металла по металлу температура двояким образом влияет на трение: с одной стороны, с изменением температуры меняется твердость трущихся поверхностей; с другой стороны, вследствие нагревания может значительно возрасти окисление поверхностей, что делает поверхности более шероховатыми. Наблюдения показали, что при скольжении железа по чугуну нагревание от нормальной температуры до 1000° С влечет за собой почти четырехкратное возрастание коэффициента трения, если не удалить окислы с трущихся поверхностей; если же окислы тщательно удалены, то коэффициент трения при указанном нагревании железа и чугуна сначала возрастает и при 700° приобретает почти в два раза бо́льшую величину, чем при нормальной температуре, но при последующем нагревании снова убывает и при 1000° снова становится таким же, как и при нормальной температуре.

Все сказанное выше относится к так называемому *сухому трению*, когда отсутствует *смазка* трущихся поверхностей. Известно, что смазка сильно уменьшает трение (в среднем в 8—10 раз). Причина уменьшения трения состоит в том, что масло заполняет все неровности трущихся поверхностей и располагается тонким слоем между ними так, что поверхности как бы перестают касаться друг друга, при этом скользят относительно друг друга отдельные слои жидкости.

Таким образом, смазка заменяет непосредственное трение двух твердых поверхностей трением внутри жидкости, которое называют *внутренним трением*, или *вязкостью*. Внутреннее трение различно для разных жидкостей. Например, в серном эфире оно в пять раз меньше, чем в воде, в смазочных маслах оно примерно в 80 раз больше, в глицерине при 3° в 2500 раз больше, чем в воде. Годной для смазки является лишь такая жидкость, которая не выдавливается из тонкого промежутка между трущимися поверхностями, поэтому жидкость, применяемая для смазки, должна быть достаточно вязкой.

Влияние различных факторов на трение при смазке впервые обстоятельно было изучено Николаем Павловичем Петровым. Он установил, что сила трения при смазке прямо пропорциональна скорости, величине поверхности трения, обратно пропорциональна толщине слоя смазки и зависит от ее физических свойств. Зависимость трения при смазке от физических свойств смазывающей жидкости выражается тем, что сила трения при смазке пропорциональна коэффициенту внутреннего трения смазывающей жидкости. Созданная Н. П. Петровым гидродинамическая теория смазки и описание опытов, предпринятых им для проверки и уточнения теории, были изложены Н. П. Петровым в четырех обширных монографиях «Трение в машинах». Всего Н. П. Петров посвятил вопросам трения в годы 1882—1905 около двадцати работ. В этих работах была подробно исследована зависимость трения при смазке от нагрузки, от скорости, от режима подачи смазки, от температуры и т. д.

Ряд вопросов трения при смазке был рассмотрен Рейнольдсом (1886 г.) и Зоммерфельдом (1904 г.). В наиболее строгой форме теория смазки была развита Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным в работе «О трении смазывающего слоя» (1904—1906 гг.).

Обратимся к *трению катания*. Кулон нашел, что *трение катания прямо пропорционально прижимающей силе P и обратно пропорционально радиусу катка r*:

$$F = k_{\text{кат}} \cdot \frac{P}{r}, \tag{2}$$

где $k_{\text{кат}}$ — *коэффициент трения катания*.

Для опрокидывающей силы, которая преодолевает трение катания, радиус катка играет роль «плеча»; чем больше это плечо, тем легче преодолеть трение, приложенное к ободу катка. Кроме того,

чем больше радиус катка, тем меньше скажутся для него макроскопические неровности поверхности, как это видно из рис. 39.

Приводим *коэффициенты трения катания* (в сантиметрах) для некоторых случаев:

Колесо со стальным бандажом по стальному рельсу . .	0,05
Чугунное колесо по стальному рельсу	0,12
Деревянный каток по дереву	0,16

Трение катания значительно меньше трения скольжения. В связи с этим применяют шарикоподшипники, в которых трение скольжения по втулке заменяется трением катания шариков или цилиндров (рис. 40).

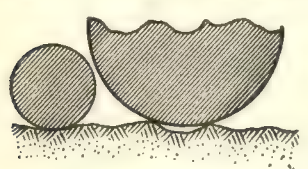


Рис 39. Большие колеса испытывают меньшее сопротивление катания, чем малые.

Для обыкновенного подшипника скольжения при нормальной смазке сила трения на поверхности цапфы приближенно равна $F \approx 0{,}08\,P$, где P — нагрузка на цапфу. Для шарикоподшипника сила трения на поверхности цапфы примерно в 50 раз меньше, чем для обыкновенного подшипника, и приближенно равна $F \approx 0{,}0015\,P$.

Тяга. Тягой называют более или менее плавное изменение состояния движения тела, вызываемое силой, которую развивает другое тело и которая передается первому телу механически, т. е. упругим напряжением промежуточных тел или же трением (взаимное расположение движущего и движимого тел является несущественным; прицеплен ли паровоз впереди вагонов или же он находится в хвосте поезда и толкает вагоны перед собой — в обоих случаях поезд движется тягой паровоза).

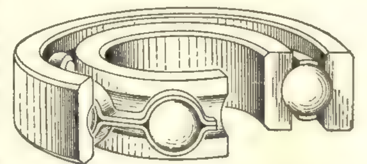


Рис. 40. Шарикоподшипник.

Множество машин и механизмов предназначено для реализации тяги в различных условиях и для разнообразных целей. В таких машинах, как автомобиль, трактор и паровоз, *тяга создается взаимодействием этих машин с землей*; как уже было пояснено в § 15 (рис. 19), в этих случаях движущей силой («силой тяги») является трение, не позволяющее колесам скользить по поверхности дороги или рельсов; это трение называют иногда *ведущим трением*; оно приложено к ободьям колес в сторону, как всегда, противоположную относительному скольжению, т. е. как раз в ту сторону, куда катятся колеса.

Ведущее трение пропорционально силе, с которой вращаемые двигателем колеса прижаты к поверхности дороги или к рельсам, т. е. пропорционально той части веса паровоза, автомобиля, которая падает на ведущие колеса,— это так называемый *сцепной вес* P_0. Если $k_{\text{скольж}}$ есть коэффициент трения скольжения между поверхностью колес и поверхностью дороги или рельсами, то сила тяги будет:

$$F_{\text{тяга}} = k_{\text{скольж}} \cdot P_0$$

(в тяговых расчетах коэффициент трения скольжения k между поверхностью ведущих колес и поверхностью дороги часто называют *коэффициентом сцепления*).

Для тракторов, движущихся по обыкновенным дорогам, коэффициент трения скольжения колес по дороге может изменяться примерно от $^1/_5$ до $^4/_5$, поэтому сила тяги трактора составляет, в зависимости от дороги и вида поверхности колес, одну, две, три и даже четыре пятых веса трактора.

Для скольжения стальных бандажей колес паровоза по стальным рельсам коэффициент трения примерно равен $^1/_6$. Поэтому сила тяги паровоза составляет одну шестую сцепного веса паровоза.

При скорости движения 20—40 *км/час* сопротивление железнодорожного состава качению (с учетом трения в осях при нормальной смазке) может быть принято равным примерно $^1/_{300}$. Следовательно, по горизонтальному пути паровоз может тянуть за собой поезд, вес которого в 300 раз превышает силу тяги паровоза, а так как сила тяги паровоза составляет примерно $^1/_6$ сцепного веса паровоза, то вес поезда (включая паровоз) может при строгой горизонтальности пути в 50 раз превышать сцепной вес паровоза. Железнодорожный путь стремятся делать возможно приближающимся к горизонтальности, так как даже при небольшом подъеме в полградуса (это часто встречающаяся крутизна для магистралей) паровоз может тянуть за собой поезд, вес которого примерно только в 20—30 раз превышает сцепной вес паровоза.

При подъеме пути сопротивление, оказываемое поездом движению с равномерной скоростью, слагается из двух частей: из сопротивления качению и горизонтальной составляющей веса поезда.

Если угол подъема пути, измеренный в радианах, есть α, то горизонтальная составляющая веса поезда будет равна $P\cdot\sin\alpha$, или при малых углах подъема приближенно $P\cdot\alpha$ (принято подъемы пути измерять в «тысячных», т. е. указывать, какому числу тысячных долей радиана равняется α; общепринятое обозначение одной тысячной: $1^0/_{00}$). Нормально подъемы на железнодорожных магистралях не превышают 8—$9^0/_{00}$; на подъездных железнодорожных ветках встречаются подъемы до $40^0/_{00}$.

На сопротивлении качению сказывается трение катания и трение в осях. Трение скольжения в осях сказывается тем слабее, чем больше радиус колеса R в сравнении с радиусом оси (цапфы) r. В итоге сопротивление качению поезда или повозки при суммарном весе P равно

$$F_{\text{сопр}} = k_{\text{сопр. кач}}\cdot P,$$

где

$$k_{\text{сопр. кач}} = \frac{k_{\text{кат}}}{R} + \frac{k_{\text{смаз. осей}}\cdot r}{R}.$$

При подъеме пути сопротивление возрастает на величину $P\cdot\sin\alpha$.

Приводим *коэффициенты сопротивления качению повозок* по различным дорогам (при обычном радиусе колес, нормальной смазке осей и небольшой для данного вида повозки скорости движения):

Вагоны по железнодорожным рельсам	0,003—0,005
Трамваи по рельсам городских железных дорог . .	0,005—0,007
Экипажи с железными шинами по асфальтовой дороге	0,015
» » резиновыми » » » »	0,025
» » железными » » булыжной мостовой	0,03—0,05
» » » » » грунтовой дороге .	0,08—0,16

§ 27. Удар

Ударом называют внезапное изменение состояния движения тела вследствие столкновения его с другим телом. Во время удара оба тела претерпевают изменение формы (деформацию). Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного

движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации и в той или иной мере в энергию молекулярного движения; удар приводит к передаче и, вообще говоря, к перераспределению энергии между соударяющимися телами.

Процесс удара можно разделить на две фазы. В течение первой фазы происходит сближение тел; оба тела производят работу против сил реакции; их общая кинетическая энергия уменьшается; относительная скорость уменьшается до нуля. Вслед за этим наступает вторая фаза: телá начинают удаляться друг от друга, восстанавливая свою форму, при этом реакции совершают положительную работу, кинетическая энергия системы растет, относительная скорость, переменив знак, возрастает по абсолютной величине, наконец, телá отделяются, и этим заканчивается процесс удара.

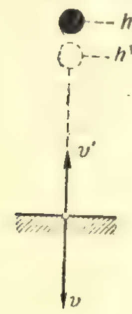


Рис. 41. К определению ε по отскоку шарика.

Наблюдения показывают, что относительная скорость после удара v' не достигает своей прежней численной величины v. Это объясняется тем, что на практике мы никогда не имеем дела с идеально упругими телами и идеально гладкими поверхностями. Отношение численной величины нормальной (по отношению к поверхности соприкосновения) составляющей относительной скорости после удара к ее величине до удара называют *коэффициентом восстановления* $\varepsilon = \frac{v'_n}{v_n}$.

Коэффициент восстановления проще всего можно определить, наблюдая высоту отскока шарика при падении его на горизонтальную плоскость. Если упругий шарик падает с высоты h на упругую горизонтальную плоскость (рис. 41), то

$$\varepsilon = \frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{2gh'}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h'}{h}}.$$

Приводим *значения* ε *для некоторых материалов* по наиболее точным измерениям В. В. Райковского (1952):

Алюминий об алюминий	0,23
Бронза о бронзу	0,4
Чугун о чугун	0,6
Сталь о сталь	0,7
Пластмасса полистирол о сталь	0,95

Если для сталкивающихся тел $\varepsilon = 0$, то такие тела называют абсолютно неупругими.

Если $\varepsilon = 1$, то сталкивающиеся тела носят название абсолютно упругих. В действительности для всех тел коэффициент ε имеет

значения, заключенные между 0 и 1. Однако на практике в ряде случаев можно с большой точностью использовать идеализацию абсолютно упругих и абсолютно неупругих тел.

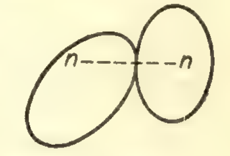


Рис. 42. Линия удара *nn*.

Прямую *nn*, проходящую через точку соприкосновения (рис. 42) и нормальную к поверхности их соприкосновения, называют *линией удара*. Когда линия удара проходит через центры тяжести обоих тел, то удар называют *центральным*. (Удар между однородными шарами всегда будет центральным.)

Если до удара оба тела двигались по линии удара, удар называется *прямым*, в противном случае — *косым*.

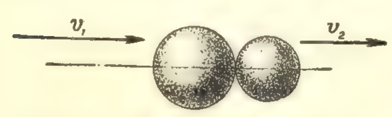


Рис. 43. Прямой центральный удар шаров.

Для прямого центрального удара тел с массами m_1 и m_2 (рис. 43), имевших до удара скорости v_1 и v_2, а после удара — скорости v_1' и v_2', по закону сохранения количества движения

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'. \quad (3)$$

Удар абсолютно неупругих тел ($\varepsilon=0$). В этом случае оба тела движутся после удара как одно целое, с одной и той же скоростью $v_1'=v_2'=u$, поэтому из выражения (3)

$$u=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}. \quad (4)$$

Так как при ударе неупругих тел они деформируются и эта деформация не восстанавливается, то часть кинетической энергии теряется: она идет на работу деформации. До удара кинетическая энергия была $\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}$, а после удара она стала $\frac{(m_1+m_2)u^2}{2}$, или, подставляя значение u из формулы (4): $\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{2(m_1+m_2)}$.

Следовательно, потеря кинетической энергии, или *работа деформации*, равна

$$E_{деф}=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}-\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{2(m_1+m_2)}=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2. \quad (5)$$

Для случая, чаще всего встречающегося на практике, а именно, когда одно из тел, например первое, до удара неподвижно ($v_1=0$), обозначая кинетическую энергию ударяющегося тела через $E\left(=\frac{m_2v_2^2}{2}\right)$, из (5) получаем

$$E_{деф}=E\frac{m_1}{m_1+m_2}. \quad (5а)$$

На практике применяют удар для работ двоякого рода. Работы первого рода состоят в изменении формы тел (деформации), например при ковке, чеканке и штамповке металла, при раздроблении тел и т. д. Из приведенной формулы видно, что в этом случае выгодно, чтобы масса неподвижного тела (m_1) была больше массы ударяющего тела (m_2) (поэтому, в частности, наковальни делают возможно более массивными).

Работы второго рода состоят в перемещении тел после удара и преодолении при этом сопротивлений, как, например, при забивке свай в землю, вбивании гвоздей, клиньев и т. д. В этом случае используется энергия $E - E_{деф}$ и выгодно, чтобы масса неподвижного тела была мала в сравнении с массой ударяющего тела.

Удар абсолютно упругих тел ($\varepsilon = 1$). При ударе упругих тел к концу первой фазы удара, которую можно назвать *фазой сжатия*, скорости обоих тел, как и при неупругом ударе, принимают одинаковые значения. Следовательно, изменение (алгебраическое приращение) скорости первого тела будет $u - v_1$, а второго $u - v_2$. Так как в течение второй фазы (*фазы восстановления*) импульсы взаимных реакций тел будут вследствие полной упругости и полного исчезновения деформации такие же, как и в течение первой фазы, то и изменения (алгебраические приращения) скоростей тел в течение этой второй фазы будут такие же, как и в течение первой. Поэтому полное приращение скорости первого тела к концу удара будет $2(u - v_1)$, а второго тела $2(u - v_2)$; скорости тел после удара будут:

$$v_1' = v_1 + 2(u - v_1) = 2u - v_1, \quad v_2' = v_2 + 2(u - v_2) = 2u - v_2.$$

Подставив сюда вместо u его значение из формулы (4), получим:

$$v_1' = \frac{2m_2v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{2m_1v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. \qquad (6)$$

Эти соотношения можно получить также, присоединяя к (3) уравнение сохранения кинетической энергии соударяющихся абсолютно упругих тел.

Из выражения (6) следует, что:

Когда *массы обоих тел равны* ($m_1 = m_2$), то *после удара они обмениваются своими скоростями* ($v_1' = v_2$ и $v_2' = v_1$). В случае, если одно тело до удара было в покое, то после удара двигавшееся тело остановится, а первоначально покоящееся будет двигаться со скоростью ударившего тела.

Когда масса одного из тел, находящегося в покое, *несравненно больше массы другого* (например, $m_1 \gg m_2$), то неподвижное большое тело, получившее удар, останется в покое, а ударившее его малое тело отскочит от него с первоначальной скоростью в противоположную сторону ($v_1' = 0$ и $v_2' = -v_2$).

Среди других вопросов, связанных с ударом, интересным является также вопрос о времени соударения (продолжительности удара).

Герц (1881 г.), исходя из теории упругости, предложил теорию деформации тел при ударе, в которой решается также вопрос и о времени соударения. Для характеристики порядка величин приведем один результат расчета: для двух латунных шариков диаметром около 2½ *см* при относительной скорости около 7 *см/сек* продолжительность удара получается порядка двух десятитысячных долей секунды, а при скорости 7 *м/сек* — около одной десятитысячной доли секунды.

Опыты Гамбургера (1886 г.) и русских исследователей Нелюбова (1902 г.) и Динника (1909 г.) дали хорошее совпадение с теорией Герца для стальных шаров; к мало упругим и неупругим телам теория Герца не применима.

Для иллюстрации влияния масс и размеров шаров на время удара интересно также провести такое сопоставление: в то время как при обычных условиях опыта время соударения двух стальных шариков составляет десятитысячные доли секунды, процесс удара двух стальных шаров, имеющих размеры Земли, при начальной скорости 1 *км/сек* длился бы несколько часов.

ГЛАВА VI

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 28. Законы Кеплера

Еще в глубокой древности наблюдателями неба было замечено, что в отличие от остальных звезд, сохраняющих почти неизменно в течение столетий свое взаимное расположение, планеты описывают среди звезд сложные траектории петлеобразного типа.

Выразитель взглядов древнегреческой науки на мироздание Клавдий Птолемей считал Землю расположенной в центре вселенной и для объяснения петлеобразного движения планет предположил, что каждая из планет движется по малому кругу (эпициклу), в то время как центр этого эпицикла равномерно движется по второму, большому кругу, в центре которого находится Земля.

Эта птолемеева *геоцентрическая система мира* при поддержке католической церкви господствовала в науке почти полторы тысячи лет.

В самом начале XVI в. польский ученый Николай Коперник в тайне от всех, кроме друзей, приступил к составлению своего знаменитого труда «Об обращении небесных кругов». Этим трудом Коперник ниспроверг птолемееву систему и обосновал *гелиоцентрическую систему*, показав, что астрономические наблюдения просто и точно объясняются движением Земли, как и других планет, вокруг Солнца и суточным вращением Земли.

Только к концу жизни, после долгих колебаний и опасений, что его теория покажется невероятной и вызовет преследования со стороны церкви, Коперник решился опубликовать свой труд.

Коперник умер в 1543 г. После его смерти в течение еще многих десятилетий самые образованные люди смотрели на теорию Коперника как на занимательную фантазию, а церковь, поняв антирелигиозное значение системы Коперника, жестоко обрушилась на немногочисленных его последователей.

В начале XVII в. Иоганн Кеплер после почти двадцатилетних вычислений установил законы истинного движения планет. Эти

законы он сформулировал следующим образом (первые два в 1609 г., третий в 1619 г.).

Первый закон Кеплера: *планеты обращаются вокруг Солнца по плоским кривым, представляющим собой эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

Второй закон Кеплера: *радиус-вектор данной планеты в равные времена описывает равные площади*, или, иначе, *секториальная скорость данной планеты есть величина постоянная.*

Рисунок 44 графически поясняет кеплеров закон площадей. Следует, однако, иметь в виду, что эллиптические орбиты планет в действительности несравненно меньше отличаются от окружностей, чем эллипс, изображенный на рис. 44.

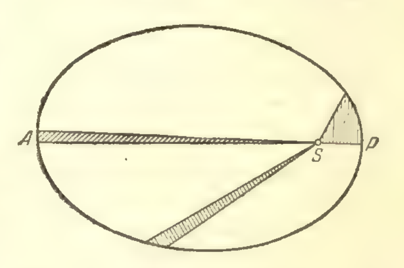


Рис. 44. Планеты обращаются вокруг Солнца так, что линия, проведенная от Солнца к планете, описывает равные площади в равные промежутки времени. P — перигелий, A — афелий.

Третий закон Кеплера: *квадраты сидерических времен*[1]) *обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.*

Уже в первом своем сочинении («Новая астрономия», 1609) Кеплер высказал соображения о существовании всеобщего тяготения тел. Аналогичные соображения были высказаны французским математиком П. Ферма. В шестидесятых и семидесятых годах XVII в. Борелли и вслед за ним Роберт Гук пытались вычислить силу тяготения и исследовать, как она зависит от расстояния между телами (Барелли в 1666 г.— по движению спутников Юпитера, Гук в 1674 г.— по зависимости веса от высоты местности; эту зависимость Гук пробовал, но без успеха, определить экспериментально).

В 1684—1686 гг. Ньютон с полной сторогостью показал, что из совокупности законов Кеплера и второго закона динамики можно (не делая никаких дополнительных предположений) вывести, что планеты притягиваются Солнцем *порпорционально массам планет и обратно пропорционально квадратам расстояний от Солнца.* Далее Ньютон показал, что те же самые кеплеровы законы управляют движением спутников Юпитера и Сатурна вокруг этих планет. Это и дало Ньютону основание сделать заключение, что закон

[1]) *Сидерическим*, или звездным, периодом обращения планеты называется продолжительность полного оборота планеты вокруг Солнца в отличие от *синодического* периода обращения — промежутка времени между двумя одинаковыми конфигурациями планеты и Земли.

тяготения имеет всеобщую приложимость. Свое обобщение законов Кеплера в законе тяготения Ньютон испытал, вычислив движение комет и движение Луны вокруг Земли, осложняемое воздействием Солнца на Луну [1]).

§ 29. Ньютонов закон тяготения

Ньютонов закон всемирного тяготения состоит в следующем: *Между всякими двумя материальными частицами действует сила взаимного тяготения, прямо пропорциональная массам обеих частиц* (иначе говоря, пропорциональная произведению этих масс) *и обратно пропорциональная квадрату расстояния между этими частицами*. Так, если m и m' — массы двух частиц, находящихся на расстоянии r друг от друга, то сила их взаимного тяготения F выражается формулой

$$F = f\frac{mm'}{r^2}, \tag{1}$$

где f есть постоянная величина, зависящая по числовому значению от выбора единиц, в которых выражаются величины, входящие в формулу. Величина f носит название *гравитационной* [2]) *постоянной*. Если массы m и m' измерены в граммах, а расстояние r — в сантиметрах, то $f = 6{,}67\cdot 10^{-8}$ (1 *г* массы притягивает 1 *г* массы на расстоянии 1 *см* с силой $6{,}67\cdot 10^{-8}$ дин). Гравитационная постоянная f

---

[1]) Если бы планеты двигались по окружностям, а не по эллипсам, то из одного третьего закона Кеплера сразу можно было бы заключить, что планеты тяготеют к Солнцу обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца. Действительно, обозначая радиусы орбит двух планет через r_1 и r_2, окружные скорости планет через v_1 и v_2, центростремительные ускорения через j_1 и j_2, времена обращения через T_1 и T_2, центростремительные силы через F_1 и F_2, имеем:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}, \qquad j_1 = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}$$

и аналогичные соотношения для v_2 и j_2. Следовательно,

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{\left(\dfrac{F_1}{m_1}\right)}{\left(\dfrac{F_2}{m_2}\right)} = \frac{r_1}{T_1^2} : \frac{r_2}{T_2^2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right).$$

По третьему закону Кеплера квадраты времен обращения двух планет относятся, как кубы их расстояний: $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$. Стало быть, $\frac{(F_1/m_1)}{(F_2/m_2)} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$, откуда

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{r_1^2} : \frac{m_2}{r_2^2}.$$

[2]) От латинского gravitas — тяжесть.

была определена опытным путем; каким образом, об этом будет сказано ниже.

Каждая частица камня, лежащего на поверхности Земли, притягивается всеми частицами земного шара. Равнодействующая всех этих сил обусловливает вес камня по отношению к Земле. Точно так же каждая частица Луны притягивается каждой частицей Земли; равнодействующая этих сил представляет собой силу тяготения Луны и Земли. Именно эта сила и удерживает Луну около Земли; если бы эта сила вдруг исчезла, то Луна удалилась бы от Земли, двигаясь по прямой, касательной к ее орбите.

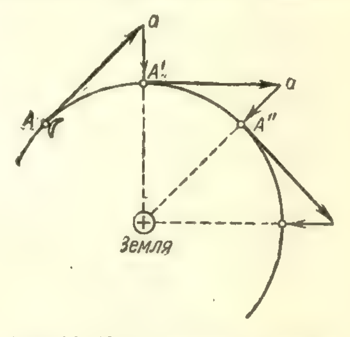


Рис. 45. Луна движется вокруг Земли под действием силы инерции и силы тяготения к Земле.

Движение Луны вокруг Земли можно рассматривать как результат сложения двух независимых движений: 1) движения по инерции, которое должно было бы увлечь Луну по прямой Aa, касательной к ее орбите (рис. 45); 2) «падения» Луны к Земле, вызываемого действием тяготения; за тот промежуток времени, в течение которого Луна, двигаясь по инерции, должна была бы переместиться из точки A в точку a, она вследствие «падения» к Земле приближается к Земле как раз на то расстояние aA', на которое она могла бы за это время удалиться от Земли. В результате Луна проходит путь AA', а в следующий промежуток времени путь $A'A''$ и т. д., т. е. движется (приблизительно) по окружности вокруг Земли.

Точно так же сила тяготения между Землей и Солнцем удерживает Землю на ее орбите при движении Земли вокруг Солнца. То же справедливо и для всех других планет и их спутников. Тяготение между звездами вследствие громадной удаленности звезд друг от друга не столь велико, чтобы легко было обнаружить его влияние на движение звезд.

Сила тяготения между двумя какими-либо телами есть результирующая сил притяжения между всеми попарно взятыми частицами, из которых слагаются эти тела. Вычисление этой результирующей силы иногда представляет собой значительные трудности. В математической физике разработаны способы быстрого решения подобных задач (эти способы основаны на весьма важной для математической физики «теории потенциала» и на применении интегрального исчисления).

В некоторых простых случаях результирующая сила тяготения может быть определена легко. Так, например, оказывается, что два шара (если в каждом из них вещество распределено равномерно)

притягивают друг друга так, как если бы вся их масса была сосредоточена в их центрах. Следовательно, в этом случае для вычисления результирующей силы можно воспользоваться формулой (1), подразумевая в ней под m и m' уже не массу отдельных частиц, из которых слагается вещество шаров, но всю массу каждого из шаров и считая, что r означает расстояние между центрами шаров.

Это упрощение расчета не приводит к ошибке также и в том случае, когда вещество шара (или даже обоих шаров) распределено внутри шара с плотностью, неодинаковой для различных расстояний от центра шара, так что шар слагается из ряда концентрических слоев различной плотности; важно только, чтобы в каждом таком концентрическом слое вещество было распределено равномерно. Этому требованию приблизительно удовлетворяет, по-видимому, внутреннее строение Земли, Луны, Солнца, планет. Поэтому силу тяготения между небесными телами можно вычислять, непосредственно используя формулу (1).

Из ньютонова закона тяготения можно вывести кеплеровы законы движения планет.

Следует отметить, что тяготение между планетами весьма мало́ в сравнении с тяготением планет к Солнцу, так как масса Солнца в 750 раз превышает массу всех планет, вместе взятых. Поэтому тяготение между планетами мало влияет на обращение планет вокруг Солнца и, не изменяя общей картины движения планет, сказывается только в некоторых частностях, изучению которых посвящен особый отдел небесной механики, носящий название «теории возмущений».

Законы Кеплера относятся к той системе ориентировки, когда мы считаем неподвижным центр Солнца. В действительности центр Солнца обращается по эллипсу вокруг центра масс солнечной системы. Если считать неподвижным центр масс солнечной системы, то обращение планет тоже происходит по эллипсу, в фокусе которого находится центр масс солнечной системы. Таким образом, кеплеров закон эллиптичности планетных орбит является справедливым и для обращения планет вокруг центра Солнца и для обращения планет вокруг центра масс солнечной системы. Напротив, кеплеров закон площадей справедлив только для движения планет относительно центра Солнца и не является справедливым для обращения планет вокруг центра масс солнечной системы.

Масса и размеры Солнца столь велики, что центр масс солнечной системы удален от центра Солнца на расстояние, всего в 2,15 раза превышающее радиус Солнца (радиус Солнца 695 000 *км*; расстояние центра Солнца от центра масс солнечной системы — около 1 486 000 *км*).

Строгий вывод первого и третьего законов Кеплера из закона тяготения приводится в курсах теоретической физики и небесной механики. При этом обнаруживается, что движение под действием тяготения возможно не только по эллипсу и окружности, но также

и по параболе и по гиперболе. Например, некоторые кометы (не принадлежащие к солнечной системе, но временно вовлеченные в нее) описывают вокруг Солнца гиперболу.

Что касается третьего закона Кеплера, то строгий вывод этого закона из закона тяготения показывает, что он не вполне точен, а именно: по третьему закону Кеплера отношение куба большой полуоси орбиты a^3 к квадрату времени обращения T^2 должно было бы быть величиной, одинаковой для всех планет. В действительности это отношение постольку можно считать одинаковым, поскольку является возможным пренебречь массой планеты m в сравнении с массой Солнца M; точное выражение таково:

$$\frac{a^3}{T^2} = f\frac{M}{4\pi^2}\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Чтобы воспользоваться законом тяготения для вычислений, необходимо знать величину гравитационной постоянной f, которая в качестве коэффициента пропорциональности входит в формулу (1). Для этого, очевидно, необходимо хотя бы однажды точно измерить силу тяготения между двумя какими-либо известными массами m и m', например между двумя шарами, удаленными друг от друга на точно измеренное расстояние r; после того как такое измерение произведено, величину гравитационной постоянной легко вычислить по формуле (1), подставив в нее определенные опытным путем значения m, m', r и F.

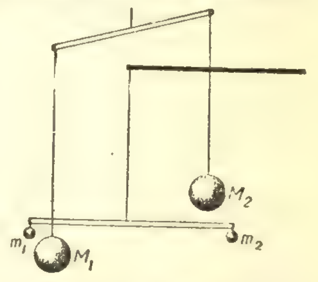


Рис. 46. Крутильные весы Кэвендиша для определения гравитационной постоянной.

Гравитационная постоянная впервые была экспериментально определена в 1798 г. Кэвендишем, который измерил силу тяготения между свинцовыми шарами посредством прибора, носящего название *крутильных весов*; схематически главная часть этого прибора показана на рис. 46. В ящике, установленном на прочном фундаменте и защищенном от колебаний температуры, к вделанной в крышку оси, которую можно было вращать, был прикреплен горизонтальный стержень; к концам этого стержня были привешены два массивных свинцовых шара M_1 и M_2. На концах другого стержня были подвешены еще два небольших свинцовых шарика m_1 и m_2.

Поворачивая ось стержня с тяжелыми шарами, можно было наблюдать, что при приближении тяжелых шаров к легким стержень с легкими шарами поворачивался на некоторый угол навстречу тяжелым шарам. Измерив предварительно сопротивление, которое оказывала закручиванию нить, служившая для подвеса стержня с легкими шарами, Кэвендиш по углу закручивания нити имел возмож-

ность вычислить суммарную силу тяготения $2F$ между шарами M_1 и m_1 и между шарами M_2 и m_2. Точное определение расстояния между центрами шаров не представляло труда. Вычисленное Кэвендишем значение гравитационной постоянной только на 1% отличалось от того, которое было получено на основании последующих опытов.

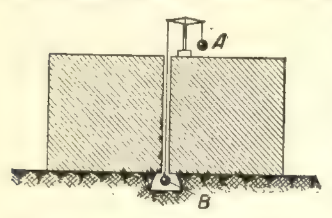


Рис. 47. Схема опытов Рихарца по определению гравитационной постоянной.

В 1898 г. Рихарц, по идее Жолли, применил другой способ для вычисления гравитационной постоянной. Схема опытов Рихарца показана на рис. 47. К концам коромысла весов подвешены два шара A и B, которые имеют (если учитывать также и нити, на которых они подвешены) равные массы. Эти шары должны были бы уравновешивать друг друга, но один из них A находится *над* свинцовой плитой в 100 *т*, которая своим притяжением увеличивает вес этого шара, а другой шар B находится *под* свинцовой плитой, которая своим притяжением на ту же величину уменьшает вес этого шара; поэтому коромысло весов отклоняется — шар A перевешивает. По величине отклонения коромысла весов можно судить о силе тяготения между шарами и свинцовой плитой. Этот способ определения гравитационной постоянной считается наиболее точным.

Найдено, что (в единицах *CGS*) $f=6{,}670\cdot10^{-8}$.

§ 30. Зависимость веса и ускорения силы тяжести от высоты и географической широты местности

Как известно, вес представляет собой силу, с которой тело давит на опору вследствие тяготения к Земле.

По второму закону механики вес P какого-либо тела связан с ускорением g свободного падения и с массой m этого тела соотношением

$$P=mg. \tag{2}$$

Вес тела обусловлен результирующей всех сил притяжения между каждой частицей тела и Землей. Поэтому вес всякого тела должен быть пропорционален массе этого тела, как это и есть в действительности. Если пренебречь влиянием суточного вращения Земли, то по ньютонову закону тяготения вес определяется формулой

$$P=f\,\frac{Mm}{R^2}, \tag{3}$$

где f — гравитационная постоянная, M — масса Земли, R — расстояние тела от центра Земли. Формула (3) показывает, что вес тела уменьшается по мере удаления от земной поверхности. Средний

радиус Земли равен 6371 *км*, поэтому при поднятии на 1 *км* вес уменьшается в отношении $\left(\frac{6371}{6371+1}\right)^2 \approx 1 - \frac{2}{6371}$, т. е. на 0,00032 своей величины.

Так как земная кора по плотности неоднородна, то в местностях, под которыми в глубине земной коры лежат плотные породы, сила тяжести несколько больше, чем в местностях (при той же географической широте), ложе которых составляют менее плотные породы. Массивы гор вызывают отклонение отвеса в сторону гор.

Сопоставляя уравнения (2) и (3), получаем выражение для ускорения силы тяжести без учета влияния вращения Земли:

$$g = f\frac{M}{R^2}. \quad (4)$$

Каждое тело, спокойно лежащее на поверхности Земли, участвуя в суточном вращении Земли, очевидно, имеет общее с данной местностью центростремительное ускорение $\boldsymbol{j}_r$, лежащее в плоскости, параллельной экватору, и направленное к оси вращения (рис. 48). Сила $\boldsymbol{F}$, с которой Земля притягивает какое-либо тело, спокойно лежащее на ее поверхности, частью проявляется статически в давлении $\boldsymbol{P}$, которое тело оказывает на опору (эту составляющую и называют «весом» $\boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{P}$); другая геометрическая составляющая $\boldsymbol{F}_d$ силы $\boldsymbol{F}$ проявляется динамически, сообщая телу центростремительное ускорение, вовлекающее его в суточное вращение Земли. Для экватора это ускорение является наибольшим; для полюсов оно равно нулю. Поэтому, если какое-либо тело перенести с полюса на экватор, то оно несколько «потеряет в весе».

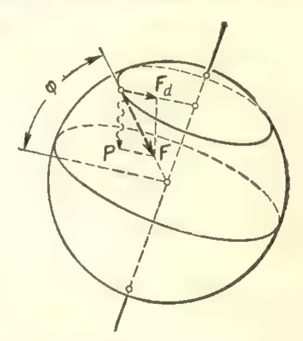


Рис. 48. Вследствие вращения Земли сила притяжения к Земле имеет статическую (вес P) и динамическую составляющие.

Если бы Земля имела точно шарообразную форму, то потеря в весе на экваторе была бы равна:

$$\Delta P = F_d = \frac{mv^2}{R},$$

где v — окружная скорость на экваторе. Пусть T означает число секунд в сутках, тогда

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \text{и} \quad \Delta P = 4\pi^2 R \frac{m}{T^2}.$$

Отсюда, учитывая, что $P = mg$, находим относительную потерю в весе:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{4\pi^2 R}{gT^2} = 0{,}0034.$$

Следовательно, если бы Земля имела точно шарообразную форму, то каждый килограмм массы, перенесенный с полюса Земли на экватор, потерял бы в весе примерно 3½ *г* (это можно было бы обнаружить, производя взвешивание на пружинных весах). Действительная потеря в весе еще больше (около $5^1/_3$ *г*), так как Земля имеет несколько сплюснутую форму и ее полюсы расположены ближе к центру Земли, чем местности, лежащие на экваторе.

Центростремительное ускорение суточного вращения лежит в плоскости, параллельной экватору (рис. 48); оно направлено под углом φ к радиусу, проведенному из данной местности в центр Земли (φ — широта местности). Центростремительную силу $\boldsymbol{F}_d$ мы рассматриваем как одну составляющую силы тяготения $\boldsymbol{F}$, вес $\boldsymbol{P}$ — как другую геометрическую составляющую той же силы $\boldsymbol{F}$. Следовательно, направление *отвесной линии* для всех местностей, кроме экватора и полюсов, не совпадает с направлением прямой, проведенной к центру Земли. Однако угол между ними мал, потому что центростремительная составляющая силы тяготения мала в сравнении с весом. Происшедшее вследствие суточного вращения сжатие Земли как раз таково, что отвесная линия (а не прямая, проведенная к центру Земли) всюду перпендикулярна к поверхности Земли. По форме Земля представляет собой *трехосный эллипсоид*.

Наиболее точные *размеры земного эллипсоида*, вычисленные под руководством проф. Ф. Н. Красовского, таковы:

средний радиус (радиус шара, равновеликого по объему земному эллипсоиду)	6371,118 *км*
полярное сжатие	1:298,3
экваториальное сжатие Земли	1:300

Для вычисления ускорения силы тяжести g в зависимости от географической широты местности φ, а следовательно, и для определения веса тел на высоте уровня моря ($P = mg$) Международным геодезическим конгрессом в 1930 г. принята формула

$$g = 978{,}049\,(1 + 0{,}005288 \sin^2 \varphi - 0{,}000006 \sin^2 2\varphi).$$

Приводим значения ускорения силы тяжести для различных широт (на высоте уровня моря):

φ	g в *см/сек²*	φ	g в *см/сек²*
0°	978,05	50°	981,08
10	978,20	60	981,92
20	978,65	70	982,61
30	979,34	80	983,06
40	980,18	90	983,22

На широте 45° («нормальное ускорение») $g = 980{,}665$ *см/сек²*.

Рассмотрим, как изменяется сила тяжести при углублении внутрь Земли. Пусть R_0 — средний радиус земного сфероида. Рассмотрим силу тяготения в точке K, расположенной на расстоянии $R<R_0$ от центра Земли.

Притяжение в этой точке определяется суммарным действием внешнего шарового слоя толщиной R_0-R и внутренней сферы радиуса R. Точный математический расчет показывает, что шаровой слой не оказывает никакого действия на материальные точки, расположенные внутри него, так как силы притяжения, вызываемые отдельными его частями, взаимно уравновешиваются. Таким образом, остается только действие внутреннего сфероида радиуса $R<R_0$ и, следовательно, меньшей массы, нежели масса земного шара.

Если бы земной шар был однороден по плотности, то масса внутри сферы определилась бы выражением

$$m=\frac{4}{3}\pi R^3\rho,$$

где ρ — средняя плотность Земли. В этом случае ускорение силы тяжести, численно равное силе, действующей на единичную массу в поле тяготения, будет равно

$$g=f\frac{m}{R^2}=\frac{4}{3}\pi f\cdot\frac{R^3}{R^2}\cdot\rho=\frac{4}{3}\pi f\rho\cdot R$$

и, следовательно, будет убывать линейно по мере приближения к центру Земли. Ускорение земного притяжения имеет максимальное значение на поверхности Земли.

Однако вследствие того, что ядро Земли состоит из тяжелых металлов (железа, никеля, кобальта) и имеет среднюю плотность более 9 *г/см*³, тогда как средняя плотность земной коры 2,5 *г/см*³, то вблизи поверхности Земли g вначале даже несколько возрастает с глубиной и достигает своего максимального значения на глубине около 40 *км*, т. е. на границе верхних слоев земной коры и рудной оболочки Земли. Далее сила тяжести начинает убывать по мере приближения к центру Земли, но несколько медленнее, чем того требует линейная зависимость.

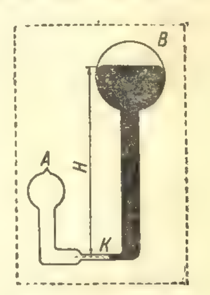


Рис. 49. Схема «универсального барометра» Ломоносова.

Представляет значительный интерес история одного из приборов, предназначенных для измерения ускорения силы тяжести. В 1940 г. на международной конференции гравиметристов подвергался рассмотрению прибор немецкого инженера Гаалька. В процессе прений выяснилось, что этот прибор принципиально ничем не отличается от так называемого «универсального барометра», сконструированного Ломоносовым и описанного им подробно в работе «Об отношении количества материи и веса», опубликованной в 1757 г. Прибор Ломоносова был устроен следующим образом (рис. 49).

Два шара A и B соединены капиллярной трубкой K. В прибор налита ртуть так, что в шаре B над ртутью пустота, а в шаре A — воздух при давлении p, близком к атмосферному (при изготовлении прибор сначала наполняется ртутью через отверстие в шаре A, которое потом запаивается). Прибор заключен в футляр, наполняемый тающим льдом, так что давление воздуха в шаре A остается постоянным. Высота ртутного столба H определяется выражением $H=\frac{p}{\rho g}$. Она зависит только от величины ускорения свободного падения g. Вследствие весьма большой величины отношения диаметра шара B к диаметру капилляра K (≈ 20000) даже малое понижение уровня ртути в шаре B вызовет сильное изменение границы ртути в капилляре K, что позволяет учитывать весьма незначительные изменения ускорения свободного падения.

§ 31. Вычисление массы Солнца, Земли и планет

Массу Солнца M можно найти из условия, что тяготение Земли к Солнцу проявляется в качестве центростремительной силы, удерживающей Землю на ее орбите (орбиту Земли для упрощения мы будем считать окружностью):

$$f \cdot \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Здесь m — масса Земли, r — среднее расстояние Земли от Солнца. Обозначая продолжительность года в секундах через T, имеем: $v = \frac{2\pi r}{T}$. Таким образом,

$$f \frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

откуда, подставляя числовые значения f, T и r ($r \cong 149\,500\,000$ *км* $= 149{,}5 \cdot 10^{11}$ *см*), находим массу Солнца:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{f \cdot T^2} = 1{,}98 \cdot 10^{33} \text{ г} = 1{,}98 \cdot 10^{27} \text{ т}.$$

Ту же формулу можно применить для вычисления массы какой-либо планеты, имеющей спутника. В этом случае r — среднее расстояние спутника от планеты, T — время его обращения вокруг планеты, M — масса планеты. В частности, по расстоянию Луны от Земли и числу секунд в месяце указанным способом можно определить массу Земли.

Массу Земли можно определить также, приравнивая вес какого-либо тела к тяготению этого тела к Земле, за вычетом той составляющей тяготения, которая проявляется динамически, сообщая данному телу, участвующему в суточном вращении Земли, соответствующее центростремительное ускорение (§ 30). Необходимость указанной поправки отпадает, если для такого вычисления массы Земли мы воспользуемся тем ускорением тяжести, которое наблюдается на полюсах Земли ($g' = 983{,}22$). Тогда, обозначив через R средний радиус Земли ($R = 6371{,}2$ *км*) и через M — массу Земли, имеем:

$$f \cdot \frac{mM}{R^2} = mg',$$

откуда масса Земли

$$M = \frac{R^2 \cdot g'}{f} = 5{,}98 \cdot 10^{27} \text{ г} = 5{,}98 \cdot 10^{21} \text{ т}.$$

Если среднюю плотность земного шара обозначить через $\rho_{\text{средн}}$, то, очевидно, $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho_{\text{средн}}$. Отсюда средняя плотность земного шара получается равной 5,5 *г/см*³.

Средняя плотность минеральных пород верхних слоев Земли равна примерно 2,5 *г/см*³. Стало быть, ядро земного шара должно иметь плотность, значительно превышающую 5,5 *г/см*³.

Исследование вопроса о плотности Земли на различных глубинах было предпринято Лежандром и продолжено многими учеными. По выводам Гутенберга и Гаалька (1924 г.) на различных глубинах имеют место примерно следующие *значения плотности* Земли:

В центре земного шара (глубина 6370 *км*)	10—11 *г/см*³
На глубине 3000 *км*	6—9 »
» » 1200 »	4—5 »
» » 60 »	3,1—3,6 »
В поверхностном слое	2,5 »

Давление внутри земного шара, на большой глубине, по-видимому громадно. Многие геофизики считают, что уже на глубине 100 *км* давление должно достигать 20 000 атмосфер, т. е. 20 *т* на квадратный сантиметр. В ядре Земли, на глубине около 3000 и более километров, давление, возможно, достигает 1—2 млн. атмосфер.

Что касается температуры в глубине земного шара, то достоверно, что она выше 1100° С (температура лавы). В шахтах и буровых скважинах температура повышается в среднем на один градус на каждые 33 *м*. Предполагают, что на глубине около 100 *км* температура доходит до 1500—2000° и далее остается постоянной.

Полная теория движения планет, излагаемая в небесной механике, позволяет вычислить массу планеты по наблюдениям того влияния, которое данная планета оказывает на движение какой-либо другой планеты. В начале прошлого столетия были известны планеты Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран. Было замечено, что движение Урана обнаруживает некоторые «неправильности», которые указывали на то, что за Ураном находится ненаблюденная планета, влияющая на движение Урана. В 1845 г. французский ученый Леверье и независимо от него англичанин Адамс, исследовав движение Урана, вычислили массу и местоположение планеты, которую еще никто не наблюдал. Только после этого планета была найдена на небе как раз в том месте, которое было указано вычислениями; эта планета была названа Нептуном.

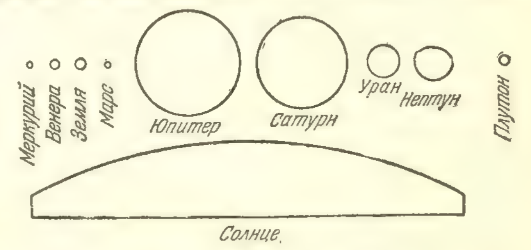


Рис. 50. Относительные размеры Солнца и планет.

В 1914 г. астроном Ловелл аналогичным путем предсказал существование еще одной планеты, находящейся еще дальше от Солнца, чем Нептун. Только в 1930 г. эта планета была найдена и названа Плутоном.

Основные сведения о больших планетах

Планета	Расстояние от Солнца (большая полуось орбиты в *км*)	Время обращения вокруг Солнца (в годах)	Масса планеты в сравнении с массой Земли¹)	Объем планеты в сравнении с объемом Земли	Радиус планеты (экваториальный) (в *км*)	Средняя плотность вещества планеты	Ускорение тяжести на поверхности планеты по сравнению с земным
Меркурий	57 873 000	0,24	0,055	0,05	2 421	5,6	0,38
Венера	108 141 000	0,61	0,817	0,88	6 096	5,16	0,89
Земля	149 504 000	1	1	1	6 378	5,53	1
Марс	227 798 000	1,88	0,107	0,15	3 392	3,95	0,38
Юпитер	777 841 000	11,86	318	1312	71 373	1,34	2,54
Сатурн	1 426 097 000	29,46	95,0	762	60 399	0,71	1,06
Уран	2 869 132 000	84,02	14,6	59	24 847	1,36	0,96
Нептун	4 495 692 000	164,79	17,3	46	26 499	2,22	1,00
Плутон	5 899 051 000	247,7	0,94	1	6 400	5,2	0,94

¹) Масса Земли без Луны в 333 432 раза меньше массы Солнца. Масса Земли вместе с Луной в 329 390 раз меньше массы Солнца.

В приведенной таблице содержатся основные сведения о девяти больших планетах солнечной системы. Рис. 50 иллюстрирует относительные размеры Солнца и планет.

Кроме перечисленных больших планет, известно около 1300 весьма малых планет, так называемых астероидов (или планетоидов). Их орбиты в основном находятся между орбитами Марса и Юпитера.

§ 32. Потенциальная энергия и потенциал тяготения

Какова бы ни была природа сил взаимодействия (тяготение, электрическое или магнитное взаимодействие), потенциальную энергию взаимодействия тел (или частиц) измеряют как работу, производимую силами взаимодействия при расчленении системы тел (или частиц), т. е. при удалении их на бесконечно большое расстояние друг от друга. Так как при расчленении системы тяготеющих тел силы тяготения не производят работы, но, наоборот, приходится совершать работу против сил тяготения, то очевидно, что потенциальная энергия тяготения представляет собой величину отрицательную.

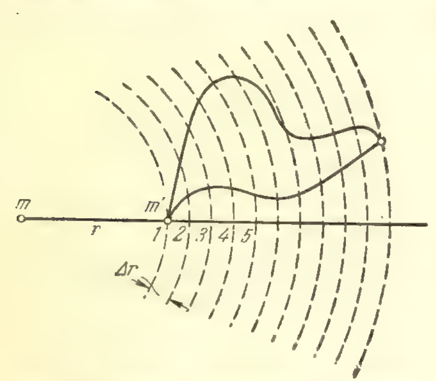


Рис. 51. Работа тяготения не зависит от пути перемещения.

Подсчитаем, чему равна потенциальная энергия взаимодействия двух частиц, массы которых m и m' и которые удалены друг от друга на расстояние r. По закону Ньютона эти частицы тяготеют друг к другу с силой $F = f\frac{mm'}{r^2}$. Мы должны вычислить работу, потребную для удаления частиц на бесконечно большое расстояние друг от друга. Покажем прежде всего, что эта работа не зависит от пути, по которому одну частицу удаляют от другой.

Допустим, что одна из частиц, например m, остается неподвижной; представим себе, что вокруг этой неподвижной частицы как центра проведено бесчисленное множество сфер с радиусами, постепенно возрастающими от r до бесконечности (рис. 51). Какова бы ни была форма траектории, по которой частицу m' удаляют от m, сила тяготения все время остается направленной по радиусу к m. Работа перемещения частицы m' по какой-либо сфере, в центре которой находится m, равна нулю, так как в этом случае сила тяготения перпендикулярна к элементу пути. Работу против тяготения приходится затрачивать только тогда, когда мы переводим частицу m' с одной сферы на другую, имеющую больший радиус.

При всех положениях частицы m' на сфере эта частица притягивается к частице m, находящейся в центре сферы, с одной и той же силой; концентрические сферы всюду удалены друг от друга на одинаковое расстояние; поэтому очевидно, что работа перемещения частицы с одной сферы на другую не зависит от направления радиуса, по которому мы перемещаем частицу m'.

Пусть кратчайшее расстояние между двумя смежными сферами есть Δr; работа перемещения частицы m' с одной сферы на другую по какому-либо радиусу будет равна $F \cdot \Delta r$; если мы перемещаем частицу m' не по радиусу, а под углом α к радиусу, то длина перемещения будет $\frac{\Delta r}{\cos \alpha}$, а сила, действующая в направлении перемещения, будет $F \cdot \cos \alpha$; таким образом, и в этом случае работа перемещения останется равной $F \cdot \Delta r$.

Любую траекторию, по которой удаляют частицу m' от m, можно представить себе состоящей из бесконечно малых перемещений двух родов: из перемещений по сферам и перемещений с одной сферы на другую. Для перемещений первого рода работа равна нулю; для перемещений второго рода она одинакова, в каком бы месте и по какому бы направлению мы ни производили перемещение с одной сферы на смежную.

Отсюда мы заключаем, что, по какой бы траектории мы ни переводили частицу m' из одного положения в другое по отношению к m, работа тяготения (или против тяготения) для всех траекторий будет одинакова.

Указанная работа зависит только от начального и конечного расстояний между частицами и не зависит от пути, по которому частицы из одного расположения перемещаются в другое расположение. Когда частицы сближаются, тяготение производит работу; когда частицы удаляются друг от друга, работа затрачивается против тяготения (работа тяготения отрицательна); если в итоге перемещений частицы возвращены к первоначальной удаленности друг от друга, то работа, произведенная тяготением на одних участках пути (когда частицы сближались), окажется равной работе, затраченной против тяготения на других участках пути (когда частицы удалялись друг от друга); в этом случае суммарная работа тяготения алгебраически равна нулю.

Как было сказано в § 19, силы взаимодействия, работа которых не зависит от пути перемещения, называют *консервативными силами*. Мы видим, что всемирное тяготение является консервативной силой.

Итак, для вычисления потенциальной энергии взаимодействия частиц m и m' мы можем избрать любую траекторию удаления частицы m' в бесконечность. Пусть частица m' удаляется от m в направлении прямой, соединяющей начальные положения этих частиц; очевидно, что потребная для этого работа, т. е. потенци-

альная энергия со знаком минус, выразится суммой

$$-U = \sum_{r=r_0}^{r=\infty} f\frac{m\cdot m'}{r^2}\Delta r,$$

где r в различных членах суммы имеет постепенно возрастающее значение, соседние члены суммы весьма близки друг к другу и общее число членов (при $\Delta r = dr$) бесконечно велико. Как уже упоминалось (§ 18), суммы такого рода называют интегралом:

$$U = -\int_{r_0}^{\infty} f\frac{m\cdot m'}{r^2}dr.$$

Вышеприведенную сумму можно определить и не прибегая к интегральному исчислению. Работа, затрачиваемая для перемещения частицы m' на малое расстояние $\Delta r = r_2 - r_1$ (рис. 51), равна произведению среднего значения силы тяготения на длину перемещения; при указанном перемещении сила тяготения убывает от величины $f\frac{mm'}{r_1^2}$ до величины $f\frac{mm'}{r_2^2}$; в среднем силу тяготения на участке Δr можно принять равной $f\frac{mm'}{r_1 r_2}$; следовательно, работу можно записать так:

$$f\frac{mm'}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) = fmm'\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Аналогично работа, затрачиваемая на малое перемещение $r_3 - r_2$, равна $fmm'\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)$ и т. д. Очевидно, что когда мы возьмем сумму всех этих работ, то все промежуточные члены в этой сумме сократятся; останутся только первый и последний члены; но при $r = \infty$ последний член равен нулю. Таким образом,

$$-U = \sum_{r=r_0}^{r=\infty} f\frac{mm'}{r^2}\Delta r = f\frac{mm'}{r_0},$$

следовательно,

$$U = -f\frac{mm'}{r_0}. \qquad (5)$$

Потенциальная энергия тяготения двух частиц обратно пропорциональна расстоянию между частицами.

Пусть имеется система, состоящая из какого угодно числа частиц. Сила, действующая на любую из этих частиц со стороны остальных, векторно слагается из сил тяготения рассматриваемой частицы ко всем остальным частицам. В данном случае нам удобнее рассматривать не равнодействующую, а отдельные составляющие. Очевидно,

что работа, которую нужно затратить, чтобы удалить какую-либо из частиц в бесконечность, равна алгебраической сумме работ, затрачиваемых на преодоление тяготения этой частицы отдельно к каждой из остальных. Следовательно, потенциальная энергия какой-либо частицы m по отношению к системе частиц определяется формулой

$$U = -\sum f \frac{mm_i}{r_i}, \qquad (6)$$

где число членов под знаком суммы равно числу остальных частиц системы, m — масса рассматриваемой частицы, для которой мы вычисляем потенциальную энергию, m_i — масса любой другой частицы, r_i— расстояние рассматриваемой частицы от частицы m_i. Величины f и m как общие для всех членов суммы можно вынести за знак суммы; в связи с этим формулу (6) можно переписать так:

$$U = -fm \sum \frac{m_i}{r_i}. \qquad (6')$$

Как было упомянуто в § 29, однородные шары притягиваются так, как если бы вся их масса была сосредоточена в центре шара. Поэтому формулы (5) и (6) можно применять для вычисления потенциальной энергии тяготения шарообразных тел; в этом случае r означает расстояние между центрами шаров. В частности, выведенные формулы могут служить для вычисления потенциальной энергии тяготения планет к Солнцу.

Потенциальная энергия какого-либо тела m, расположенного на поверхности Земли, также выражается формулой (5). А именно,

$$U = -f \frac{Mm}{R},$$

где M — масса Земли и R — радиус Земли.

Когда некоторое тело поднимают над поверхностью Земли на высоту h над уровнем моря, то его потенциальная энергия, оставаясь отрицательной, численно убывает (знаменатель в приведенной формуле становится больше: $R+h$ вместо R). Если какая-либо отрицательная величина численно убывает, то это означает, что алгебраически она увеличивается (—2 больше, чем —3). При малых сравнительно с радиусом Земли высотах поднятия прирост потенциальной энергии поднимаемого тела как раз равен, как нетрудно убедиться, произведению веса на высоту поднятия. Действительно,

$$\Delta U = -f \frac{Mm}{R+h} - \left(-f \frac{Mm}{R}\right) = f \frac{Mm}{R} \cdot \frac{h}{R+h};$$

отсюда, если h мало в сравнении с R, то

$$\Delta U \approx f \frac{Mm}{R^2} \cdot h = P \cdot h,$$

где P — вес тела.

Какова причина всемирного тяготения? Этот вопрос до настоящего времени не имеет такого решения, которое можно было бы считать вполне общепринятым.

В физике после Ньютона в продолжение почти полутораста лет [1]) господствовал взгляд на всемирное тяготение как на некую «врожденную силу материи», действующую на расстоянии мгновенно и без участия посредствующей среды. Этот метафизический взгляд, позже всеми оставленный, получил название теории действия на расстоянии. Ньютон не был сторонником такого взгляда. В письме к Бентлею Ньютон писал: «Допускать, что.. тело может действовать на другое на расстоянии через пустоту, без посредства чего-нибудь, что передавало бы действие и силу от одного тела к другому, представляется мне столь большой нелепостью, что я не думаю, чтобы человек, компетентный в философском мышлении, мог когда-либо ее сделать».

Несмотря на это, Ньютон, решительно уклонившись от обсуждения причин тяготения, сам дал повод для проникновения в физику идеи о возможности действия на расстоянии. Отдавая дань господствовавшему духу времени, Ньютон в заключении своего труда обратился к рассуждениям о боге и здесь обронил фразу, которая долгое время служила знаменем для всех, кто желал избегнуть обсуждения принципиальных философских вопросов физики: «Причину свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю». Нужно заметить, однако, что Ньютон здесь же поясняет, что он понимает под гипотезой «все, что не выводится из явлений». Теперь гипотезой называют предположения о причинах и сущности явлений, выводимые с той или иной степенью убедительности из наблюдений и экспериментов.

Многие предложенные в разное время гипотезы о причинах тяготения не подтвердились фактами. В 1916 г. А. Эйнштейн дал трактовку тяготения как проявления геометрических свойств самого пространства (эта трактовка тяготения излагается в общей теории относительности в курсах теоретической физики).

Оставляя в стороне вопрос о причинах тяготения и исследуя его проявления, в физике применяют представление о *динамическом поле*. В векторном анализе динамическим полем называют часть пространства, где обнаруживаются те или иные силы взаимодействия. Динамическое поле тяготения иначе называют *гравитационным полем*, или просто *полем тяготения*.

Основными величинами, характеризующими динамическое поле, являются напряженность поля и потенциал. Под *напряженностью* поля тяготения понимают силу, действующую на массу в 1 *г*. При этом, чтобы каждой точке поля можно было приписать определенный вектор напряженности поля, упомянутую массу в 1 *г* следует воображать как «точечную массу», т. е. как массу, занимающую исчезающе малый объем. Напряженность поля тяготения имеет размерность силы, деленной на массу, т. е. размерность ускорения.

Потенциалом динамического поля вообще называют работу, которая может быть получена при перемещении единицы массы (или же единицы заряда в случае электрического поля) из рассматриваемой точки поля в бесконечность, где поля нет. Таким образом, потенциал тяготения V равен потенциальной энергии точечной массы в 1 *г*, помещенной в рассматриваемую точку поля [2]).

---

[1]) До исследований Фарадея, показавших роль среды в электрических взаимодействиях.

[2]) Понятие потенциала было установлено Лагранжем (1777 г.) и применено Грином (1828 г.); термин «потенциал» введен Гауссом (1836 г.). Многие авторы

Очевидно, что потенциал тяготения (как и потенциальная энергия тяготения) всегда отрицателен. Силы тяготения всегда стремятся приблизить какую-либо удаленную массу к массам, образующим поле тяготения, поэтому при перемещении 1 *г* массы из рассматриваемой точки поля в бесконечность нельзя получить работы, но, напротив, для такого перемещения работа должна быть затрачена.

Поскольку потенциал тяготения всегда отрицателен, то ясно, что в какой-либо точке поля потенциал тяготения алгебраически будет тем меньше (а численно, арифметически, тем больше), чем бо́льшую работу нужно затратить, чтобы из данной точки поля, если бы там находился 1 *г* массы, перенести 1 *г* массы в бесконечность, где поля нет. Перемещая какую-либо массу из поля тяготения в бесконечность, мы увеличиваем потенциал этой массы от некоторой отрицательной величины до нуля.

Потенциал тяготения имеет размерность энергии, деленной на массу, т. е. размерность квадрата скорости. Соответственно единицу потенциала тяготения обозначают так: 1 *эрг/г*, или, что то же, 1 $см^2/сек^2$.

Если в какой-либо точке поля потенциал есть V_1, а в некоторой другой точке V_2, то работа, совершаемая 1 *г* массы при перемещении из первой точки во вторую, очевидно, равна убыли потенциала: $V_1 - V_2$.

Перемещая массу m в направлении убывания потенциала, мы получаем работу A, производимую силами тяготения:

$$A = m(V_1 - V_2). \tag{7}$$

Пусть в какой-либо точке поля потенциал есть V. Очевидно, что масса m', помещенная в эту точку поля, будет иметь потенциальную энергию, во столько раз бо́льшую V, во сколько раз m' больше 1 *г*, т. е. равную произведению потенциала на массу:

$$U = m'V. \tag{8}$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением (5), мы видим, что потенциал поля тяготения, образованного точечной массой m, на расстоянии r от этой массы определяется формулой

$$V = -f\frac{m}{r}. \tag{9}$$

По уравнению (6′) потенциал поля тяготения, образованного системой как угодно расположенных точечных масс, определяется формулой

$$V = -f\sum\frac{m_i}{r_i}, \tag{10}$$

называют потенциалом тяготения величину, численно определяемую, как указано нами в тексте, но противоположную по знаку. Мы не следуем этой традиции, так как она приводит к несогласованности понятия потенциала тяготения с потенциалом электрического поля.

где число членов под знаком суммы равно числу всех масс, образующих поле тяготения, а r_i есть расстояние от точки поля, для которой вычисляется потенциал, до одной из упомянутых масс.

Поверхность, во всех точках которой потенциал имеет одинаковое значение, называют *поверхностью уровня*, или, иначе, *эквипотенциальной поверхностью*. Очевидно, что в поле тяготения, образованном одной точечной массой, эквипотенциальные поверхности имеют форму концентрических сфер.

Шар, состоящий из однородных по плотности сферических слоев, притягивает внешнее тело так, как если бы вся масса шара была сосредоточена в его центре. Поэтому потенциал силы тяжести на поверхности Земли определяется формулой

$$V = -f\frac{M}{R},$$

где M — масса Земли ($M \approx 6 \cdot 10^{21}$ *т*) и R — радиус Земли ($R = 6371$ *км*). Абсолютная величина потенциала силы тяжести указывает работу, которую нужно было бы затратить, чтобы массу в 1 *г* выбросить с поверхности Земли в мировое пространство: $|V| = 6394$ *кГм*.

Подсчет показывает [1]), что минимальная скорость, которую необходимо при выстреле сообщить снаряду, чтобы снаряд навсегда покинул Землю, если не учитывать сопротивление воздуха, равна 11,2 *км/сек*. Для преодоления сопротивления воздуха при подобных скоростях движения на каждый грамм массы снаряда потребовалось бы затратить работу в количестве примерно 1700 *кГм*. Таким образом, чтобы выбросить с поверхности Земли в мировое пространство 1 *г* массы, в общей сложности нужно затратить примерно 8000 *кГм*, т. е. такую же работу, как при подъеме на поверхности Земли груза в 8 *т* на высоту в 1 *м*.

---

[1]) Снаряд навсегда покинет Землю, если его кинетическая энергия превысит абсолютную величину его потенциальной энергии тяжести по отношению к Земле:

$$\frac{mv^2}{2} \geq f\frac{mM}{R},$$

где R и M — радиус и масса Земли. Введя ускорение силы тяжести $g = f\frac{M}{R^2}$, приведенное соотношение можно переписать так:

$$\frac{mv^2}{2} \geq mg \cdot R.$$

Отсюда заключаем, что наименьшая скорость, которую необходимо сообщить снаряду, чтобы он навсегда покинул Землю (если не учитывать сопротивление воздуха), равна

$$v = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \text{ км/сек}.$$

§ 33. Некоторые теоремы о потенциале тяготения

Из определения понятия потенциала ясно, что перемещение внесенной в поле точечной массы по эквипотенциальной поверхности не сопряжено с затратой или получением работы. Отсюда мы заключаем, что *вектор напряженности поля во всех точках поля направлен по нормали к поверхностям уровня* (в противном случае проекция напряженности поля на какое-либо элементарное перемещение по поверхности уровня не была бы равна нулю и, следовательно, работа перемещения по поверхности уровня оказалась бы также не равной нулю).

На рис. 52 показаны расположение поверхностей уровня и направление вектора напряженности поля тяготения, образованного двумя массивными шарами. Следует обратить внимание на то, что картина гравитационного поля сходна с картиной электрического поля одноименных зарядов; но при одинаковой картине поля в электрическом поле происходит отталкивание одноименных зарядов, а в гравитационном поле — притяжение масс.

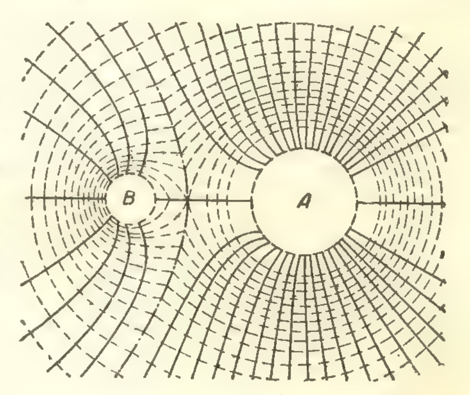


Рис. 52. Поле тяготения двух шаров. Пунктиром изображены сечения эквипотенциальных поверхностей, сплошные линии показывают направление напряженности поля. Масса большого шара в четыре раза превышает массу малого.

Зная значение потенциала во всех точках поля тяготения, нетрудно вычислить напряженность поля. Действительно, представим себе, что через интересующую нас точку поля проведена эквипотенциальная поверхность $V_1 = \text{const}$. Проведем рядом вторую эквипотенциальную поверхность $V_2 = V_1 + dV = \text{const}$, где потенциал на бесконечно малую величину меньше ($dV < 0$). Пусть от рассматриваемой точки поля эта вторая эквипотенциальная поверхность удалена (по нормали к первой поверхности) на расстояние dl. Напряженность поля есть сила, действующая на точечную массу в 1 *г*, помещенную в рассматриваемую точку поля, а убыль потенциала $(V_1 - V_2)$ есть работа, производимая тяготением при перемещении массы в 1 *г*; стало быть,

$$\frac{F}{m} \cdot dl = -dV,$$

или

$$\frac{F}{m} = -\frac{dV}{dl}. \qquad (11)$$

Производную от потенциала по длине перемещения (в направлении нормали к поверхности уровня) называют *градиентом* [1]) *потенциала*. Градиент потенциала

[1]) Слово «градиент» происходит от латинского gradior — ступаю, иду. Понятие градиента может быть применено к любой величине, зависящей от положения точки в пространстве (говорят, например, о градиенте плотности, если плотность в различных точках тела неодинакова, о градиенте температуры, если тело в различных точках неодинаково нагрето, и т. д.). Под градиентом величины φ подразумевают предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$ при бесконечном убывании Δl, где Δl означает малое перемещение в направлении наибольшего

рассматривают как вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания потенциала. Мы видим, что *напряженность поля численно равна градиенту потенциала, но направлена в сторону, противоположную градиенту потенциала*, т. е. в сторону убывания потенциала. Если бы при перемещении по нормали к поверхностям уровня изменение потенциала происходило равномерно, то напряженность поля была бы равна убыли потенциала, приходящейся на 1 *см*.

О напряженности в различных точках поля можно судить по тому, насколько близко расположены друг к другу поверхности уровня, потенциалы которых отличаются на единицу потенциала, т. е. на 1 *эрг/г*. Действительно, положив в формуле (11) $\Delta V = 1$ *эрг/г*, мы видим, что *напряженность поля в различных точках поля обратно пропорциональна удаленности Δl поверхностей уровня, отличающихся на единицу потенциала.*

Когда напряженность поля имеет во всех точках одно и то же направление и одинаковую величину, то такое поле называют *однородным*. Иначе говоря, однородным является такое поле, в котором градиент потенциала всюду имеет одинаковое значение и направление. Близ поверхности Земли поле силы тяжести приближенно можно считать однородным.

Теория поля и теория потенциала подробно излагаются в теоретической физике. Стройное и строгое освещение относящихся сюда вопросов требует широкого применения векторного анализа и интегрального исчисления (интегралы, распространенные по объему, по поверхности, по линии). Некоторые из приводимых ниже теорем теории потенциалов можно вывести, основываясь на одной элементарной математике, но такие доказательства являются искусственными и громоздкими; поэтому мы не воспроизводим здесь этих выводов.

1. Как уже упоминалось в § 29, *однородный по плотности сферический слой, а также однородный по плотности шар образуют поле тяготения, которое во всех внешних точках таково, как если бы вся масса была сосредоточена в центре сферического слоя или в центре шара.*

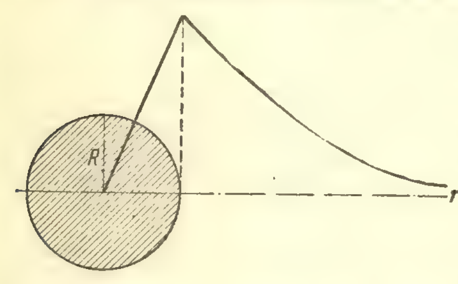


Рис. 53. Величина напряженности поля тяготения на различных расстояниях от центра однородного сплошного шара (масштаб ординаты условен).

2. В полости, окруженной тонким, однородным по плотности сферическим слоем, потенциал всюду одинаков:

$$V = -f\frac{M}{R} = \text{const}, \qquad (12)$$

где M — масса сферического слоя, R — радиус сферического слоя. *Напряженность поля тяготения в полости, окруженной сферическим слоем, равна нулю* (на массу, внесенную внутрь сферического слоя, никакая сила не действует).

3. *Внутри шара* однородной плотности потенциал убывает при перемещении от поверхности шара к центру; на поверхности шара потенциал равен

$$V_{(R)} = -f\frac{M}{R},$$

где M — суммарная масса шара, R — радиус шара. При перемещении в центр

возрастания величины φ, а $\Delta\varphi$ означает наблюдаемое при этом перемещении изменение величины φ; градиент φ по направлению l равен пределу $\left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}\right]_{\Delta l \to 0}$. Иными словами, под градиентом понимают *пространственную быстроту изменения величины* (но не быстроту изменения этой величины во времени).

шара потенциал убывает на половину указанной величины, т. е. в центре шара потенциал равен

$$V_{(0)}=-\frac{3}{2}f\frac{M}{R}.$$

В какой-либо точке внутри шара однородной плотности на расстоянии r от его центра потенциал тяготения определяется формулой

$$V_{(r)}=-\frac{3}{2}f\frac{M}{R}\left(1-\frac{r^2}{3R^2}\right). \qquad (13)$$

Напряженность поля тяготения внутри шара однородной плотности всюду направлена к центру и определяется формулой

$$\frac{F}{m}=\frac{Mr}{R^3}. \qquad (14)$$

Следовательно, *каждая частица шара притягивается к центру шара с силой, пропорциональной расстоянию частицы от центра шара* (рис. 53).

§ 34. Потенциальная энергия системы частиц

Формулы (6) и (10) определяют потенциальную энергию взаимодействия одной из частиц системы с остальными частицами системы. Чтобы вычислить потенциальную энергию системы в целом, нужно подсчитать работу, которая может быть «произведена» [1] частицами системы при их удалении в бесконечность.

Допустим, что система состоит из двух масс (частиц) m_1 и m_2, расположенных в точках A_1 и A_2, где потенциалы соответственно равны V_1 и V_2, причем потенциал V_2 в точке A_2, где находится масса m_2, вызван массой m_1, а потенциал V_1 — массой m_2. Потенциальную энергию взаимодействия этих двух масс можно подсчитать двумя способами. Мы можем представить себе, что вторая масса остается неподвижной, а первая удаляется от нее. Перемещаясь от места, где потенциал равен V_1, в место, настолько удаленное от второй массы, что потенциал поля там равен нулю, эта первая масса может выполнить работу [2] m_1V_1. Когда эта первая масса удалится на бесконечно большое расстояние от второй, то очевидно, что теперь становится возможным перемещать вторую массу как угодно, не затрачивая на это перемещение никакой работы. Таким образом, работа m_1V_1, полученная при удалении первой массы, представляет собой потенциальную энергию взаимодействия двух масс: $U = m_1V_1$. Но с таким же правом мы могли бы предполагать, что первая масса остается неподвижной, а удаляется вторая масса. Тогда мы пришли бы к выводу, что $U = m_2V_2$. Следовательно, можно написать:

$$U=\frac{1}{2}(m_1V_1+m_2V_2).$$

Допустим, что система состоит из трех масс (частиц) m_1, m_2 и m_3, расположенных в точках, где потенциалы соответственно равны V_1, V_2, V_3. Пусть массы m_1 и m_2 остаются неподвижными, а масса m_3 удаляется в бесконечность; при этом будет произведена (в алгебраическом смысле) работа m_3V_3; для тех точек

---

[1]) Мы говорим здесь о «производстве работы» в алгебраическом смысле. Как мы знаем, потенциал тяготения V является величиной отрицательной в соответствии с тем, что при удалении массы из поля тяготения работа не совершается, а, напротив, для удаления массы из поля тяготения работа должна быть затрачена.

[2]) См. предыдущее примечание.

поля, где расположены оставшиеся массы, потенциалы при отсутствии третьей массы обозначим через V'_1 и V'_2; как было показано, потенциальная энергия взаимодействия двух оставшихся масс равна

$$\frac{1}{2}(m_1V'_1 + m_2V'_2).$$

Следовательно,

$$U = \frac{1}{2}(m_1V'_1 + m_2V'_2) + m_3V_3.$$

Теперь подсчитаем потенциальную энергию взаимодействия тех же трех масс другим способом, а именно: предположим, что масса m_3 остается неподвижной, а удаляются первые две массы, причем так, что взаимное расположение двух удаляемых масс сохраняется неизменным. При этом будет произведена работа $m_1(V_1 - V'_1) + m_2(V_2 - V'_2)$. Присоединяя сюда потенциальную энергию взаимодействия двух удаляемых масс, находим, что

$$U = \frac{1}{2}(m_1V'_1 + m_2V'_2) + m_1(V_1 - V'_1) + m_2(V_2 - V'_2).$$

Поступая аналогично тому, как и в случае двух масс, т. е. сложив оба полученных выражения для U и разделив результат пополам, находим (после очевидных сокращений):

$$U = \frac{1}{2}(m_1V_1 + m_2V_2 + m_3V_3).$$

Приведенное рассуждение нетрудно продолжить для четырех, пяти и вообще какого угодно числа масс:

$$U = \frac{1}{2}\sum mV. \qquad (15)$$

На основе интегрального исчисления формулу (15) можно применить для вычисления потенциала «сплошного тела» самого на себя.

Для однородного по плотности шара такое вычисление дает:

$$U = -\frac{3}{5}f\frac{M^2}{R}, \qquad (16)$$

где M — общая масса шара, R — радиус шара. Следовательно, работа, которая может быть произведена тяготением при образовании шара из бесконечно разреженной материи, обратно пропорциональна радиусу шара.

Формула (16) послужила основанием для так называемой *контракционной*[1]) *гипотезы* раскаленности Солнца и звезд. По предположению, впервые высказанному Кантом и Лапласом и развитому Гельмгольцем, Солнце и планеты образовались вследствие постепенного уплотнения разреженной материи. Если вещество, из которого образовалась солнечная система, вначале имело низкую температуру и было крайне разреженным, то, постепенно стягиваясь вследствие тяготения к центру массы солнечной системы, это вещество должно было нагреваться благодаря превращению потенциальной энергии тяготения (алгебраически убывающей по мере уплотнения вещества) в энергию теплового движения частиц. Возможно, что уплотнение вещества Солнца продолжается поныне. По контракционной гипотезе излучение энергии Солнцем восполняется постепенным сжатием Солнца.

---

1) От латинского слова contractio — с ж а т и е.

Зная массу и радиус Солнца и пользуясь формулой (16), можно подсчитать, какое количество потенциальной энергии тяготения должно было превратиться в энергию движения частиц и энергию излучения за все время образования и существования Солнца; оказывается, что каждый грамм массы Солнца должен был выделить 120 млн. джоулей энергии. Если бы лучеиспускание Солнца восполнялось сжатием Солнца, то по истечении несколько более полутора тысяч лет радиус Солнца должен был бы уменьшиться примерно на одну десятитысячную своей величины (ежегодно радиус Солнца должен был бы уменьшаться на 36 *м*). В предыдущее время лучеиспускание Солнца наверно было более интенсивным. Вычисление показывает, что если бы лучеиспускание Солнца восполнялось только (или хотя бы главным образом) за счет сжатия, то Солнце должно было бы охладиться и угаснуть не более как через 20 млн. лет по своем возникновении. Вместе с тем множество фактов указывает на то, что продолжительность свечения звезд и, в частности, Солнца несравненно более велика; она исчисляется биллионами (10^{10}) лет. Поэтому признано, что на основании контракционной гипотезы можно объяснить происхождение только незначительной части энергии, лучеиспускаемой Солнцем.

ГЛАВА VII

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 35. Момент силы

В механике твердым телом называется совокупность материальных частиц, взаимное расположение которых остается неизменным. Основные законы механики определяют движение отдельной материальной точки. Поэтому для полного описания движения нетвердого тела, частицы которого не подчинены условию абсолютной неизменности взаимного расположения, надо было бы знать силы, приложенные к каждой частице в отдельности. Для твердого тела в этом нет необходимости. В этом случае любое движение может быть представлено как результат совмещения двух элементарных движений: *поступательного*, при котором *любая линия, мысленно проведенная внутри тела и связанная с его частицами, перемещается параллельно самой себе*, и *вращательного*, при котором *все точки тела описывают окружности вокруг некоторой оси вращения*. Разложение произвольного движения на два движения — поступательное и вращательное — приводит к значительному упрощению и, помимо того, позволяет сформулировать законы вращательных движений твердых тел так, что каждый из этих законов оказывается аналогичным одному из элементарных законов механики.

При поступательном движении траектории всех точек тела параллельны друг другу, а скорости точек одинаковы. Поэтому, зная движение одной какой-либо точки, можно установить положение всего тела в пространстве в любой момент времени. Тело движется поступательно так, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре массы. Примером поступательного движения могут служить: свободное падение тел под действием силы тяжести, движение поршня в цилиндре теплового двигателя и т. п.

При вращательном движении угловая скорость и угловое ускорение одинаковы в каждый данный момент для всех частиц тела. В связи с неизменностью взаимного расположения частиц линейные скорости и линейные ускорения пропорциональны расстоянию частиц от оси вращения. Этим определяется та исключительная роль, которую играет расстояние частиц от оси вращения в динамике вра-

щательных движений твердого тела: расстояние от оси вращения r входит в скрытой форме во все уравнения вращательных движений. В явной форме оно не участвует в этих уравнениях, но оно содержится в тех величинах, которые здесь заменяют понятия силы и массы. В динамике вращательных движений вместо сил и масс рассматриваются моменты сил и моменты инерции.

Исторически представление о моменте силы зародилось и приобрело конкретный характер в статике и динамике твердых тел; здесь отчетливо выявились польза и важность понятия момента силы.

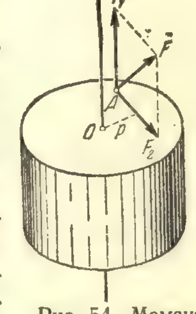


Рис. 54. Момент силы F относительно оси численно равен F_2p.

Если на твердое тело, имеющее закрепленную ось вращения, действует сила F, приложенная в точке A (рис. 54), то очевидно, что составляющая F_1 этой силы, параллельная оси вращения, никакого вращательного эффекта дать не может, и только другая составляющая, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, F_2, дает вращательный эффект, который тем более значителен, чем больше кратчайшее расстояние между прямой, по которой действует сила, и осью вращения.

Поэтому *моментом силы относительно оси называют произведение, составленное из проекции силы* (*на плоскость, перпендикулярную к оси*) *и кратчайшего расстояния между прямой, по которой действует сила, и осью.*

Момент силы относительно оси рассматривают как вектор, направленный по оси туда, куда нужно смотреть, чтобы видеть силу обращенной в сторону движения часовой стрелки (т. е. на рис. 54 вниз).

Рассмотрим действие на твердое тело двух равных, но противоположно направленных сил, не лежащих на одной прямой. Такие две силы не могут быть заменены одной равнодействующей. Они не могут вызвать поступательного движения тела ни в каком направлении, но они вызовут вращение тела около некоторой оси, перпендикулярной к плоскости, в которой лежат обе силы.

Действительно, эти силы как равные и противоположно направленные при любом поступательном перемещении тела (когда тело перемещается параллельно самому себе) производят работу, в сумме равную нулю; следовательно, эти силы не могут сообщить телу кинетической энергии поступательного движения, а значит, они и не могут вызвать это движение. Но при вращении суммарная работа указанных сил не равна нулю, поэтому они способны привести тело во вращение.

Итак, две равные, параллельные и противоположно направленные силы (*пара сил*, или, как часто говорят, просто «пара») представ-

ляют собой совершенно особый, неприводимый к одной силе динамический элемент.

Назовем *плечом* пары кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару.

Вращательное действие пары всегда определяется произведением силы на плечо. Это произведение называют *моментом пары.* Момент пары рассматривают как вектор, перпендикулярный к плоскости пары и направленный туда, куда нужно смотреть, чтобы видеть силы обращенными в сторону движения часовой стрелки.

Пара сил, действующая на свободное твердое тело, где бы ни были приложены силы, составляющие пару, вращает тело вокруг оси, проходящей через центр массы тела и перпендикулярной к плоскости пары. Действительно, геометрическая сумма сил, составляющих пару, равна нулю, поэтому центр массы тела должен оставаться в покое (стр. 95).

§ 36. Кинетическая энергия вращательного движения. Момент инерции

Кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий всех частиц тела:

$$E_{\text{кин}} = \sum \frac{m_i v^2}{2},$$

где m_i — масса какой-либо частицы, а v_i — ее линейная (окружная) скорость, пропорциональная расстоянию r_i данной частицы от оси вращения. Подставляя в это выражение $v_i = \omega r_i$ и вынося за знак суммы общую для всех частиц угловую скорость ω, находим:

$$E_{\text{кин}} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2.$$

Эту формулу для кинетической энергии вращающегося тела можно привести к виду, аналогичному выражению кинетической энергии поступательного движения, если ввести величину так называемого *момента инерции* тела. Моментом инерции материальной точки называют произведение массы точки на квадрат расстояния ее от оси вращения. Момент инерции I тела есть сумма моментов инерции всех материальных точек тела [1]):

$$I = \sum m_i r_i^2. \qquad (1)$$

---

[1]) Если вместо конечного числа n материальных точек мы будем иметь сплошное тело, то можно разделить его на элементарные массы dm; тогда сумма конечного числа слагаемых перейдет в сумму бесконечно большого числа их и момент инерции выразится интегралом

$$I = \int r^2\, dm.$$

Итак, кинетическая энергия вращающегося тела определяется такой формулой:

$$E_{кин} = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (2)$$

Формула (2) отличается от формулы, определяющей кинетическую энергию тела при поступательном движении, тем, что вместо массы тела m здесь входит момент инерции I и вместо скорости v — угловая скорость ω.

Большой кинетической энергией вращающегося маховика пользуются в технике, чтобы сохранить равномерность хода машины при внезапно меняющейся нагрузке. Вначале, чтобы привести маховик с большим моментом инерции во вращение, от машины требуется затрата значительной работы, но зато при внезапном включении большой нагрузки машина не останавливается и производит работу за счет запаса кинетической энергии маховика.

Особенно массивные маховые колеса применяют в прокатных станах, приводимых в действие электромотором. Вот описание одного из таких колес: «Колесо имеет в диаметре 3,5 *м* и весит 41 *т*. При нормальной скорости 600 об/мин запас кинетической энергии колеса таков, что в момент проката колесо дает стану мощность в 20 000 *л. с.* Трение в подшипниках сведено до минимума смазкой под давлением, и во избежание вредного действия центробежных сил инерции колесо уравновешено так, что груз в 30 *г*, помещенный на окружности колеса, выводит его из состояния покоя».

Приведем (без выполнения вычислений) значения моментов инерции некоторых тел (предполагается, что каждое из этих тел имеет одинаковую во всех своих участках плотность).

Момент инерции тонкого *кольца* относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости (рис. 55):

$$I = mr^2. \qquad (3)$$

Момент инерции круглого *диска* (или *цилиндра*) относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости (полярный момент инерции диска; рис. 56):

$$I = \frac{1}{2} mr^2. \qquad (4)$$

Момент инерции тонкого круглого диска относительно оси, совпадающей с его диаметром (экваториальный момент инерции диска; рис. 57):

$$I = \frac{1}{4} mr^2. \qquad (5)$$

Момент инерции *шара* относительно оси, проходящей через центр шара:

$$I = \frac{2}{5} mr^2. \qquad (6)$$

Момент инерции *тонкого сферического слоя* радиуса r относительно оси, проходящей через центр:

$$I=\frac{2}{3}mr^2. \quad (7)$$

Момент инерции толстого сферического слоя (*полого шара*, имеющего радиус внешней поверхности R и радиус полости r) относи-

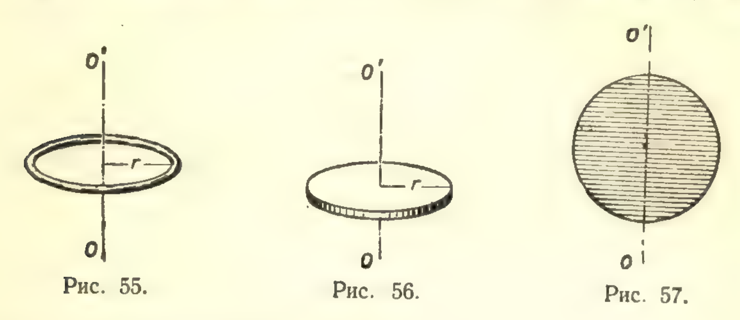


Рис. 55. Рис. 56. Рис. 57.

тельно оси, проходящей через центр:

$$I=\frac{2}{5}m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}. \quad (8)$$

Вычисление моментов инерции тел производится при помощи интегрального исчисления. Чтобы дать представление о ходе подобных расчетов, найдем момент инерции *стержня* относительно перпендикулярной к нему оси (рис. 58). Пусть q есть сечение стержня, а ρ — плотность. Выделим элементарно малую часть стержня, имеющую длину dx и находящуюся на расстоянии x от оси вращения. Тогда ее масса $dm=\rho\, q\, dx$. Так как она находится на расстоянии x от оси вращения, то ее момент инерции $dI=q\,\rho x^2\,dx$. Интегрируем в пределах от нуля до l:

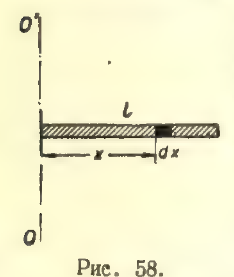


Рис. 58.

$$I=\int_0^l q\rho x^2 dx=q\rho\int_0^l x^2 dx=q\rho\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^l=\frac{1}{3}q\rho l^3=\frac{1}{3}ml^2.$$

Момент инерции *прямоугольного параллелепипеда* относительно оси симметрии (рис. 59)

$$I=\frac{1}{2}m(a^2+b^2). \quad (9)$$

Момент инерции *кольцевого тора* (рис. 60)

$$I=m\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right). \quad (10)$$

Рассмотрим, как связана энергия вращения катящегося (без скольжения) по плоскости тела с энергией поступательного движения этого тела.

Энергия поступательного движения катящегося тела равна $\frac{mv^2}{2}$, где m — масса тела и v — скорость поступательного движения. Пусть ω означает угловую скорость вращения катящегося тела и r — радиус тела. Легко сообразить, что скорость поступательного движения тела, катящегося без скольжения, равна окружной скорости тела в точках соприкосновения тела с плоскостью (за время t, когда тело совершает один оборот, $\omega t = 2\pi$, центр тяжести тела перемещается на расстояние $2\pi r$; следовательно, $v = \frac{2\pi \cdot r}{t} = \omega r$).

Таким образом,

$$E_{\text{поступ}} = \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Энергия вращения

$$E_{\text{вращ}} = \frac{I\omega^2}{2},$$

следовательно,

$$\frac{E_{\text{вращ}}}{E_{\text{поступ}}} = \frac{I}{mr^2}. \qquad (11)$$

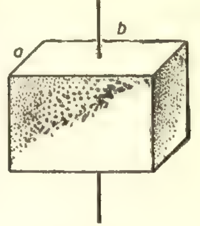


Рис. 59.



Рис. 60.

Подставляя сюда указанные выше значения моментов инерции, находим, что:

а) энергия вращательного движения катящегося обруча равна энергии его поступательного движения;

б) энергия вращения катящегося однородного диска равна половине энергии поступательного движения;

в) энергия вращения катящегося однородного шара составляет $^2/_5$ энергии поступательного движения.

Зависимость момента инерции от положения оси вращения. Пусть стержень AB (рис. 61) с центром тяжести в точке C вращается с угловой скоростью ω вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа. Положим, что в течение некоторого промежутка времени он переместился из положения AB в $A'B'$, причем центр тяжести описал дугу CC'. Это перемещение стержня можно рассматривать так, как если бы стержень сначала поступательно (т. е. оставаясь себе параллельным) переместился в положение $A''B''$ и затем повернулся вокруг C' в положение $A'B'$. Обозначим OC (расстояние центра тяжести от оси вращения) через a, а угол BOB' через φ. При движении стержня из положения AB в положение $A''B''$ перемещение каждой его частицы одинаково с перемещением центра тяжести, т. е. оно равно CC', или $a\varphi$. Чтобы получить действительное движение стержня, мы можем предположить, что оба указанных движения совершаются одновременно. В соответствии с этим кинетическую энергию стержня, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через O, можно разложить на две части.

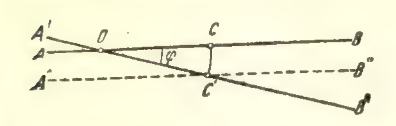


Рис. 61. К выводу соотношения $I = I_c + m(OC)^2$.

Первая часть — это кинетическая энергия поступательного движения стержня; все точки стержня имеют при этом одну и ту же скорость; скорость одной точки стержня, а именно точки C, нам известна: она равна $a\omega$, и, следовательно, эта часть кинетической энергии равняется $\frac{1}{2}m(a\omega)^2$, где m — масса стержня. Вторая часть кинетической энергии — это кинетическая энергия вращательного движения стержня с угловой скоростью ω вокруг его центра тяжести C. Она равна $\frac{1}{2}I_c\omega^2$, где I_c — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси, проходящей через O. Положим теперь, что I есть момент инерции стержня относительно оси, проходящей через O; рассматривая движение стержня как вращение вокруг оси O, мы можем утверждать, что кинетическая энергия стержня равна $\frac{1}{2}I\omega^2$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2.$$

Отсюда, сокращая все члены уравнения на $\frac{\omega^2}{2}$, находим:

$$I = I_c + ma^2. \qquad (12)$$

Таким образом, *момент инерции относительно любой оси вращения равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния центра тяжести тела от оси вращения.*

Так, например, момент инерции шара радиусом r и массой m, подвешенного на нити длиной l, относительно оси, проходящей через точку подвеса (момент инерции «физического маятника»):

$$I = \frac{2}{5}mr^2 + m(l+r)^2.$$

§ 37. Основное уравнение динамики вращательного движения

Пусть к некоторому телу, которое может вращаться около неподвижной оси O и имеет момент инерции I, приложена сила F с плечом r (рис. 62). Определим угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$, приобретаемое телом под действием указанной силы.

Допустим, что за время dt тело поворачивается с угловой скоростью ω на угол $d\varphi = \omega\,dt$, причем точка приложения силы F описывает дугу $dl = r\,d\varphi$. Работа, совершаемая силой F за время dt, будет равна $F\,dl$, или, иначе, $F \cdot r\omega\,dt$. Эта работа идет на увеличение кинетической энергии вращения тела, т. е.

$$Fr\omega\,dt = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right).$$

Но при неизменности момента инерции тела

$$d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)=I\omega\,d\omega.$$

Стало быть (произведя сокращение на ω и введя момент силы $M=Fr$), получаем:

$$M=I\frac{d\omega}{dt}. \tag{13}$$

Мы видим, что это *основное уравнение динамики вращательного движения* по своему начертанию аналогично основному уравнению динамики поступательного движения

$$F=m\frac{dv}{dt}.$$

Рис. 62.

Однако, как и следовало ожидать, в уравнении (13) вместо силы фигурирует момент силы, вместо массы — момент инерции и вместо линейного ускорения — угловое ускорение.

Приняв во внимание возможность изменения момента инерции тела во время вращения, мы вместо уравнения (13) получили бы уравнение

$$M=\frac{d(I\omega)}{dt}, \tag{14}$$

аналогичное уравнению

$$F=\frac{d(mv)}{dt}.$$

В уравнение (14) входит величина $I\omega$. Выясним ее физический смысл. При вращательном движении тела каждая его частица с массой m описывает окружность некоторого радиуса r, имея при этом некоторую скорость v (рис. 63). Произведение mv есть количество движения данной частицы. Произведение количества движения частицы на кратчайшее расстояние частицы от какой-либо оси, т. е. величина mvr, есть *момент количества движения L относительно оси*. Момент количества движения относительно оси рассматривают как вектор, направленный по оси в ту сторону, куда нужно смотреть, чтобы видеть вращение происходящим по часовой стрелке.

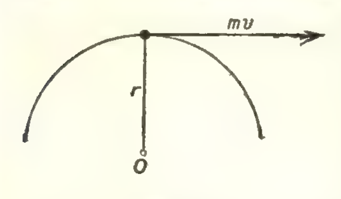


Рис. 63.

Взяв сумму моментов количества движения всех частиц, составляющих вращающееся тело, получим момент количества движения

всего данного тела:

$$L = \sum mvr = \sum m\omega rr = \sum m\omega r^2,$$

или, вынося за знак суммы общий для всех точек множитель ω и замечая, что $\Sigma\, mr^2$ есть момент инерции I, находим:

$$L = \omega \sum mr^2 = I\omega. \tag{15}$$

Таким образом, *момент количества движения тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции на угловую скорость.*

Заметим, что момент количества движения вращающегося тела часто называют *импульсом вращения.*

Свободные оси. Основное уравнение динамики вращательного движения справедливо для вращения относительно любой возможной оси. Следует, однако, отметить, что в отношении характера и интенсивности взаимодействия вращающегося тела с опорами оси вращения не все оси равноценны. Возможны два случая: ось вращения такова, что центробежные силы инерции, развиваемые отдельными материальными точками тела, *не* уравновешиваются относительно этой оси (рис. 64, *а*); тогда тело при вращении оказывает боковое давление на подшипники. Но может случиться, что все центробежные силы инерции уравновешиваются относительно оси вращения (рис. 64, *б*); такую ось называют *свободной осью.*

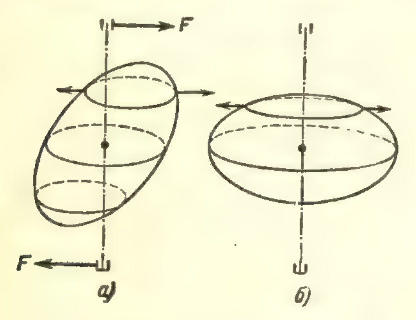


Рис. 64. Вращение тела вокруг произвольной (*а*) и свободной (*б*) осей.

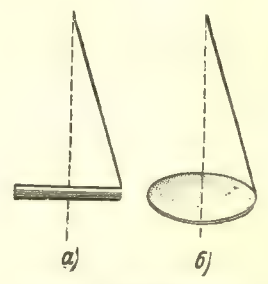


Рис. 65. Свободные оси палочки (*а*) и диска (*б*)

Если тело имеет ось полной симметрии, то, очевидно, эта ось симметрии и будет свободной осью.

Можно доказать, что *во всяком теле существуют три взаимно перпендикулярные свободные оси.*

В отношении устойчивости вращения небезразлично, какая именно из свободных осей служит осью вращения. Опыт и теория показывают, что *вращение около осей с наибольшим и наименьшим*

моментом инерции оказывается устойчивым, а вращение около оси со средним моментом инерции — неустойчивым. Так, если палочку подвесить за конец на нити и другой конец нити привести в быстрое вращение при помощи центробежной машины (рис. 65, *а*), то палочка будет вращаться в горизонтальной плоскости около вертикальной оси, перпендикулярной к длине палочки и проходящей через ее середину. Это и есть свободная ось вращения, причем момент инерции палочки при таком положении оси — максимальный.

Точно так же будет вращаться в горизонтальной плоскости тяжелое кольцо или диск (рис. 65, *б*).

Понятие о свободной оси вращения имеет большое значение для техники. Именно, надо заставлять вращающиеся части машины вращаться около их свободных осей, или, как говорят, надо хорошо их центрировать, иначе давление на ось, особенно при больших скоростях, может иметь вредные последствия вплоть до поломки машины.

§ 38. Закон сохранения момента количества движения

Обратимся к основному уравнению динамики вращательного движения

$$M = \frac{d(I\omega)}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

и рассмотрим частный случай, когда на тело либо вовсе не действуют внешние силы, либо они таковы, что их равнодействующая не дает момента относительно оси вращения ($M=0$). Тогда

$$d(I\omega) = M\,dt = 0.$$

Но если изменение величины $I\omega$ равно нулю, то, следовательно, сама величина $I\omega$ остается постоянной:

$$L = I\omega = \text{const}. \qquad (16)$$



Рис. 66. Сальто-мортале.

Итак, *если на тело не действуют внешние силы* (или результирующий момент их относительно оси вращения равен нулю), *то момент количества движения тела относительно оси вращения остается неизменным.* Этот закон носит название закона сохранения момента количества движения относительно оси вращения.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих закон сохранения момента количества движения.

Гимнаст во время прыжка через голову (рис. 66) поджимает к туловищу руки и ноги. Этим он уменьшает свой момент инерции,

а так как произведение $I\omega$ должно оставаться неизменным, то угловая скорость вращения ω возрастает, и в краткий промежуток времени, пока гимнаст находится в воздухе, он успевает сделать полный оборот.

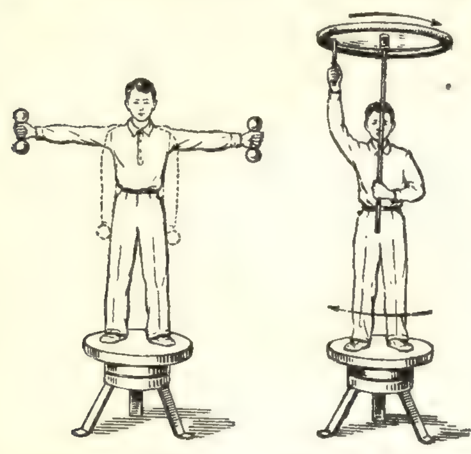


Рис. 67. Вращение человека, стоящего на скамье Жуковского, ускорится, если он опустит руки, и замедлится, если он их поднимет.

Рис. 68. Если мы поднимем велосипедное колесо над головой и приведем его во вращение, то сами вместе с платформой начнем вращаться в противоположную сторону.

Шарик привязан к нити, наматываемой на палку; по мере того как уменьшается длина нити, уменьшается момент инерции шарика и, следовательно, возрастает угловая скорость.

Ряд интересных опытов можно проделать, встав на платформу, вращающуюся на шарикоподшипнике (скамья Жуковского). На рис. 67 и 68 изображены некоторые из этих опытов.

Сопоставляя уравнения, выведенные в последних параграфах, с законами прямолинейного поступательного движения, легко заметить, что формулы, определяющие вращательное движение около неподвижной оси, аналогичны формулам для прямолинейного поступательного движения.

В следующей таблице сопоставлены основные величины и уравнения, определяющие эти движения:

Поступательное движение (прямолинейное)	Вращательное движение (около неподвижной оси)
Масса . . . . m	I . . . . момент инерции
Путь l	φ . . . . угол поворота
Скорость . . . . $v=\frac{dl}{dt}$	$\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ . . . . . . угловая скорость
Ускорение . . . . . . $j=\frac{dv}{dt}$	$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$ . . . . . . угловое ускорение
Количество движения . mv	$I\omega$ . . . момент количества движения
Сила . . . . F	M . . . . момент силы
Основное уравнение . . $\begin{cases} F=mj \\ F=\frac{d(mv)}{dt} \end{cases}$	$\left.\begin{matrix} M=I\varepsilon \\ M=\frac{d(I\omega)}{dt} \end{matrix}\right\}$. основное уравнение
Работа . . . . Fl	$M\varphi$ . . . . работа
Кинетическая энергия . $\frac{mv^2}{2}$	$\frac{I\omega^2}{2}$ . . . . . . кинетическая энергия

Гироскопы. Реактивный гироскопический эффект. Твердое тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси полной симметрии (свободной оси), называют *гироскопом*. По закону сохранения в е к т о р а момента количества движения *гироскоп стремится сохранить направление своей оси вращения неизменным в пространстве и проявляет тем бо́льшую устойчивость* (т. е. оказывает тем большее сопротивление повороту оси вращения), *чем больше его момент инерции и чем больше угловая скорость вращения.*

Когда мы, удерживая на вытянутых руках какое-либо массивное неподвижное тело, сообщаем ему движение, например слева направо, то развиваемая телом сила инерции двигает нас в противоположном направлении. Проявление сил инерции вращающегося гироскопа, когда мы поворачиваем его ось вращения, оказывается более сложным и на первый взгляд неожиданным. Так, если мы, удерживая в руках горизонтально направленную ось вращения гироскопа, станем один конец оси приподнимать, а другой опускать, т. е. поворачивать ось в в е р т и к а л ь н о й плоскости, то почувствуем, что ось оказывает давление на руки *не* в вертикальной, а в г о р и з о н т а л ь н о й плоскости, прижимая одну нашу руку и оттягивая другую. Если при рассматривании справа вращение гироскопа видно происходящим по движению часовой стрелки (т. е. момент количества движения гироскопа направлен горизонтально налево), то попытка поднять левый конец оси, опуская вниз правый, вызывает движение левого конца оси в горизонтальной плоскости от нас, а правого — на нас.

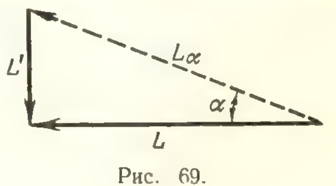


Рис. 69.

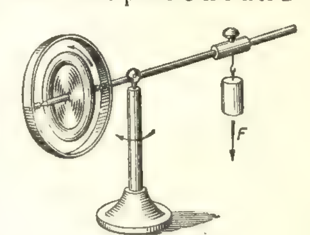


Рис. 70.

Такая реакция гироскопа (так называемый *гироскопический эффект*) объясняется стремлением гироскопа сохранить неизменным свой момент количества движения и притом сохранить его неизменным не только по величине, но и по направлению. Действительно, чтобы при описанном выше повороте оси вращения гироскопа в вертикальной плоскости на угол α (рис. 69) момент количества движения $\boldsymbol{L}$ геометрически оставался неизменным, гироскоп должен приобрести дополнительное вращение вокруг вертикальной оси с моментом количества движения $\boldsymbol{L}'$ таким, что геометрически

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_\alpha + \boldsymbol{L}' = \text{const}.$$

По указанной причине вращающийся гироскоп, уравновешенный на подвижной оси гирей (рис. 70), приобретает дополнительно

вращение вокруг вертикальной оси, если гирю, уравновешивавшую гироскоп, немного отодвинуть от точки опоры оси (перевешивая, гиря сообщает оси некоторый наклон, что и вызывает обращение оси гироскопа вокруг точки опоры в направлении, которое соответствует направлению вектора $\boldsymbol{L}'$ на рис. 69).

По той же причине ось волчка приобретает вследствие опрокидывающего действия силы тяжести круговое движение, которое называют *прецессией* (рис. 71).

Итак, *если к вращающемуся гироскопу приложить пару сил, стремящуюся повернуть его около оси, перпендикулярной к оси вращения, то гироскоп действительно станет поворачиваться, но только вокруг третьей оси, перпендикулярной к первым двум*. Чтобы повернуть вращающийся гироскоп (например, в направлении v, как показано на рис. 72), нужно к оси гироскопа приложить вращающий момент в плоскости, перпендикулярной к направлению поворота.

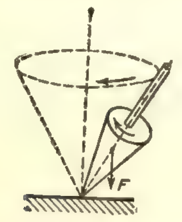


Рис. 71. Схема движения волчка.

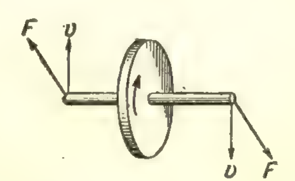


Рис. 72.

Более детальный анализ явлений, аналогичных описанным выше, показывает, что *гироскоп стремится расположить ось своего вращения таким образом, чтобы она образовала возможно меньший угол с осью вынуждаемого вращения и чтобы оба вращения совершались в одном и том же направлении.*

Это свойство гироскопа используется в *гироскопическом компасе*, получившем широкое распространение, в особенности в военном флоте. Гирокомпас представляет собой быстро вращающийся волчок (мотор трехфазного тока, делающий до 25 000 об/мин), который на особом поплавке плавает в сосуде со ртутью и ось которого устанавливается в плоскости меридиана. В данном случае источником внешнего вращающего момента является суточное вращение Земли вокруг ее оси. Под его действием ось вращения гироскопа стремится совпасть по направлению с осью вращения Земли, а так как вращение Земли действует на гироскоп непрерывно, то ось гироскопа, наконец, и принимает это положение, т. е. устанавливается вдоль меридиана, и продолжает в нем оставаться совершенно так же, как обычная магнитная стрелка.

Гироскопы часто применяют в качестве *стабилизаторов*. Их устанавливают для уменьшения качки на океанских пароходах.

Были сконструированы также стабилизаторы для однорельсовых железных дорог; массивный быстро вращающийся гироскоп, помещаемый внутри вагона однорельсовой дороги, препятствует опрокидыванию вагона. Роторы для гироскопических стабилизаторов изготовляют весом от 1 до 100 и более тонн.

В торпедах гироскопические приборы, автоматически действуя на рулевое управление, обеспечивают прямолинейность движения торпеды в направлении выстрела.

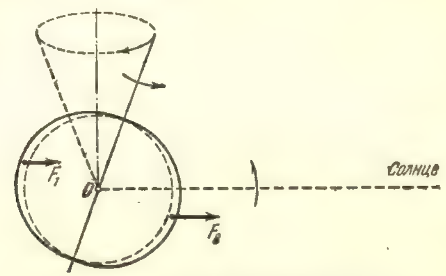


Рис. 73. Прецессия земной оси.

Суточное вращение Земли делает ее подобной гироскопу. Так как Земля представляет собой не шар, а фигуру, близкую к эллипсоиду, то притяжение Солнца создает равнодействующую, не проходящую через центр масс Земли (как было бы в случае шара). Вследствие этого возникает вращающий момент, который стремится повернуть ось вращения Земли перпендикулярно к плоскости ее орбиты (рис. 73). В связи с этим земная ось испытывает прецессионное движение (с полным оборотом примерно за 25 800 лет).

§ 39. Проявление поворотных (кориолисовых) сил инерции

При вращательном движении твердых тел проявляются *центробежные* и в некоторых случаях так называемые *кориолисовы силы инерции*.

Ряд примеров проявления центробежной силы инерции уже был рассмотрен нами в § 17.

Всякая сила инерции представляет собой реакцию тела, приложенную к связям и возникающую тогда, когда вследствие существования связей телу сообщается какое-либо ускорение. В частности, если телу сообщается поворотное (кориолисово) ускорение (происхождение которого было рассмотрено в § 7), то тело развивает *поворотную* (*кориолисову*) *силу инерции*, равную произведению массы тела на поворотное ускорение, направленную противоположно поворотному ускорению и приложенную к связям.

Гироскопический эффект, т. е. сопротивление, которое оказывает гироскоп, когда мы поворачиваем его ось вращения, есть не что иное, как проявление развиваемой гироскопом поворотной (кориолисовой) силы инерции. Чтобы убедиться, что гироскопические силы и поворотные силы инерции — одно и то же, рассмотрим еще раз с новой точки зрения причины, вызывающие гироскопический эффект.

Допустим, что наблюдатель держит в руках ось (подшипники оси) быстро вращающегося гироскопа и, поворачиваясь, изменяет положение оси гироскопа в пространстве, не изменяя относительно гироскопа положения туловища и рук.

Возьмем систему координат, связанную с упомянутым наблюдателем. По отношению к астрономической инерциальной системе координат указанная система координат является подвижной; переносным движением в данном случае будет поворот наблюдателя. Допустим, что наблюдатель поворачивается с угловой скоростью ω. На рис. 74 ось, вокруг которой поворачиваются совместно гироскоп, наблюдатель и подвижная система ориентировки, изображена пунктирной стрелкой и отмечена символом $\omega_{пов}$. Угловую скорость вращения гироскопа вокруг своей оси обозначим через ω', а окружную скорость какой-либо частицы гироскопа обозначим через $v=\omega' r$ (где r — расстояние частицы от оси гироскопа). Ясно, что v в данном случае означает скорость относительного движения (в первой главе эту скорость относительного движения мы обозначили через w). Согласно сказанному в § 7 поворотное ускорение направлено перпендикулярно к оси поворота подвижной системы ориентировки и перпендикулярно к относительной скорости, причем поворотное ускорение направлено туда, куда нужно смотреть, чтобы перемещение от оси поворота к вектору относительной скорости было видно происходящим по часовой стрелке. Следовательно, поворотное ускорение для частиц, лежащих на оси поворота, $j_{пов}$, направлено так, как показано на рис. 74.

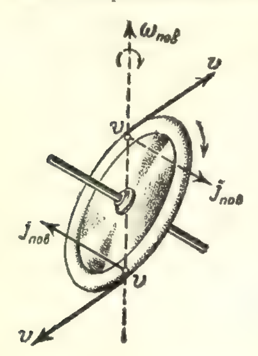
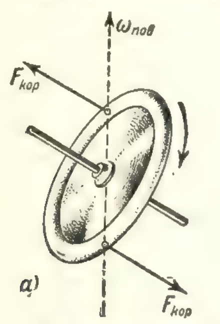


Рис. 74. Кориолисово ускорение в гироскопе.

Направление поворотной силы инерции, развиваемой указанными частицами, показано на рис. 75, *а*. Поскольку поворотное ускорение пропорционально синусу угла между осью поворота подвижной системы и направлением относительной скорости, то очевидно, что для различных частиц гироскопа поворотное ускорение будет иметь неодинаковую величину. Для частиц, окружная скорость которых в данный момент параллельна оси поворота, $j_{пов}$ равно нулю. Если принять во внимание симметрию гироскопа, то нетрудно сообразить, что суммарные поворотные силы инерции, развиваемые всеми частицами гироскопа, дадут пару сил, ориентированную так же, как силы инерции для частиц, расположенных на оси поворота (рис. 75, *а*). Эта пара сил и представляет собой реакцию, с которой ось гироскопа действует на руки наблюдателя, стремящегося повернуть гироскоп (рис. 75, *б*); когда наблюдатель поворачивается с гироскопом в руках справа налево, ось гироскопа оказывает на правую руку давление вверх, а на левую — вниз (ось вращения гироскопа стремится совпасть с осью поворота).



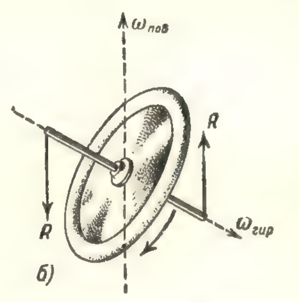


Рис. 75. Кориолисовы силы (*а*) и силы реакции (*б*) в гироскопе.

Вследствие суточного вращения Земли поворотные силы инерции проявляются при движении по поверхности Земли. Суточное вращение Земли, происходящее с

запада на восток, можно изобразить вектором угловой скорости, направленным по земной оси от южного полюса к северному. Если какое-либо тело движется в северном полушарии по меридиану от полюса к экватору, то поворотное ускорение этого тела направлено касательно к поверхности Земли на восток, и следовательно, поворотная сила инерции, развиваемая этим телом, направлена на запад (рис. 76). Поворотная сила инерции, развиваемая рекой, текущей от полюса к экватору, приложена к западному берегу реки, который со временем подмывается и поэтому обычно бывает круче восточного берега.

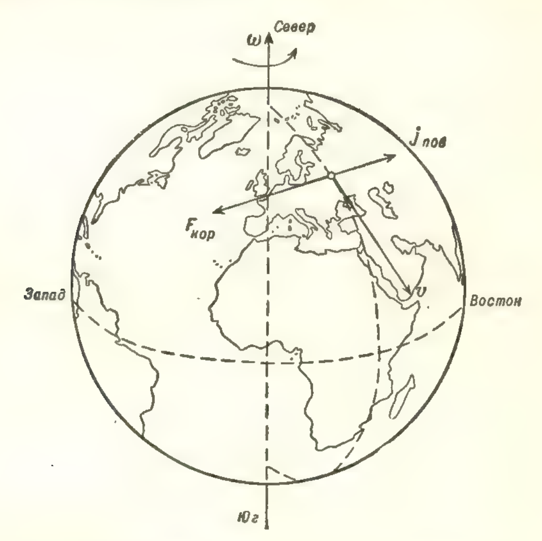


Рис. 76. Кориолисовы силы при движении по поверхности Земли.

Нетрудно сообразить, что и в южном полушарии поворотное ускорение тела, движущегося от полюса к экватору, направлено в ту же сторону, что и в северном полушарии, т. е. на восток, а поворотная сила инерции — на запад.

Сказанным объясняется направление *пассатных ветров*. У экватора потоки нагретого воздуха поднимаются вверх и растекаются к полюсам. В нижнем слое атмосферы холодный воздух движется от полюсов к экватору. В этом нижнем течении воздуха поворотные силы инерции создают давление, которое отклоняет потоки воздуха от меридиана на запад, так что по мере приближения к тропикам ветер получает постоянное направление: в северном полушарии — с северо-востока, в южном полушарии — с юго-востока на запад.

Поворотные силы инерции играют известную роль во всех областях техники, где встречаются быстро вращающиеся диски, колеса, маховики и т. д. В железнодорожном деле гироскопические силы проявляются на закруглениях пути, увеличивая вертикальное давление колес на внешний рельс и уменьшая давление на внутренний. При движении велосипеда гироскопические силы имеют большое значение, играя здесь полезную роль, а именно: реактивный момент вращающихся колес способствует устойчивости велосипеда.

ГЛАВА VIII

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТЕЛ

§ 40. Упругие свойства тел

Любое тело под действием сил, которые уравновешиваются вокруг его центра массы, испытывает более или менее значительную *деформацию*.

Деформацией называют смещение частиц тела относительно друг друга, а также изменение среднего расстояния между частицами тела. Чтобы судить о деформации, мысленно разделяют твердое тело на отдельные «волокна», или «слои». Иногда для наблюдения деформации на поверхности тела рисуют сетку и обнаруживают деформацию тела по тем изменениям, которые попутно испытывает эта нарисованная на поверхности тела сетка.

Важнейшими деформациями являются: *всестороннее сжатие и всестороннее растяжение*; *продольное сжатие и продольное растяжение*; *сдвиг*; *кручение*; *поперечный и продольный изгибы*. Все эти деформации, равно как и любые другие, можно свести всего к *двум основным* деформациям — *продольному растяжению* и *сжатию*, осуществленным одновременно по разным направлениям. Как мы увидим ниже, изгиб сводится к растяжению волокон выпуклой поверхности стержня и сжатию волокон вогнутой. Сдвиг сводится к одновременному сжатию и растяжению в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Если по устранении внешних сил деформация исчезает, то тело называют *упругим*; если же остается заметная «остаточная» деформация, тело называют *пластичным*. Степень упругости измеряют отношением работы, которая может быть произведена телом при постепенном устранении деформирующих сил, к работе, затраченной на деформацию тела.

Под упругостью в широком смысле слова подразумевают вообще присущее телам стремление восстанавливать временно измененный внешними силами объем или временно утраченную форму. Различают объемную упругость и упругость формы. *Объемная упругость* является универсальным свойством всех тел, включая жидкости и газы, хотя газы тем и отличаются от жидкостей, что их объемная упругость односторонняя: они противодействуют сжатию, но не про-

тиводействуют расширению. *Упругость формы* присуща твердым телам. Тело пластично, если его упругость формы выражена слабо.

Одно и то же тело в зависимости от внешних условий — температуры и давления — может быть упругим или же пластичным. Такие тела, как сталь, резина, дерево, при обычных условиях упруги. Свинец, сырая глина, воск пластичны. Но под давлением в несколько тысяч атмосфер или при высокой температуре сталь становится такой же пластичной, как свинец; свинец же, замороженный в жидком воздухе, приобретает все свойства упругого материала.

Можно ли рассматривать явления упругости как чисто механическую форму движения? Смещение материальных частиц тела играет, конечно, самую существенную роль при деформации тела. Но исчерпываются ли явления, определяющие упругие свойства тел, механическим смещением частиц? Нет, *упругость представляет собой сложное сочетание разнообразных явлений*, из которых некоторые никак не могут быть отнесены к механической форме движения. Упругость газов всецело происходит вследствие теплового движения молекул газа. В твердых телах силы, возникающие при деформации и стремящиеся вернуть смещенные частицы тела в их положения равновесия, имеют электрическое происхождение. Молекулярные силы, имеющие электрическую природу, заметно влияют на упругость сжатых газов. Вместе с тем тепловое движение оказывает решающее влияние на упругость твердых тел. Таким образом, упругие свойства тел определяются взаимосвязью механических, электрических и тепловых явлений.

При исследовании, схематизируя явления упругости и следуя Гуку, рассматривают упругость как связь между деформацией и напряжением. При этом отвлекаются от молекулярного строения тел и природы упругих сил, от влияния теплового движения и т. д. Это упрощенное понимание упругости и *закон Гука*, устанавливающий, что небольшие деформации пропорциональны напряжению, приняты за основу в *математической теории упругости*. Математическая теория упругости является фундаментом для громадного количества инженерных расчетов. Применение этой теории к проблемам техники вызвало развитие учения о сопротивлении материалов, учения о вибрациях в машинах и сооружениях и других дисциплин. На математической теории упругости основано учение о звуке. Кроме того, понятия и теоремы математической теории упругости исторически сыграли большую роль в разработке оптики и учения об электричестве.

В кристаллофизике явления упругости трактуются как результат *электрических взаимодействий* частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки (§§ 124 и 130). Применение законов электрического взаимодействия частиц в кристаллах позволило рассчитать силы упругости и выявить их зависимость от строения кристалла и электрополярных свойств частиц.

Электрическая теория сил, связующих частицы в кристалле, существенно продвинула вперед наше понимание явлений упругости. Эта теория вскрыла связь между упругостью твердых тел и кристаллообразующими процессами. А это, в свою очередь, по мере развития теоретической кристаллохимии (§ 125), привело к раскрытию зависимости механических свойств от химического строения тел.

Однако картина строго упорядоченного расположения частиц в пространстве по узлам кристаллической решетки и их электрического взаимодействия еще не является полной. Естественно, что оказалось необходимым учесть влияние теплового движения частиц. На этой основе получила свое развитие *термодинамическая теория упругости* твердых тел.

Сопоставление упомянутых теорий с опытами показало, что в действительности явления упругости еще более сложны, а именно: обнаружилось, что механические свойства тел в высокой мере зависят от *мозаической структуры* тел, т. е. от того строения, которое получается, когда вместо правильной кристаллической решетки вследствие ее глубоких повреждений образуется сочетание плотно расположенных, различно ориентированных микроскопических кристалликов. Было доказано, что механические свойства кристалла в высокой мере зависят от тех неупругих (пластических, необратимых) деформаций, которым когда-либо *ранее* подвергался кристалл.

Благодаря инерции частиц тела, пришедших в движение при деформации тела, из столкновения двух противоположных тенденций — податливости и сопротивления — порождаются *упругие колебания.* Они многообразны (колебания растяжения и сжатия, прогиба, кручения и т. п.).

Механические колебания, вызывающие периодические уплотнения или сдвиги среды, порождают в среде распространение волн упругих колебаний среды. В воздухе упругие колебания, имеющие характер чередующихся уплотнений и разрежений, проявляются как звук, а при больших частотах — как ультразвук. При внезапных больших уплотнениях воздуха картина качественно изменяется: воздух передает ударное возмущение, которое распространяется со скоростью, значительно превышающей скорость звука.

В твердых телах картина распространения упругих колебаний сложнее, чем в газах. Звуковые явления здесь связаны не только с волнами уплотнения, но и с волнами сдвига.

Затухание упругих колебаний в среде вследствие внутреннего трения приводит к преобразованию энергии деформации в энергию молекулярно-теплового движения. Процессы, в которых затрачивается работа на деформацию и на трение, составляют главное русло преобразования механического движения в молекулярно-тепловое.

§ 41. Закон Гука. Энергия деформированного тела

Величину деформации оценивают отношением ε изменения размера тела Δx к его первоначальному размеру x:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}.$$

Это отвлеченное число ε, указывающее, на какую часть увеличились или уменьшились размеры тела, называют *относительной деформацией*.

При всестороннем растяжении или сжатии x означает объем V, а Δx означает увеличение или уменьшение объема ΔV, вызванное деформацией ($\varepsilon = \frac{\Delta V}{V}$). При продольном растяжении или сжатии x означает длину l. При сдвиге деформацию оценивают углом сдвига θ (см. рис. 78, стр. 168).

Если мысленно рассечь упруго деформированное тело на две части, то одна из этих частей будет действовать на другую с некоторыми силами, распределенными по всему сечению. Силы эти называются *внутренними упругими силами*. Внешние силы, действующие на деформированное тело, уравновешиваются внутренними силами упругости. Величина и направление упругих сил зависят от вида деформации. Тело будет сопротивляться внешним воздействиям до тех пор, пока интенсивность внутренних сил не превзойдет известного предела, после чего тело или потеряет упругие свойства, или разрушится.

Интенсивность упругих сил характеризуют величиной силы, действующей на единицу площади поперечного сечения, взятого в направлении, нормальном или касательном к действующим силам. Эти величины называют *нормальным* и *касательным напряжениями* деформированного тела. При равномерном распределении усилий, для того чтобы найти напряжение p, надо разделить силу F на площадь S поперечного сечения, по которому эта сила распределена:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Нормальное напряжение, сжимающее тело, иначе называют давлением.

Когда говорят о давлении или напряжении в какой-либо точке, то условно понимают под «точкой» элементарно малый участок поверхности dS. Вследствие предельной малости выделенного таким образом участка поверхности можно считать, что сила dF, действующая на этот участок, распределена по площади участка dS равномерно. Поэтому под давлением и напряжением в точке поверхности подразумевают отношение

$$p = \frac{dF}{dS}. \qquad (1)$$

Применяют различные единицы для измерения давления. В абсолютной системе *CGS* единицей силы является 1 дина и единицей площади — 1 *см*²; поэтому единицей давления служит 1 *дина/см*² — так называемая *бария* [1]).

В технике единицей давления часто служит 1 *кГ/м*².

В качестве единиц давления применяют также физическую и техническую атмосферы. *Физическая* (*нормальная*) *атмосфера* есть то давление, которое своим весом производит столб ртути высотой в 760 *мм* [2]). Нетрудно подсчитать, что физическая атмосфера $\approx 76\cdot 13{,}6 = 1033$ *Г/см*² $= 1{,}033$ *кГ/см*². *Технической атмосферой* называют давление в 1 *кГ* на 1 *см*².

Английский физик Роберт Гук в 1675 г. обнаружил, что *напряжение деформированного тела пропорционально относительной деформации*:

$$p = K\frac{\Delta x}{x}. \qquad (2)$$

Коэффициент K называют *модулем упругости*.

Закон Гука справедлив только до известных пределов. При некотором напряжении нарушается прямая пропорциональность между напряжением и деформацией. Это напряжение называют *пределом пропорциональности* (P_p). При несколько большем напряжении, называемом *пределом упругости* (P_r), тело теряет свои упругие свойства; при устранении внешних сил форма тела восстанавливается не полностью; остается так называемая *остаточная деформация*.

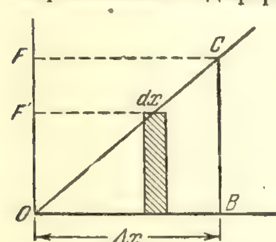


Рис. 77. График работы, совершаемой при деформации.

Если все физические свойства тела, в частности упругие свойства, в любом участке тела одинаковы по всем направлениям, то тело называют *изотропным*. Стекловидные твердые тела обычно изотропны. У кристаллов некоторые физические свойства, в частности упругость, не одинаковы для разных направлений. Такие тела называют *анизотропными*.

Работа внешних сил обращается при упругой деформации тела в потенциальную энергию деформированного тела.

Графически зависимость деформации от действующей силы изображается в пределах применимости закона Гука прямой линией (рис. 77). Придадим деформации элементарно малое приращение dx; для этого нужно затратить работу $F'dx$. На рис. 77 эта работа

---

[1]) От греческого báros — т я ж е с т ь.

[2]) При плотности ртути 13,5951 *г/см*³ (при 0° С) и при ускорении силы тяжести 980,665 *см/сек*² (широта 45° на уровне моря).

изобразится площадью заштрихованной вертикальной полоски. Переходя последовательно от одного состояния к состоянию бесконечно близкому, мы сможем вычислить полную работу U, произведенную внешней деформирующей силой при ее изменении от нуля до F. Эта работа, изображенная на рис. 77 площадью треугольника OBC, будет равна:

$$U=\frac{F\Delta x}{2}.$$

Здесь F — деформирующая сила, а Δx — вызванная ею деформация любого вида. Пользуясь этой формулой, легко вычислить величину потенциальной энергии для каждого случая деформации.

Учитывая, что по закону Гука деформирующая сила F связана с модулем упругости K соотношением $F=K\frac{\Delta x}{x}S$, получаем:

$$U=K\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2\cdot\frac{Sx}{2}. \qquad (3)$$

§ 42. Модуль объемной упругости. Сжимаемость

Всестороннему сжатию или растяжению тело подвергнется в том случае, если к поверхности тела со всех сторон будут приложены силы одного и того же напряжения p. Такое же напряжение будет действовать и на любую поверхность, мысленно проведенную внутри тела. Частное от деления этого напряжения p на абсолютную величину относительного изменения объема тела называется *модулем всесторонней объемной упругости*:

$$K=\frac{p}{\left|\frac{\Delta V}{V}\right|}. \qquad (4)$$

Если $\frac{\Delta V}{V}=1$, то $K=p$. Таким образом, если бы упругие свойства тела при любой величине всестороннего растяжения оставались неизменными, то всестороннее растягивающее напряжение K, равное модулю упругости, было бы способно увеличить объем тела в два раза. Для всех тел это напряжение во много раз больше предела прочности, поэтому тело разрушится задолго до того, как объем его возрастет в два раза.

Легко доказать, что *относительное увеличение* (или *уменьшение*) *объема* $\varepsilon=\frac{\Delta V}{V}$ *в три раза больше относительного увеличения* (или *уменьшения*) *линейных размеров тела*. Пусть куб со стороной, равной l, испытывает всестороннее объемное растяжение. Каждая

сторона куба при этом удлиняется на Δl. Окончательный объем куба будет равен $(l+\Delta l)^3$, относительное увеличение объема

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V} = \frac{(l+\Delta l)^3 - l^3}{l^3} = 3\frac{\Delta l}{l} + 3\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^3.$$

Двумя последними членами в правой части этого уравнения можно пренебречь вследствие малости величины $\frac{\Delta l}{l}$, поэтому

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 3\frac{\Delta l}{l}. \qquad (5)$$

Как уже было упомянуто, объемной упругостью обладают все тела: и твердые, и жидкие, и газообразные. Упругие свойства жидкостей и газов полностью характеризуются модулем объемной упругости.

Молекулы жидкости находятся в столь быстром тепловом движении, что присущая кристаллическим телам упорядоченность пространственного распределения молекул в жидкостях является нарушенной. Однако плотность жидкости мало отличается от плотности твердого тела из того же вещества, поэтому *силы молекулярного взаимодействия в жидкостях почти так же велики, как и в твердых телах*. Благодаря подвижности молекул жидкость оказывает крайне малое сопротивление внешним воздействиям, изменяющим ее форму. Но благодаря силам, которые связывают движущиеся относительно друг друга молекулы, жидкость оказывает громадное сопротивление воздействиям, стремящимся изменить ее объем.

Чтобы отдать себе отчет в том, насколько велико сопротивление жидкостей сжатию, представим себе, что в цилиндр высотой в 1 *м* и поперечным сечением 1 *см*^{2} налита вода; если давить на поршень, закрывающий сверху воду, силой в 200 *кГ*, то длина водяного столба уменьшится всего на 1 *см* (при тех же условиях ртуть испытывала бы сжатие меньше чем на 1 *мм*). По устранении сил, вызвавших сжатие жидкости, объем жидкости принимает прежнюю величину.

Величина, обратная модулю объемной упругости (величина $\frac{1}{K}$), носит название *коэффициента сжимаемости*, или просто *сжимаемости*.

Численно коэффициент сжимаемости (так же как и модуль упругости) зависит от того, в каких единицах измерено давление. Чаще всего давление измеряют в атмосферах; тогда коэффициент сжимаемости $\frac{1}{K}$ есть число, показывающее, на какую долю первоначального значения уменьшается объем тела при увеличении давления на 1 *ат*;

именно этот смысл имеют приводимые ниже численные значения *коэффициентов сжимаемости некоторых жидкостей* при комнатной температуре:

Бензол	0,000075	Ртуть	0,0000038
Бром	0,000058	Сероуглерод	0,000087
Вода	0,000049	Скипидар	0,000078
Глицерин	0,000025	Спирт	0,000112
Керосин	0,000077	Толуол	0,000086
Масло оливковое	0,000063	Эфир	0,000153

§ 43. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль сдвига и соотношение между ними

При продольном растяжении растягивающие силы F равномерно распределены по поперечному сечению S испытываемого образца, поэтому напряжение p находим простым делением: $p=\frac{F}{S}$.

Отношение E напряжения p к относительному удлинению $\frac{\Delta l}{l}$ носит название *модуля упругости*, или *модуля Юнга*:

$$E=\frac{p}{\left|\frac{\Delta l}{l}\right|}. \tag{6}$$

Подставляя сюда $p=\frac{F}{S}$, получим:

$$\Delta l=\frac{Fl}{ES}, \tag{7}$$

т. е. удлинение прямо пропорционально действующей силе и первоначальной длине образца и обратно пропорционально модулю Юнга для данного материала и поперечному сечению образца.

Значения модуля Юнга для различных материалов приведены в таблице на стр. 179. Для одного и того же материала величина E зависит от примесей и обработки. У кристаллов и волокнистых веществ величина E зависит от направления растяжения.

Когда нагрузкой вызвано удлинение бруска, можно наблюдать, что по истечении некоторого промежутка времени удлинение само, без увеличения нагрузки, возрастет на некоторую небольшую величину. Когда нагрузка устранена, то можно наблюдать, что для полного исчезновения деформации даже в пределах упругости также требуется некоторый промежуток времени. Это явление называют *упругим последействием*. Величина упругого последействия в металлах при тех напряжениях, с которыми приходится иметь дело в технике, ничтожна. Как правило, упругое последействие тем меньше, чем однороднее материал.

Растяжение брусков сопровождается их поперечным сжатием. Отношение поперечного сжатия $\frac{\Delta d}{d}$ к продольному удлинению $\frac{\Delta l}{l}$ называют *коэффициентом Пуассона* μ (d — поперечный размер бруска). Таким образом, поперечное сжатие равно продольному удлинению, умноженному на коэффициент Пуассона:

$$\frac{\Delta d}{d} = \mu \frac{\Delta l}{l}. \tag{8}$$

Зная μ, можно судить об изменении объема бруска при растяжении в пределах пропорциональности.

Коэффициент Пуассона [1])

Материал	μ	Материал	μ
Сталь	0,25—0,33	Цинк катаный	0,21
Медь и бронза	0,31—0,34	Стекло	0,25
Чугун	0,23—0,27	Каучук	0,47

Сдвигом называют такую деформацию, при которой все слои тела, параллельные данной плоскости, не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу (рис. 78). Отрезок $\Delta x = AA'$ называют *абсолютным сдвигом*, угол θ — *углом сдвига*. При малом угле сдвига (если θ выражен в радианах)

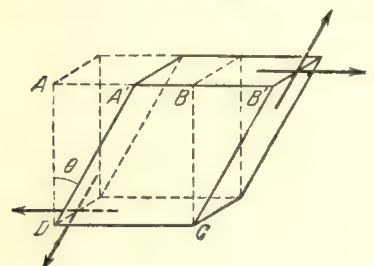


Рис. 78. Деформация сдвига.

$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta x}{x}, \tag{9}$$

поэтому угол θ часто называют *относительным сдвигом.*

Обычно сдвиг вызывается двумя парами сил, приложенными, как показано на рис. 78, к противоположным граням деформируемого тела.

---

[1]) Если бы значение μ было равно $\frac{1}{2}$, то при линейном расширении тела его объем не изменялся бы. В действительности линейное растяжение вызывает некоторое увеличение объема растягиваемого тела и тем большее, чем ближе значение μ к нулю. Для многих веществ μ имеет значение, близкое к среднему между указанными пределами (около $\frac{1}{4}$).

Согласно закону Гука относительный сдвиг θ должен быть пропорционален касательному напряжению $T = \frac{F}{S}$:

$$T = G\theta. \qquad (10)$$

Коэффициент G носит название *модуля сдвига.*

На рис. 78 отчетливо видно, что все слои деформируемого образца, параллельные AC, укорачиваются в этом направлении, а слои, параллельные BD, удлиняются в направлении BD.

Сдвиг может быть вызван одновременным сжатием в направлении диагонали AC и растяжением в перпендикулярном к ней направлении BD.

Можно показать, что *относительное удлинение или укорочение образца в направлении действия сжимающих или растягивающих сил равно половине относительного сдвига, взятого под углом в 45° к этим силам*:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\theta}{2}. \qquad (11)$$

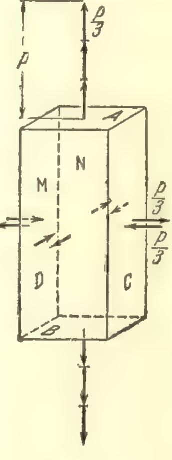


Рис. 79.

Модуль Юнга E, коэффициент Пуассона μ, модуль объемной упругости K и модуль сдвига G не являются независимыми. Они связаны друг с другом двумя уравнениями. Выведем эти уравнения.

Представим себе прямоугольный стержень (рис. 79), продольно растягиваемый силами напряжение которых равно p. Относительное удлинение стержня $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E}$. Стержень испытывает поперечное сжатие равное продольному удлинению, умноженному на коэффициент Пуассона: $\frac{\Delta d}{d} = \mu\varepsilon$. Приложим мысленно к боковым граням стержня, к каждой из них, по две равные и направленные в противоположные стороны силы, напряжения которых равны $\frac{p}{3}$. Ясно, что эти силы, как взаимно уравновешивающие друг друга, не произведут никаких деформаций и первоначальная деформация останется неизменной. Разложим растягивающее стержень напряжение p, приложенное к концам стержня, на три равные напряжения $\frac{p}{3}$, действующие по одной прямой. Теперь мы можем как угодно сгруппировать действующие на стержень силы.

Растягивающие напряжения $\frac{p}{3}$, действующие на все грани стержня, вызовут всестороннее объемное растяжение $\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{3K}$, эквивалентное всестороннему линейному относительному растяжению $\frac{p}{9K}$.

Растягивающие напряжения $\frac{p}{3}$, действующие на грани A и B, совместно со сжимающими напряжениями, действующими на грани C и D, произведут сдвиг $\theta = \frac{p}{3G}$ (в направлении 45° к оси стержня) эквивалентный в два раза

меньшему удлинению в направлении оси стержня и такому же поперечному сжатию $\frac{p}{6G}$.

Точно так же оставшиеся растягивающие напряжения, действующие на верхнее и нижнее основания стержня, совместно со сжимающими напряжениями, действующими на две другие боковые грани N и M, произведут сдвиг, эквивалентный удлинению $\frac{p}{6G}$ в направлении оси и такому же поперечному сжатию.

Итак, полное продольное растяжение

$$\frac{\Delta l}{l}=\frac{p}{9K}+\frac{p}{6G}+\frac{p}{6G}=\frac{p}{E},$$

откуда

$$\frac{1}{E}=\frac{1}{9K}+\frac{1}{3G}. \tag{12}$$

Поперечное сжатие $\frac{\Delta d}{d}$, перпендикулярное к граням C и D или M и N,

$$\frac{\Delta d}{d}=\frac{\mu p}{E}=\frac{p}{6G}-\frac{p}{9K},$$

откуда

$$\frac{\mu}{E}=\frac{1}{6G}-\frac{1}{9K}. \tag{13}$$

Уравнением (12) пользуются для вычисления модуля всесторонней упругости K, исходя из легко определяемых опытным путем модулей Юнга E и сдвига G.

Складывая (12) и (13), получим уравнение, служащее для вычисления коэффициента Пуассона:

$$\frac{1}{E}(1+\mu)=\frac{1}{2G},$$

или

$$\mu=\frac{E}{2G}-1.$$

§ 44. Характеристика механических свойств твердого тела по диаграмме растяжения. Явление наклепа

Практически наиболее удобным способом исследования механических свойств твердого тела являются испытание тела на растяжение и построение *диаграммы растяжения*.

По оси ординат откладывают напряжение p (нагрузку на единицу площади поперечного сечения образца), по оси абсцисс — относительное удлинение. На рис. 80 изображены диаграммы растяжения материалов, наиболее часто применяемых в технике: сварного железа, мягкой и твердой стали. Все три кривые имеют прямолинейный участок, круто наклоненный к оси абсцисс, в пределах которого материалы вполне подчиняются закону Гука. Точка A на всех этих кривых соответствует *пределу пропорциональности* P_p, с которым практически совпадает *предел упругости* P_r (§ 41). За пределом пропорциональности удлинения начинают возрастать быстрее нагрузок, и после перехода так называемой «крити-

ческой» точки (на кривой, изображающей растяжение сварного железа,— это точка B) удлинение может возрастать без увеличения нагрузки. Напряжение, которое соответствует критической точке B, называют *пределом текучести* P_s.

При дальнейшей нагрузке материал вновь приобретает способность сопротивляться растяжению: кривая загибается вверх. Возрастание нагрузок продолжается до тех пор, пока на бруске не появится местное сужение. Теперь деформация сосредоточивается у места сужения. Удлинение продолжает возрастать даже при уменьшающейся растягивающей силе, так как произошло значительное уменьшение поперечного сечения, и, наконец, в точке C наступает разрыв. Нагрузку, действующую в момент разрыва, отнесенную к первоначальной площади поперечного сечения, называют *пределом прочности*, или *временным сопротивлением* R.

Рис. 80. Диаграмма растяжения.

Если деформированный брусок, напряжение которого несколько превосходит предел упругости, начать разгружать, то происходящее при этом уменьшение деформации изобразится прямой, которая расположена параллельно прямолинейному участку линии OD (рис. 81). При полном устранении растягивающих сил брусок окажется на величину OE длиннее своей первоначальной длины; OE является *остаточной деформацией*.

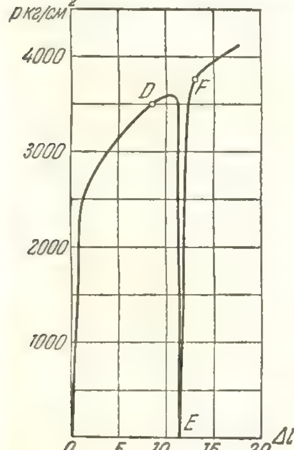


Рис. 81. Диаграмма растяжения, поясняющая явление наклепа.

До перехода предела пропорциональности (если растяжение производится «адиабатно», т. е. без притока или отдачи тепла) растяжение сопровождается небольшим понижением температуры. Появление остаточной деформации сопровождается резким повышением температуры.

Замечательное свойство многих твердых тел (в особенности металлов) заключается в том, что *при повторных испытаниях твердое тело проявляет иные механические свойства, а не те, которые были проявлены этим телом при первом испытании*. Твердые тела как бы запечатлевают в себе историю всех произведенных на них механических воздействий. Остаточные деформации (иногда весьма малые, незаметные на глаз) существенно изменяют механические свойства твердого тела — *упрочняют его*.

Внешне явление заключается в следующем. Как было сказано выше, если деформированный брусок, напряжение которого превзошло предел упругости, начать разгружать от растянувших брусок сил, то уменьшение деформации изобразится прямой, которая расположена параллельно прямолинейному участку диаграммы первого растяжения (рис. 81). История этого первого растяжения будет запечатлена удлинением бруска на величину остаточной деформации OE, сохраняющейся неопределенно долго при полном устранении нагрузки. Если теперь мы повторим испытание механических свойств бруска, т. е. снова начнем его растягивать, и будем графически изображать зависимость между удлинением и нагрузкой, то окажется, что теперь предел пропорциональности будет достигнут при значительно большем напряжении, чем в первоначальном испытании: упругость бруска стала больше. На рис. 81 предел пропорциональности изобразится теперь точкой F. Предварительный переход за предел пропорциональности «закаляет» материал. Это явление называют *наклепом*.

Первоначальные упругие свойства можно вернуть наклепанному металлу путем отжига, т. е. выдерживанием металла при довольно высокой температуре и медленным охлаждением. При одинаковой деформации в наклепанном металле возникают бо́льшие напряжения, чем в отожженном, и поэтому наклепанный металл разрушается при меньшей деформации, чем отожженный. Зато при одинаковых напряжениях наклепанный металл деформируется меньше отожженного. Поэтому кованые, вальцованные, прессованные металлы более упруги, но зато и более хрупки, чем металлы отожженные или литые.

Многие твердые тела, в том числе все металлы, состоят из отдельных очень мелких кристаллов («зерен»), иногда отделенных друг от друга веществом иного состава. Эти кристаллы расположены в беспорядке, и механические характеристики, получаемые в результате испытаний, представляют собой не что иное, как видоизмененные влиянием прослоек средние величины для отдельных кристаллов, расположенных по различным направлениям. Поэтому, чтобы уяснить себе особенности обычных *поликристаллических* материалов, важно изучить механические свойства *монокристаллов*[1]).

Монокристаллы анизотропны: механические свойства монокристаллов зависят от направления действующей нагрузки по отношению к кристаллографическим осям. При растяжении монокристалла после перехода критической точки начинается *пластическая деформация*, а именно скольжение отдельных слоев кристалла относительно друг друга по определенным плоскостям.

Деформации мелких кристаллов, из которых составлен обыкновенный металлический образец, имеют такой же характер. Когда

[1]) От латинского monos — единый.

напряжение достигает величины предела упругости, начинаются скольжения в некоторых наиболее неблагоприятно расположенных микрокристаллах.

При устранении внешних сил форма образца восстанавливается не полностью, так как этому препятствует пластическая деформация микрокристаллов, в которых произошло скольжение. Поэтому в образце останутся некоторые внутренние напряжения: те упруго деформированные микрокристаллы, которые соприкасаются с кристаллами, испытавшими пластическую деформацию, останутся несколько растянутыми. При повторной нагрузке течение образца наступит при большем напряжении, нежели при первоначальной нагрузке (рис. 81, точка F), так как теперь скольжение начнется у тех кристаллов, которые при первоначальном растяжении до напряжения, уже превосходившего предел упругости (рис. 81, точка D), испытывали только упругие деформации. Этим объясняют явление наклепа.

§ 45. Пластичность

Идеальная пластичность (т. е. полная податливость к изменению формы, текучесть) свойственна жидкостям, но, кроме обычных жидкостей, существует большое число пластичных тел, которые обладают текучестью при тех или иных условиях. Обычные вязкие жидкости обнаруживают течение (что можно рассматривать как необратимые деформации сдвига) при самых малых напряжениях. Упругим твердым телам свойственны при малых напряжениях обратимые упругие деформации. Пластичные же материалы, такие, как глины, краски, вазелин и т. п., при малых напряжениях испытывают лишь упругие обратимые деформации, но текут под действием бóльших сил, превосходящих «предел текучести». Таким образом, пластичные тела сохраняют свою форму под действием малых сил (например, силы тяжести), но легко деформируются и принимают любую форму при бóльших усилиях.

Вообще говоря, все твердые тела в той или иной степени пластичны, т. е. текут в определенных условиях. Как уже было пояснено в предыдущих параграфах, лучшие сорта стали обнаруживают необратимые, остаточные деформации при больших напряжениях, действующих длительное время. Пластическое течение обнаруживают также и горные породы в земной коре. В горах бывают хорошо видны изгибы пластов осадочных горных пород, которые вначале были горизонтальны, а затем под действием тектонических[1]) сил медленно текли в течение многих тысячелетий и в результате образовали причудливые складки.

Для изучения атомной природы пластической деформации монокристаллов (на примере каменной соли) А. Ф. Иоффе (1918 г.)

[1]) Тектоническими явлениями называются явления, происходящие при смещениях земной коры: землетрясения, сдвиги, складкообразования.

впервые применил рентгеновы лучи, наблюдая на флуоресцирующем экране те изменения, которые претерпевает рентгенограмма при выходе за предел текучести. Он установил, что механизм пластической деформации заключается в сдвигах отдельных участков кристалла, сопровождаемых рядом вращений (поворотов). Эти опыты положили начало целому направлению в физике кристаллов (рентгенографический анализ пластической деформации).

Одной из особенностей, типичных для деформации кристаллов в отличие от деформации аморфных тел, является *прерывистость процесса*, впервые подмеченная А. Ф. Иоффе в сотрудничестве с голландским физиком П. Эренфестом и подробно изученная М. Классен-Неклюдовой (1927—1928 гг.). Испытанию подвергались образцы из каменной соли, алюминия и латуни при высоких температурах. Оказалось, что деформация идет при этом скачками, повторяющимися через поразительно равные промежутки времени и сопровождающимися легким звуком наподобие тикания часов. Величина такого элементарного сдвига бывает порядка одного или нескольких микронов. С увеличением нагрузки скачки учащаются, так же как и с повышением температуры.

Н. Давиденковым (1935 г.) было поставлено исследование, при котором образец из монокристалла цинка непрерывно деформировался с постоянной скоростью, не пре вышающей 1 *мм* в месяц, при длине образца в 25 *мм* (по аналогии с «ползучестью» металлов при высокой температуре). Оказалось, что, несмотря на такие малые скорости, деформация по-прежнему происходила резко выраженными скачками, повторявшимися через очень большие промежутки времени и достигавшими значительной величины (порядка 0,014 *мм*).

Таким образом, прерывистость оказалась действительно неотъемлемой особенностью деформации кристаллов — по крайней мере в области температур «ползучести».

Пластичность поликристаллических твердых тел, в особенности пластичность металлов, с особой обстоятельностью была изучена в последние десятилетия проф. В. Д. Кузнецовым и М. А. Большаниной. В. Д. Кузнецов дал фундаментальный (многотомный) и самый тщательный в мировой литературе обзор всех важнейших исследований в области физики твердых тел.

В связи с многочисленными запросами различных отраслей промышленности, имеющих дело с такими материалами, как краски, керамика, смазки, каучук, целлюлоза, битумы, клеи и т. д., в последнее время образовалась новая отрасль науки — *реология*[1]). Реология изучает вопросы текучести вещества. Она представляет собой часть физической механики и является дисциплиной, смежной с гидромеханикой и теорией упругости.

---

[1]) От греческого rheos — п о т о к.

В реологии стремятся составить такую систему уравнений, связывающих напряжение, деформации и скорости деформаций, которая была бы применима при рассмотрении течения всех реальных веществ, когда течение вызвано любым способом — растяжением, сжатием, кручением, изгибом и т. д. Такая общая задача еще не разрешена и разработаны лишь отдельные частные случаи.

§ 46. Прочность и твердость

Прочность тел можно характеризовать двумя величинами: *сопротивлением скольжению* и *сопротивлением отрыву* частиц. *Если сопротивление скольжению составляет больше половины* [1]) *сопротивления отрыву частиц, то материал хрупок: разрушение его происходит без пластических деформаций.* Если же сопротивление скольжению меньше, чем половина сопротивления отрыву частиц, то сначала начнется скольжение по плоскостям, наклонным под углом в 45° к растягивающим усилиям, и разрушению будет предшествовать пластическая деформация.



Рис. 82. Мягкая фетровая шляпа, опущенная в жидкий воздух, становится ломкой.

Сопротивление скольжению сходно с вязкостью жидкостей; оно, как и вязкость, *возрастает при понижении температуры* и при увеличении скорости деформации. Напротив, *сопротивление отрыву мало зависит от температуры* и от скорости деформации. Поэтому, если у какого-либо тела при нормальной температуре сопротивление скольжению превышает половину величины сопротивления отрыву частиц и поэтому тело хрупко, то при повышении температуры сопротивление скольжению уменьшится и тело сделается пластичным. Наоборот, всякое пластичное тело при достаточном понижении температуры становится хрупким (рис. 82), так как сопротивление скольжению, возрастая при понижении температуры, в конце концов превысит половину сопротивления отрыву. Свинец, пластичный при комнатной температуре, становится хрупким при температуре жидкого воздуха.

---

[1]) Когда мы растягиваем материал, то в плоскостях, ориентированных под углом в 45° к направлению растягивающего усилия, создаются напряжения, стремящиеся произвести сдвиг материала; величина этих напряжений (касательных сил в слое, действующих на единицу площади) в два раза меньше растягивающего напряжения. Действительно, в плоскости под углом в 45° к направлению растягивающего усилия действует сила в $\cos 45° \left(=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ раз меньшая, а площадь слоев, по которой она распределена, здесь в $\sqrt{2}$ раз больше.

Сопротивление отрыву частиц, как было сказано, не зависит (или, точнее, мало зависит) от скорости деформации, тогда как *сопротивление скольжению довольно быстро возрастает при увеличении скорости деформации.* Поэтому тело, пластичное по отношению к медленным увеличениям нагрузки, становится хрупким в случае быстрой деформации. Так, например, цинк пластичен при медленном увеличении нагрузки и хрупок при быстрой деформации.

Сопротивление скольжению в поликристаллических телах, в частности металлах, *тем более велико* (при прочих равных условиях), *чем меньше величина зерен.* Укрупнение зерен, которое может быть достигнуто выдерживанием металла при достаточно высокой температуре, делает металл более пластичным. При быстрой кристаллизации металлического расплава зерна получаются мелкие и металл оказывается менее пластичным. При чрезмерном переохлаждении расплава снова получается крупнозернистый металл.

На величину зерен, получающихся при кристаллизации расплава, кроме скорости охлаждения, сильно влияют посторонние примеси. Нерастворимые примеси часто содействуют образованию мелких зерен, что понижает пластичность металла. Но и при одинаковой величине зерен металл, содержащий нерастворимые примеси, характеризуется повышенным сопротивлением скольжению и поэтому является более хрупким, чем чистый металл.

Благодаря явлению наклепа и зависимости механических свойств от величины зерен сочетание холодной и термической обработки металла позволяет изменять в довольно широких пределах упругость, пластичность и прочность металла.

Прочность зависит не только от внутренних свойств тела, но и от состояния поверхности тела. Повреждения поверхности, трещины на поверхности, надломы, понятно, сильно снижают прочность образца.

Опыты, поставленные акад. А. Ф. Иоффе, установили, что прочность монокристаллов каменной соли во много раз возрастает при погружении кристалла в воду. Эти опыты показали, что низкая прочность каменной соли, наблюдаемая при испытании ее в сухом состоянии, объясняется действием поверхностных дефектов, более опасных для прочности, чем внутренние. Если же опыт производить, смачивая поверхность образца водой, то вследствие непрерывного растворения поверхностного слоя трещинки и другие поверхностные изъяны лишаются своего вредного действия и образец удается растянуть до появления пластической деформации. В сухих кристаллах прочность понижена наличием множества мелких, невидимых микротрещин. При выдерживании в воде вследствие процессов растворения и осаждения трещины исчезают и прочность кристалла возрастает до нормальной величины, которая может быть предвычислена из электрической теории строения кристаллов.

Давно уже было замечено, что в том случае, когда на металл действуют повторные нагрузки и разгрузки или знакопеременные усилия, разрушение наступает при напряжении, значительно (в два-три раза) меньшем предела прочности, определенного путем обычного статического испытания. Это явление было названо *усталостью* металлов. С явлением усталости приходится считаться при проектировании деталей, предназначенных нести знакопеременную или периодически изменяющуюся нагрузку: коленчатых валов, шатунов, поршневых штоков и т. п.

Твердость. Понятие твердости не получило еще точного определения. Обычно твердость характеризуют величиной сопротивления, которое тело оказывает проникновению в него какого-либо другого тела, имеющего либо заостренную форму, либо вообще такую форму, что площадь соприкосновения тел незначительна.

В минералогии распространен предложенный Моосом способ определения твердости по методу черты. Составлена «шкала твердости», а именно, избраны 10 минералов, которые расположены в следующий ряд:

1. Тальк
2. Гипс
3. Известковый шпат
4. Плавиковый шпат
5. Апатит
6. Полевой шпат
7. Кварц
8. Топаз
9. Корунд
10. Алмаз

Каждый последующий минерал этой шкалы наносит черту — царапает каждый предыдущий минерал, если острым углом первого провести по поверхности второго. Твердость отмечают порядковыми номерами тех минералов, между которыми располагается испытуемое тело; например, отметка 5—6 (или 5½) означает, что испытуемое тело царапает апатит и само получает царапину, если по поверхности его провести острым углом полевого шпата.

Другое определение твердости — по Бринелю — основано на измерении площади вмятия при вдавливании силой 3000 *кГ* в поверхность исследуемого тела закаленного стального шарика диаметром в 1 *см*.

Нетрудно понять, что при измерении твердости по первому методу приходится иметь дело с сопротивлением отрыву частиц; при измеренных по второму — с сопротивлением скольжению, поэтому оба метода дают, вообще говоря, несравнимые результаты.

Самым твердым веществом (оставляющим царапину на алмазе) является *боразон*. Боразон получают из нитрида бора, подвергнутого давлению в 70 000 *атм*. Боразон выдерживает температуру до 1900° С (алмаз сгорает при 870° С).

Исследования акад. П. А. Ребиндера и его сотрудников показали, что можно подобрать растворы таких веществ, смачивание

которыми понижает «твердость» кристалла. Эти вещества, проникая в микротрещины, по-видимому, несколько расширяют их в тех частях, где, несмотря на наличие трещины, кристаллические поверхности оставались плотно прижатыми друг к другу; работа, потребная для диспергирования (разламывания) кристалла, в результате уменьшается. При шлифовании в воде углеродистой стали добавка к воде натриевого мыла понижает работу диспергирования в 1½ раза.

§ 47. Механические свойства важнейших материалов

Числа, приведенные в таблице на стр. 179, показывают, что наилучшими механическими свойствами, т. е. большой упругостью, прочностью и способностью выдерживать значительные деформации, обладают различные стали — сплавы железа с углеродом, удельный вес которых к тому же очень велик (рис. 83).

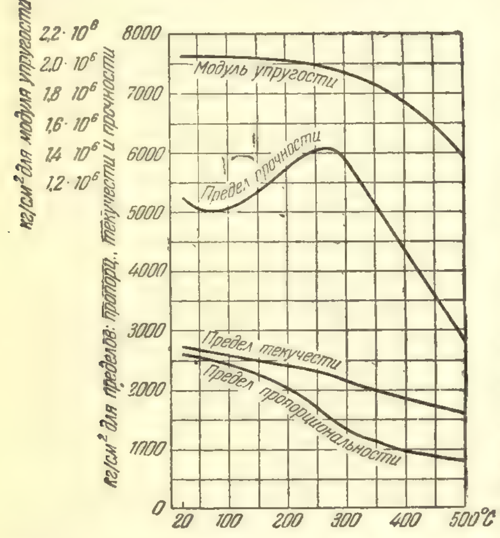


Рис. 83. Диаграмма, изображающая зависимость механических свойств стали от температуры.

Сталь обладает не только значительной прочностью, но и высокой упругостью. Так, например, к моменту разрыва стальной образец может испытать удлинение, доходящее до 34% первоначальной длины. Поэтому стальные детали можно подвергать значительным упругим деформациям, не боясь их излома. Единственными конкурентами сталей при сооружении легких конструкций, подвергающихся значительным упругим деформациям, являются сплавы алюминия, обладающие хорошими механическими свойствами и довольно высокой упругостью при очень низком удельном весе. Многие части самолетов делаются из сплавов алюминия —дуралюмина или кольчугалюмина. Однако высокосортные нержавеющие стали с успехом конкурируют в самолетостроении со сплавами алюминия, так как высокие механические качества этих сталей позволяют придавать деталям столь малые размеры, что вес конструкции из нержавеющей стали оказывается не больше веса конструкции из дуралюмина, а механические свойства стальных конструкций превосходят свойства дуралюминовых.

Одним из очень существенных достоинств сталей является их способность выдерживать любую механическую и термическую обработку: обточку, строжку, прессовку, поковку, сварку, закалку.

Дерево благодаря своему чрезвычайно малому удельному весу и высокой упругости — тоже ценный строительный материал. Недостатком деревянных конструкций являются их недолговечность и громоздкость. Преимуществом дерева в сравнении с другими строительными материалами являются удобства

Механические свойства некоторых материалов

Материал и способ обработки	Модуль		Предел				Удлинение к моменту разрушения в %	Сужение поперечного сечения в момент разрушения в %	Плотность, $г/см^3$
	Юнга, $кГ/мм^2$	сдвига, $кГ/мм^2$	прочности, $кГ/мм^2$	текучести, $кГ/мм^2$	упругости, $кГ/мм^2$	усталости, $кГ/мм^2$			
Сталь никелевая, литая, отожженная	20 000—22 000	8000—8300	65	39		34	12	14	7,84—7,85
Сталь углеродистая, брусок необработанный			53,5	34,6		28	34	58	
То же закаленный			69,2				24	56	
» отпущенный при 700°	20 000—22 000	8000—8300	58,2	40,8			33	68	7,84—7,85
» катаный			48,7	32	25,7		30	59,5	
» тянутый с образован. наклепа			96,6		57	20	3	23	
» кованый			44,6	21,5	18,6		33,5	53	
Сталь хромо-никелевая			147,5	137		80	9,5	30,5	
То же отожженная			67,5	33		34	27	53	
» закаленная	20 000—22 000	8000—8300	177	170		85	11	43	7,84—7,85
Сталь никель-ванадиевая, закаленная в масле			241,3	193,2			6	8	
Сталь отпущенная			97,7	72	58,3		19,5	48,5	
Железо электролитическое			30—44	18—36	4—7	8,8	19—42		
» ковкое, литое	19 000—21 000	7700—8300	28—40	14,3		11	32	48	7,9
То же тянутое			55,4	51	31,6	20	17	54	
Чугун машиностроительный	8000—10 500	3500	12—22			8—15			7,8
Дуралюмин			40	20		14	20		
То же холоднокатаный	6300—7200	2600	62	54		15—16	3		2,7
Кольчугалюмин закаленный			36—42		19—23	12	15—22		
То же холоднокатаный			45—58		35—50		4—3		
Электрон литой (сплав Mg)			20—23	10	≈5	≈10	6—10	10—14	1,8
Медь электролитическая	11 000		16—22			3—4	50—58	65—76	8,9
Свинец	500—700		1,25—1,80		0,25				11,3
Дуб вдоль волокон	1080	800	9—10		2,5				0,7
Сосна » »	920		7—8						0,5

обработки и высокие теплоизоляционные свойства (теплопроводность дерева по направлению, перпендикулярному к слоям, составляет примерно $^1/_6$ теплопроводности кирпичной кладки и $^1/_9$ теплопроводности бетона).

В том случае, когда конструкция работает на сжатие, в качестве строительных материалов с успехом могут быть использованы вещества с малой упругостью, но достаточной способностью сопротивляться раздавливанию, например камень, «электрон» [1]) и чугун.

Остовы машин и станков, подвергающиеся сжимающим нагрузкам, почти всегда отливаются из чугуна, который не только обладает значительным сопротивлением сжатию, но прекрасно поддается обточке, строжке и другим видам механической обработки.

Приводим значения *предела прочности на раздавливание* (в *кГ/мм*²):

Чугун	50—80	Цемент чистый	2,5—2,7
«Электрон»	20—30	Цемент с 3 частями песка	1,6
Гранит	8—20	Сосна вдоль волокон	2,45
Известняк	4—20	Дуб » »	3,55
Кирпич	1,5—3		

Детали, подвергающиеся в процессе работы значительным пластическим деформациям, как, например, электрические провода, водопроводные трубы, краны, мелкие фасонные части различных механизмов и т. п., должны быть сделаны из пластичных материалов. Пластичность характеризуется малым модулем Юнга, низким пределом текучести и большими изменениями линейных размеров образца к моменту разрушения. Такими свойствами, как видно из таблицы на стр. 179, обладают чистое железо, медь и свинец.

Для изготовления режущих инструментов раньше (до 1930 г.) применяли твердые стали с большим содержанием кобальта, хрома, вольфрама. В тридцатых годах резцы стали изготовлять из металлокерамических твердых сплавов, содержащих карбид вольфрама, карбид титана и кобальт. В последние годы для режущего инструмента стали изготовлять металлокерамические пластинки (содержащие мельчайшие кристаллики белого корунда — одной из разновидностей кристаллической окиси алюминия); они выдерживают температуру резания до 1200° и позволяют доводить скорость резания чугуна до 4000—4500 *м/мин.*

За последние десятилетия самые разнообразные применения получили новые искусственные материалы — *пластические массы*. Для изготовления пластмасс чаще всего применяют смолы — некоторые природные и большое число синтетических. Например, небьющееся стекло — *плексиглас* — изготовляется из синтетической смолы, для производства которой используются ацетон, метиловый спирт и синильная кислота. *Бакелит* и пластмассы, изготовляемые из продуктов переработки каменноугольных смол, применяются как материал для облицовочных щитов, плиток, электроарматуры и т. д. Некоторые пластмассы изготовляются из *целлюлозы* — главной составляющей части растительного волокна, которая в наибольшем количестве содержится в хлопке (до 95%). Имеются также пластмассы, которые изготовляются из продуктов переработки обезжиренного молока.

Изготовление изделий из пластмасс производится прессованием на гидравлических прессах под давлением от 100 до 300 *кГ/см*², при температуре около 120—170° С. Часто применяют также литье под давлением.

Пластмассы имеют прочность на разрыв порядка 3—6 *кГ/мм*² и в два-три раза бо́льшую прочность на сжатие.

Некоторые пластмассы ценны своей высокой устойчивостью против химических воздействий. Например, *тефлон* более кислотоупорен, чем золото и платина, и поэтому применяется для изготовления химической аппаратуры.

---

[1]) Легкий сплав, главной составной частью которого является магний.

Весьма ценными для многих отраслей строительной техники оказались материалы, получаемые пропиткой растворами пластмасс тонких листов древесины или бумаги, или ткани, сложенных и спрессованных в пластины «лигнофоля» (из дерева), «текстолита» (из ткани) и «гетинакса» (из бумаги). Указанным способом получают материалы с повышенной прочностью; при изгибе эти материалы способны выдерживать нагрузку в 2000—3000 *кГ/см²*. Некоторые из таких комбинированных материалов оказались пригодными для изготовления сильно нагруженных деталей машин: шестерен, подшипников и др.

Группой инженеров под руководством проф. И. И. Китайгородского был создан новый высококачественный материал — *пеностекло*. Пеностекло изготовляют из обыкновенного стекла, которое дробят в мелкий порошок и смешивают с порошком мрамора, каменного угля или другого вещества, способного при нагревании выделять газ. Пеностекло в четыре раза легче воды. Пеностекло обладает большой механической прочностью, легко пилится, строгается, сверлится. В то же время оно является хорошим теплоизоляционным материалом.

Замечательным достижением науки и техники является производство различных искусственных *волокнистых материалов*, в частности искусственного шелка и искусственной шерсти.

Наибольшее распространение в последние годы получил вискозный шелк, изготовляемый из целлюлозы древесины. В молекуле целлюлозы тысячи атомов углерода, связанные с атомами водорода и кислорода, вытянуты в молекулярную нить. Целлюлоза нерастворима. Чтобы получить из нее вещество, растворимое в разбавленной щелочи,— *вискозу*, подвергают целлюлозу такой химической обработке, что к каждой молекулярной нити целлюлозы присоединяются молекулы сероуглерода и едкого натра. Для изготовления искусственного шелка вискозу продавливают через тончайшие отверстия в особых колпачках в раствор серной кислоты, где из струек вискозы образуются нити, состоящие из еле видимых глазом волоконцев чистой целлюлозы (ранее присоединенные молекулы отщепляются серной кислотой). Эти нити наматываются на бобины прядильных машин[1]). Благодаря дешевизне исходного сырья мировое производство вискозного шелка уже в 1948 г. достигло ½ миллиона тонн.

Прядение вискозных нитей в более утолщенные жгутики, которые потом режут на волокна длиной в несколько сантиметров, дает материал, получивший название «штапельного волокна». Из такого волокна, обработанного особым образом для придания ему мягкости и извитости, изготовляют вискозную шерсть.

Обрабатывая хлопковую целлюлозу уксусной кислотой и уксусным ангидридом, получают так называемую *ацетилцеллюлозу*, имеющую способность растворяться в спирте и ацетоне. Тончайшие струйки ацетилцеллюлозы выдавливаются в короб, где они обдуваются горячим воздухом; спирт и ацетон улетучиваются и образующиеся нити наматываются на бобины. Прочность на разрыв нитей ацетонового шелка превосходит прочность стальной проволоки того же сечения.

Особо тонкие нити получают при производстве так называемого медноаммиачного шелка. Струйки медноаммиачного раствора целлюлозы выдавливают в воду. Вода отнимает от молекул целлюлозы ранее присоединенные к ним атомы меди и молекулы аммиака. Так получают нити толщиной около 2 микронов, тогда как толщина паутины 3—5 микронов.

Еще более тонкие нити получают при производстве *стеклянного волокна*. Через отверстия в особой печи вытекают струйки стекла; образующаяся стеклянная нить наматывается на быстро вращающийся барабан, вследствие чего нить растягивается и утоньшается. При скорости вытягивания 2 *км* в минуту получают нити толщиной около микрона — в 50 раз тоньше человеческого волоса. Канаты,

---

[1]) Заменяя круглые отверстия, через которые выдавливается вискоза, длинной щелью, получают *целлофан*, достаточно прочный упаковочный материал, непроницаемый для микроорганизмов.

сплетенные из стеклянных волокон, крепче стальных тросов такого же сечения. Из нарезанных стеклянных волокон прядут нити для изготовления технических и декоративных тканей, несгораемых, легко моющихся и стойких при действии химических веществ.

Высококачественные волокнистые ткани изготовляют из смолистых веществ, синтезируемых для производства пластических масс. Из феноловых смол изготовляют капроновый шелк. Из виниловых смол получают виниловые пленки и виниловое волокно, применяемое для производства химически стойких тканей. Прочные и легко окрашивающиеся виниловые пленки можно кроить, сшивать, склеивать; это — новый нетканный материал, конкурирующий с волокнистыми материалами.

Сочетание средств химии и технологических приемов, основанных на изучении молекулярной структуры, позволило неузнаваемо преобразовать свойства даже такого, казалось бы, совсем не прочного материала, как бумага. В настоящее время изготовляются такие сорта бумаги, что бумага эта не рвется, если даже по ней пройдет танк, хотя бы она и была предварительно намочена. Разработаны также сорта кислотоупорной и в то же время огнеупорной бумаги (без повреждения выдерживающей нагревание до 1100°).

ГЛАВА IX

ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ И АЭРОДИНАМИКИ

§ 48. Основные понятия и направления гидродинамики

Гидродинамика занимается изучением, во-первых, законов движения жидкости, во-вторых, тех сил, с которыми движущаяся жидкость действует на помещенные в нее тела.

Для выяснения действительной картины движения жидкостей, применяя законы механики, нужно учитывать, кроме проявления инерции частиц жидкости, еще наличие сил внутреннего трения (а для газов при весьма больших скоростях движения, кроме того,— проявление сжимаемости).

Чтобы разобраться в довольно сложной картине движения жидкостей и газов, полезно вначале отвлечься от усложнений, вносимых в эту картину вязкостью и сжимаемостью. Воображаемую жидкость, совершенно несжимаемую и невязкую, называют *идеальной жидкостью*. Поскольку у разных веществ свойства вязкости и сжимаемости выражены не одинаково сильно, то очевидно, что в одних случаях проявления этих свойств могут оказаться существенными, в других случаях — маловажными. Мы увидим, что даже легко сжимаемые газы при не слишком больших скоростях движения ведут себя по отношению к твердому телу, движущемуся в газе, подобно несжимаемой жидкости.

Причиной возникновения сил, действующих на тела, помещенные в движущуюся жидкость, при малых скоростях движения является главным образом трение (вязкость), тогда как при больших скоростях преимущественно сказывается инерция тех частиц жидкости, которые бывают вынуждены изменить свое движение, огибая тело, помещенное на их пути. Величина и направление этих сил (сил вязкости и сил инерции) зависят только от *относительного* перемещения жидкости и находящегося в ней тела.

Чтобы определить силы, вызываемые инерцией жидких масс, необходимо знать траектории и скорости отдельных частиц жидкости до и после того, как тело было внесено в поток. Скорость частиц жидкости в различных участках потока имеет различную величину. Чтобы иметь полное представление о направлении скорости в каждой точке потока, на чертеже, изображающем этот поток, проводят

линии, направление которых в каждой точке совпадает с направлением скорости. Эти линии называют *линиями тока*. Принято проводить линии тока так, чтобы густота их изображала в определенном масштабе величину скорости в том или ином участке потока [1]).

В случае установившегося течения скорости жидкости в различных точках потока остаются неизменными во времени. В этом случае линии тока совпадают с траекториями отдельных частиц жидкости. Часть потока, ограниченную со всех сторон линиями тока, называют *трубкой тока*.

Линии тока можно сделать видимыми, подмешав к жидкости порошок алюминиевой бронзы или пустив в нее струю краски.

Наблюдая линии тока, можно заметить, что характер течения жидкости в сильной степени зависит от близости стенок сосуда. На распределение скоростей вблизи стенок влияют силы трения и форма

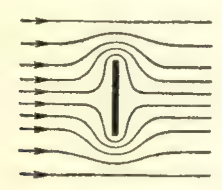


Рис. 84. Течение жидкости, огибающей помещенную в нее пластинку. Картина, которую видит неподвижный относительно пластинки наблюдатель.

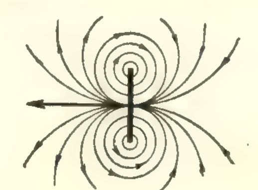


Рис. 85. То же течение, что на рис. 84. Картина, которую видит наблюдатель, неподвижный относительно жидкости.

потока. Вдали от стенок распределение скоростей обусловливается только формой потока. Первый, более сложный случай, называют *течением при трении*, второй — *свободным течением*.

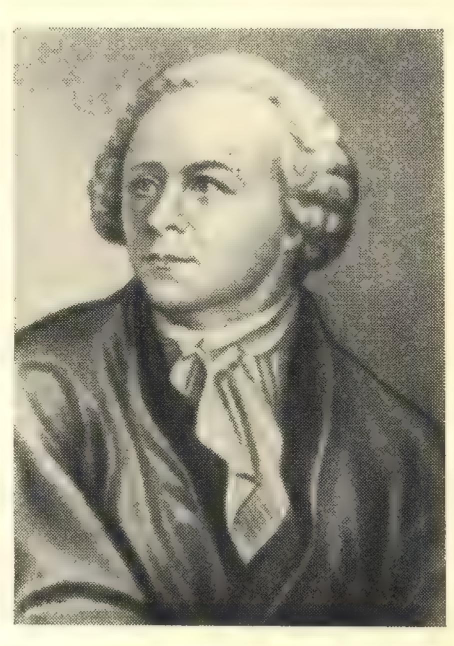
На рис. 84 и 85 изображены линии тока свободного установившегося потока, обтекающего тонкую пластинку, поставленную перпендикулярно к потоку. На рис. 84 изображена картина, которую видит наблюдатель, неподвижный относительно пластинки: частицы жидкости, встретив пластинку, отклоняются от первоначального пути; струи жидкости, охватив пластинку с обеих сторон, замыкаются позади нее. На рис. 85 изображена картина, которую видит неподвижный относительно жидкости наблюдатель, мимо которого проходит пластинка: частицы жидкости, отброшенные вперед и в стороны движущейся пластинкой, огибают ее края и устремляются в пространство, освободившееся позади пластинки. В этом случае линии

[1]) Аналогично с помощью *силовых линий* изображают направление и величину вектора напряженности в любой точке электрического, магнитного или гравитационного полей.

тока очень похожи на силовые линии плоского проводника, заряженного с одной стороны положительным, с другой — отрицательным электричеством. Вследствие этой аналогии, которая легко может быть развита и углублена математически, *свободное течение без вращения макрочастиц* (*т. е. элементарных объемов жидкости*) *называют потенциальным течением*.

Если же течение сопровождается вращением макрочастиц жидкости, оно называется *вихревым*.

Учет трения приводит к значительному усложнению уравнений движения жидкости. Кроме того, как будет пояснено ниже, вязкость при определенных скоростях движения порождает своеобразное нарушение устойчивости движения (так называемую турбулизацию всего потока), что делает математический анализ такого рода течения жидкости особенно сложным. Поэтому в первый период своего развития теоретическая гидродинамика ограничивалась исследованием движений идеальной жидкости.



Леонард Эйлер (1707—1783)

Всемирно признано, что создателем теоретической гидродинамики был петербургский академик Леонард Эйлер [1]). Отдел теоретической гидродинамики, посвященный вихревому движению в

[1]) Эйлер обладал необычайной творческой активностью и исключительной работоспособностью. Эти качества сочетались в нем с гениальной математической одаренностью. Научные трактаты Эйлера (объем их огромен — 43 тома, сжатость изложения и разносторонность изумительны) являются величайшим вкладом в науку. В отличие от Ньютона, который хотя и явился вместе с Лейбницем основателем дифференциального и интегрального исчислений, но в механике пользовался геометрическим методом, Эйлер уже в первых своих сочинениях по механике применил аналитический метод и позже постоянно его совершенствовал. Эйлер создал вариационное исчисление, которое явилось основой для разработки обобщенных принципов механики. Классическими являются исследования Эйлера по небесной механике, по определению напряжений и колебаний в упругих стержнях и балках, по теории движения твердых тел, по баллистике и др. Течение идеальной жидкости было математически проанализировано Эйлером в монографии «Общие принципы движения жидкостей», изданной в 1755 г.

идеальных жидкостях, был разработан Гельмгольцем и В. Томсоном (Кельвином).

Гельмгольц, руководствуясь уравнениями Эйлера, доказал (1858 г.), что в идеальной жидкости раз возникшее *вихревое движение* не могло бы исчезнуть. Возникновение и исчезновение вихрей в реальных жидкостях обусловлено силами вязкости. В идеальной жидкости, где нет трения, все частицы жидкости, вовлеченные в вихревое движение, перемещаются вместе с вихрем, причем произведение поперечного сечения вихря на скорость вращения остается постоянным вдоль оси вихря и не изменяется при перемещении вихря в жидкости. В этих замечательных теоремах Гельмгольца отображен закон сохранения момента количества движения в применении к жидкостям. Следует отметить, что вне вихря движение жидкости, возмущаемое вихрем, тем не менее сохраняет потенциальный характер, т. е. макрочастицы жидкости, расположенные вне вихря, не испытывают вращений.

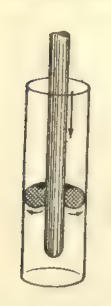


Рис. 86. Модель, поясняющая движение жидкости в кольцевом вихре.

В идеальной жидкости вихри могут оканчиваться только: или на поверхностях, ограничивающих жидкость (на стенках сосуда и на свободной поверхности), или замыкаться в кольцо. Примером вихрей первого рода может служить смерч. Кольцевые вихри можно демонстрировать, наполнив дымом ящик с круглым отверстием и ударяя по задней упругой стенке ящика молотком. Когда воздух выталкивается из отверстия, внешняя часть выбрасываемой массы воздуха вследствие трения о края отверстия увлекается назад, тогда как внутренняя часть движется вперед, что и приводит к образованию вихря.

Представление о движении жидкости в кольцевом вихре можно получить следующим образом. Представим себе, что внутрь трубки плотно вставлено круглое резиновое кольцо, сквозь которое продет стержень (рис. 86). Если вдвигать стержень внутрь трубки, то кольцо будет катиться без скольжения, передвигаясь вперед со скоростью, равной половине скорости стержня.

Казалось бы, что с количественной точки зрения проявлением вязкости во многих случаях можно пренебречь (поскольку вязкость таких жидкостей, как вода, а тем более газов, мала). Однако развитие гидродинамики показало, что картина движения реальных жидкостей обычно в корне отличается от картины движения идеальной жидкости.

Вязкость служит причиной вихреобразований (в особенности при наличии вызванных в потоке жидкости «поверхностей раздела», где скорость изменяется скачком), и поэтому даже малая вязкость может качественно изменить всю картину движения жидкости.

Например, на рис. 84 показано, как происходило бы в потоке жидкости обтекание пластины, если бы жидкость была идеальной и

не существовало бы разрывов непрерывности в изменении скорости. Как было доказано Эйлером, в этом случае пластина, помещенная в поток, не испытывала бы со стороны жидкости суммарно никакой силы, так как давление на ее переднюю поверхность уравновешивалось бы давлением на заднюю поверхность (об этом подробнее сказано ниже, в § 53).

Если предположить, что у краев пластины возможно расслоение жидкости с резким скачком скорости движения смежных слоев, но с сохранением потенциального характера течения, то картина об-

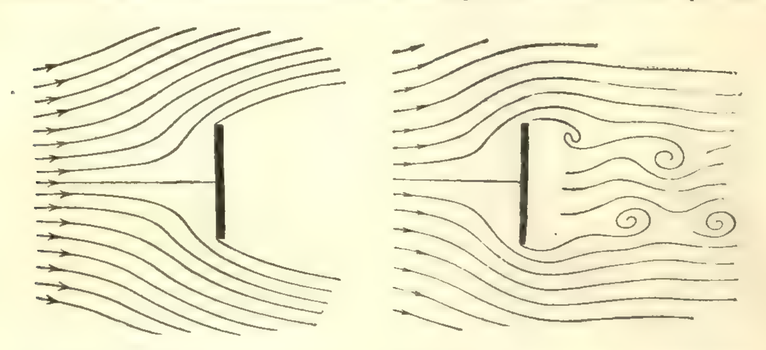


Рис. 87. Разрывное потенциальное течение около пластинки.

Рис. 88. Истинная картина обтекания пластинки.

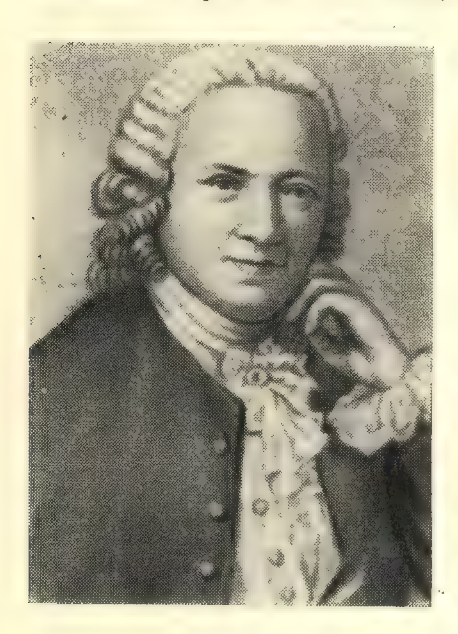
текания будет иметь вид, показанный на рис. 87. В этом случае пластина оказывала бы сопротивление движению, но меньше, чем она оказывает в действительности, в 2,27 раза. Истинная картина обтекания имеет вид, показанный на рис. 88; здесь вследствие скачка в скорости движения у кромки пластины на поверхностях расслоения жидкости интенсивно сказывается вязкость жидкости, что в итоге приводит к образованию вихрей, снижающих давление на заднюю поверхность пластины.

Глубокое качественное влияние даже незначительной вязкости на истинную картину движения жидкостей сделало выводы эйлеровой гидродинамики идеальных жидкостей мало применимыми к решению практически важных вопросов. Это стало обнаруживаться уже в первые годы развития теоретической гидродинамики. Поэтому попутно с прогрессом строгих, но в некоторой мере оторванных от действительности математических методов развилось другое, в математическом отношении менее стройное прикладное направление в гидродинамике («гидравлика»), основы которого также были созданы в России Даниилом Бернулли, автором классического трактата «Гидродинамика», изданного в 1738 г.

В последующие годы прикладное направление в гидромеханике поставило своей целью возможно более полный охват фактов в соот-

ношениях, которые по своей простоте были бы пригодны для инженерных расчетов. В прикладной гидромеханике стал господствовать эмпирический метод.

«В классической гидродинамике единственным правилом было логическое построение, и поэтому от нее ускользало все, что не могло быть выведено из исходных уравнений путем математического анализа. Напротив, задачей и целью гидравлики было дать ответ по возможности для каждого отдельного случая практики, не останавливаясь при этом на внутренней связи между отдельными проблемами. Теоретическая гидродинамика стала терять свое значение, так как результаты ее расчетов во многих случаях были прямо противоположны действительности; для возможности математического исследования проблем вводились упрощения (особенно в отношении отсутствия трения), которые в качестве приближений часто были непозволительны. С другой стороны, гидравлика распалась на ряд отдельных проблем. Каждый из все чаще возникающих вопросов решался при помощи специальных экспериментов и путем введения коэффициентов, найденных на основании этих экспериментов. Гидравлика становилась все более и более наукой о коэффициентах. В конце XIX и в начале XX в. с обеих сторон возникло к этому критическое отношение и зародилось стремление сблизить и соединить оба разошедшихся в разные стороны научных направления» [1]).



Даниил Бернулли (1700—1782)

Необходимость такого синтеза была продиктована возникновением новых областей промышленности — турбостроения и самолетостроения.

Начало новому синтезирующему направлению в гидродинамике было положено трудами Н. Е. Жуковского (с 1896 г.) и Прандтля (с 1904 г.).

---

[1]) Цитата из книги О. Титьенса «Гидро- и аэродинамика, по лекциям проф. Л. Прандтля», М.— Л., ГТТИ, 1933, стр. 11—12.

§ 49. Уравнение Бернулли

Проследим течение жидкости в трубке тока. Поперечное сечение трубки тока в различных местах может быть неодинаковым, и в соответствии с этим меняется скорость течения. Струя жидкости нигде не претерпевает разрыва. Из этого условия неразрывности струи следует, что *произведение скорости несжимаемой и невязкой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная.*

Действительно, объем жидкости, втекающей за 1 сек. в один конец трубки тока, должен быть равен объему жидкости, вытекающей из противоположного конца (рис. 89): $v_1S_1=v_2S_2$.

Это уравнение справедливо для любых двух сечений трубки тока; следовательно,

$$vS=\text{const}. \qquad (1)$$

Пусть за время Δt масса жидкости m втекает в один конец выделенной части трубки через сечение S_1, где скорость v_1 и давление p_1. За то же время Δt через другое сечение трубки тока S_2, где скорость жидкости кавна v_2 и давление p_2, вытерает такая же масса жидкости m. При установившемся (стационарном) течении в выделенной части трубки не происходит ни накапливания, ни расходования энергии. Следовательно, энергия, передаваемая за время Δt через сечение S_1, должна быть равна энергии, передаваемой за то же время через сечение S_2. За время Δt через сечение S_1 проходит масса жидкости m. Ее кинетическая энергия равна $\frac{mv_1^2}{2}$ и потенциальная энергия тяжести равна mgh_1 (где g — ускорение силы тяжести и h_1 — высота центра тяжести сечения S_1 над некоторым уровнем, например уровнем моря). Стало быть, за время Δt через сечение S_1 конвекционно передается энергия



Рис. 89. К выводу уравнения Бернулли.

$$\frac{mv_1^2}{2}+mgh_1.$$

Однако, кроме конвекционной передачи энергии, в данном случае еще имеет место передача энергии тягой, а именно, жидкость, находящаяся позади, производит работу, направленную на продвижение жидкости, находящейся впереди. Энергия, передаваемая тягой за время Δt через сечение S_1, равна, очевидно, работе, которую жидкость, находящаяся позади сечения S_1, производит за время Δt,

т. е. равна произведению силы p_1S_1 на путь $v_1\Delta t$. Таким образом, энергия, передаваемая за время Δt через сечение S_1, состоит из трех слагаемых:

$$\frac{mv_1^2}{2}+mgh_1+p_1S_1v_1\Delta t.$$

Из таких же слагаемых состоит энергия, передаваемая за время Δt через сечение S_2. Поскольку в выделенной части трубки не происходит ни накапливания, ни расходования энергии, то, очевидно, должно существовать равенство

$$\frac{mv_1^2}{2}+mgh_1+p_1S_1v_1\Delta t=\frac{mv_2^2}{2}+mgh_2+p_2S_2v_2\Delta t.$$

Согласно условию неразрывности струи объем жидкости, втекающей в трубку за время Δt, т. е. $S_1v_1\Delta t$, равен объему жидкости, вытекающей за тот же промежуток времени из трубки тока: $S_1v_1\Delta t=$ $=S_2v_2\Delta t$. Разделим обе части предыдущего уравнения на эти равные друг другу объемы, учтя, что масса жидкости, деленная на ее объем, $\frac{m}{Sv\Delta t}$, представляет собой плотность жидкости ρ. Получаем уравнение, или теорему, Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1+\rho gh_1=\frac{\rho v_2^2}{2}+p_2+\rho gh_2. \quad (2)$$

В этом уравнении давление p выражают в *дин/см²*, высоту h — в сантиметрах, плотность ρ — в *г/см³* и скорость v — в *см/сек*; $g=981$ *см/сек²*.

В технической системе единиц давление p выражают в *кГ/м²* или в миллиметрах водяного столба, высоту h — в метрах, плотность ρ — в технических единицах массы на куб. метр (для этого ρ, выраженное в *кг/м³*, делят на 9,81), скорость v выражают в *м/сек*; $g=$ $=9{,}81$ *м/сек²*.

В суженной части трубки тока скорость жидкости больше, чем в остальном потоке. Поступая в узкую часть трубки тока, жидкость двигается у с к о р е н н о; следовательно, на жидкость, втекающую в узкую часть трубки тока, действует со стороны жидкости, еще находящейся в широкой части трубки, некоторая сила.

Очевидно, что эта сила возникает вследствие разности *статических давлений* p_1-p_2 в широком и узком местах трубки. Сила направлена в сторону узкой части трубки; значит, в широких местах трубки давление больше, чем в узких. Иными словами, *в местах сужения трубки тока давление понижено* (рис. 90).

Величину $\frac{\rho v^2}{2}$, тоже имеющую, как нетрудно убедиться, размерность давления, называют *динамическим* давлением. Мы видим,

что *при горизонтальном течении жидкости сумма статического и динамического давлений остается величиной постоянной*. Эту сумму называют *полным давлением*.

Принципиально *статическое давление надо измерять с помощью манометра, неподвижного относительно текущей жидкости*. Практически бывает достаточно взять манометр, плоскость отверстия которого расположена параллельно линиям тока (трубка *А* на рис. 91). Полное давление измеряют манометром, отверстие которого расположено перпендикулярно к линиям тока (трубка *В* на рис. 91); попав в отверстие, жидкость «теряет» свою скорость; динамическое давление в этой трубке будет равно нулю, оставшееся статическое давление будет равно сумме статического и динамического давлений текущей жидкости, следовательно, манометр покажет полное давление. Изображенная на рис. 91 трубка *В* носит название *трубки Пито*. Понятно, что изображенные на рис. 91 манометрические трубки *А* и *В* могут быть заменены трубками, отведенными от текущей жидкости к металлическому манометру.

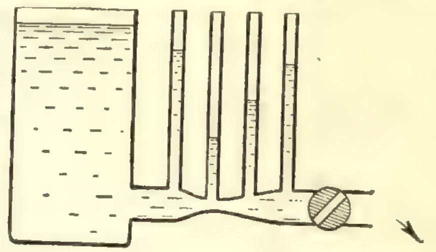


Рис. 90. В сужении статическое давление по уравнению Бернулли меньше, чем в расширенной части трубки.

Уравнение Бернулли было нами выведено в предположении, что сумма кинетической энергии и потенциальной энергии тяжести текущей жидкости остается неизменной. В действительности же некоторая часть указанной энергии расходуется на работу, направленную против сил трения. В связи с этим жидкость нагревается, и энергия молекулярно-теплового движения жидкости, которую мы считали постоянной и поэтому не учитывали, возрастает. Мы предполагали также, что частицы жидкости не проходят сквозь боковую поверхность трубки тока. В действительности же тепловое движение нарушает течение жидкости по определенным линиям тока.

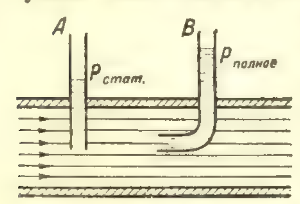


Рис. 91. Расположение манометрических трубок для измерения статического (*А*) и полного (*В*) давлений.

Поэтому к весьма вязким жидкостям уравнение Бернулли неприменимо. Но для таких жидкостей, как вода, а также и для воздуха уравнение Бернулли практически является достаточно точным.

При горизонтальном течении сумма статического и динамического давлений остается постоянной величиной, поэтому в струе статическое давление всегда бывает меньше, чем в неподвижной жидкости,

и при больших скоростях может стать даже отрицательным. В этом случае жидкость, протекающая по узкой части трубы, будет находиться в состоянии всестороннего растяжения, а так как прочность жидкости на разрыв велика (§ 113), то отрицательное давление может достигнуть значительной величины. Обычно, однако, когда давление падает до нуля, происходит разрыв жидкости — это так называемое явление *кавитации*. Кавитация ограничивает скорости, которые могут быть приданы жидкости сужением струи.

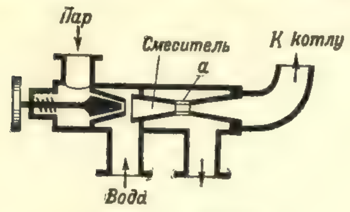


Рис. 92. Инжектор.

Если давление в широкой части трубы равно атмосферному, то давление в узкой части будет меньше атмосферного. На этом явлении основано действие ряда приборов, например инжектора, водоструйных насосов, карбюратора.

Инжектором называют пароструйный насос, служащий для питания водой паровых котлов паровозов, пароходов, локомобилей и т. д. На рис. 92 изображен простейший инжектор. К инжектору подводится из котла пар, который, пройдя через сопло, поступает с большой скоростью в смеситель. Благодаря засасывающему действию струи, а также конденсации пара давление в смесителе понижается; в него устремляется вода из коробки инжектора. Из смесителя струя воды с большой скоростью входит в расширяющийся диффузор, теряет свою скорость, давление в диффузоре резко повышается, становится выше, чем в котле, вследствие чего приподнимается обратный клапан и вода поступает в котел. Между смесителем и диффузором оставляют щель *a*, через которую при пуске инжектора выходят избыточные вода и пар. При пуске инжектора требуется меньше пара, чем при работе полным ходом, поэтому сопло снабжено регулирующей иглой.

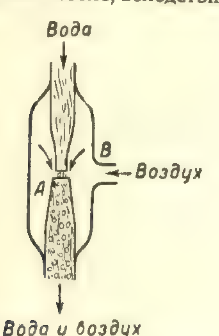


Рис. 93. Водоструйный насос.

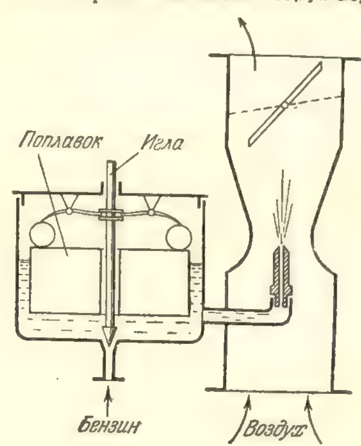


Рис. 94. Карбюратор.

По этому же принципу работает паровозный конус, создающий сильную тягу в дымовой трубе.

Водоструйные насосы служат для получения небольшого разрежения (рис. 93). Давление в струе на выходе из насоса равно атмосферному; поэтому в суженной части струи и в резервуаре A создается разрежение. Труба B присоединяется к резервуару, из которого следует выкачать воздух.

Водоструйные насосы применяются в качестве воздушных насосов в конденсаторных установках при паровых турбинах, в лабораториях и т. д. И водо- и пароструйные насосы очень надежны в работе, но коэффициент полезного действия их чрезвычайно мал, поэтому применяются они в тех случаях, когда есть большое количество пара (отработанный пар) или воды, которое почему-либо нельзя использовать более экономично.

Карбюратором называется прибор, питающий бензиновый двигатель внутреннего сгорания рабочей смесью — смесью горючего с воздухом. Устройство карбюратора изображено на рис. 94. По трубе наружный воздух всасывается в цилиндр мотора. В суженной части трубы — в начале диффузора — создается пониженное давление, и бензин из поплавковой камеры, где давление равно атмосферному, через калиброванную трубочку (жиклер) вытекает в диффузор и испаряется в проходящем воздухе. Для того чтобы бензин не выливался через жиклер самотеком, в поплавковой камере имеется поплавок, с которым соединена игла, закрывающая доступ бензину из бака, как только уровень его поднимется выше отверстия жиклера. Дроссельная заслонка регулирует скорость воздуха, а вместе с тем и количество поступающего в мотор бензина.

§ 50. Гидравлическая энергия

Энергия движущейся жидкости называется гидравлической энергией. Гидравлическую энергию можно использовать, поставив на пути текущей жидкости водяное колесо или турбину с изогнутыми рабочими лопатками (лопастями).

Вытекающая из сопла струя, попадая на лопатку со скоростью v_0, отклоняется от первоначального направления и стекает с лопатки со скоростью v_0'. Если в секунду по лопатке сбегает масса жидкости m, то энергия E, отдаваемая ежесекундно, будет равна кинетической энергии, потерянной жидкостью за это время:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0'^2}{2}.$$

Наибольшей эта отдача будет в том случае, когда лопатка движется со скоростью, равной половине скорости жидкости. Действительно, если лопатка неподвижна, давление на нее будет наибольшим, но лопатка не перемещается, и поэтому никакой работы она не совершит. Если же лопатка движется со скоростью жидкости, то гидродинамическое давление на нее равно нулю: работа опять равна нулю. Работа измеряется произведением силы на перемещение; поэтому:

Работа, производимая лопаткой, будет наибольшей тогда, когда лопатка движется с промежуточной скоростью, равной половине скорости потока.

Описанным выше способом можно использовать энергию естественных водных потоков: водопадов, рек и пр. Если в 1 сек. падает

Q $м^3$ воды с высоты H *м*, то от данного потока в 1 сек. можно теоретически получить работу $1000QH$ *кГм*, или мощность

$$P_{\text{макс}} = \eta \frac{1000\,HQ}{75} \text{ л.с.},$$

где η — коэффициент полезного действия установки (0,8—0,95).

В гидроэлектростанциях надлежащий напор (высота падения) воды создается при помощи плотины. По величине создаваемого напора гидростанции подразделяются на низконапорные (до 20 *м*), средненапорные (до 50 *м*) и высоконапорные (выше 50 *м*).

Основной частью всякого водяного двигателя является рабочее колесо, снабженное лопатками, действуя на которые вода приводит колесо в движение.

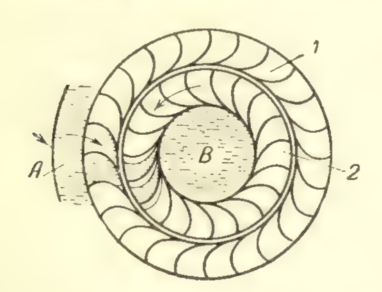


Рис. 95. *1* — направляющее колесо напорной турбины, *2* — рабочее колесо.

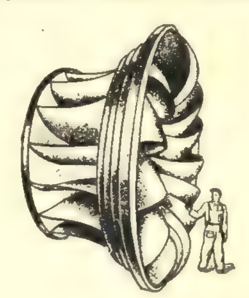


Рис. 96. Рабочее колесо напорной турбины.

В *напорных турбинах* (рис. 95 и 96) вода попадает в подводящую камеру *A* под большим давлением, но с малой скоростью. Пройдя через узкую часть подводящей камеры и направляющее колесо *1*, вода приобретает большую скорость; ее потенциальная энергия переходит в кинетическую, которая передается рабочему колесу *2*. Лопасти рабочего колеса должны быть выполнены так, чтобы, проходя по ним, вода потеряла возможно бо́льшую часть своей скорости. Рабочее колесо напорной турбины помещено внутри направляющего колеса с подвижными лопастями, которые направляют воду перпендикулярно к оси рабочего колеса по касательным к его лопастям. Пройдя по лопастям рабочего колеса, вода со значительно уменьшившейся скоростью вытекает в направлении оси колеса и попадает в отсасывающую трубу *3*.

Напорные турбины имеют чрезвычайно широкое распространение. Они применяются при самых разнообразных напорах (от 0,5 до 250 *м*). Их к. п. д. доходит до 94,5%, а мощность превосходит 100 000 *л. с.*

Для использования *больших расходов воды с малым напором* применяются *пропеллерные турбины*, рабочие колеса которых напоминают по внешнему виду корабельный винт. Пропеллерные турбины делаются с подвижными лопастями, что позволяет при всяком расходе воды ставить лопасти в наивыгоднейшее положение и тем увеличивать к. п. д. турбины.

Обычно турбины непосредственно соединяются с генераторами переменного тока, и поэтому бывает необходимо поддерживать постоянным число оборотов турбины при разных нагрузках генератора и различных напорах воды. Достигается это регулированием поступления воды в турбину, для чего направляющие лопасти делают подвижными. Это позволяет изменять количество воды, попадающей в турбину. Угол поворота лопастей регулируется при помощи автоматов.

При малых расходах воды и больших напорах применяют свободноструйные турбины (рис. 97). Вода из насадки *H* (сопла), внутри которой движется игла, регулирующая поступление воды, попадает на рабочее колесо (рис. 98), снабженное лопатками, имеющими внутри так называемый нож. Попав на лопатку в направлении, почти касательном к ободу колеса, струя воды разрезается ножом и отклоняется в обе стороны, теряет скорость и отдает колесу свою кинетическую энергию; за счет этого и происходит работа турбины.

Свободноструйные турбины применяются при напорах от 100 *м* и выше. Их мощность доходит до 20 000 *л. с.* и число оборотов до 200 в 1 мин. Эти турбины используют только часть напора, от верхнего уровня воды и до входа в рабочее колесо, но при больших напорах такая потеря значения не имеет.

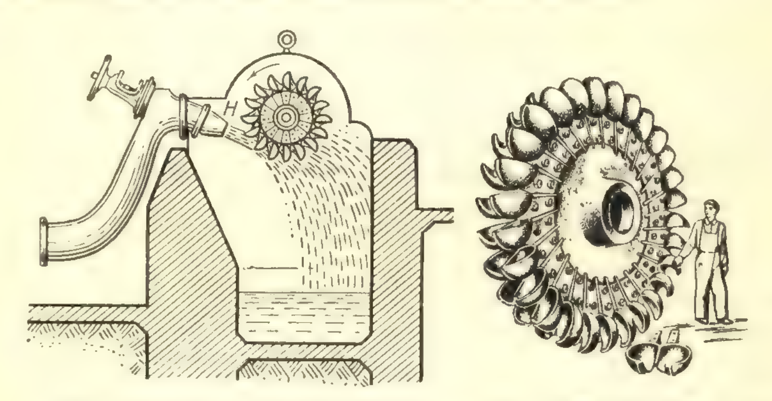


Рис. 97. Схема свободноструйной турбины.

Рис. 98. Рабочее колесо свободноструйной турбины.

Мощность гидравлической энергии рек во всем мире, пригодная для промышленного использования, исчисляется сотнями миллионов киловатт и, по-видимому, близка к миллиарду киловатт. Количество воды, участвующей ежегодно в круговороте, т. е. ежегодно испаряющейся, а затем выпадающей в виде дождя и снега, составляет приблизительно 520 000 *км*^{3}. Если бы это количество воды было равномерно распределено по поверхности земного шара, то получился бы слой воды толщиной около 1 *м*. Однако только $^1/_5$ этого количества воды выпадает на сушу. Испаряется с суши воды меньше, чем на нее выпадает: 36 000 *км*^{3} воды ежегодно выносится всеми реками в моря и океаны. Это соответствует суммарному «расходу» всех рек в среднем по времени около 1 млн. тонн воды в секунду.

По запасам водяной энергии Советский Союз занимает первое место в мире. Однако к широкому использованию этих грандиозных ресурсов энергии наша страна приступила только после Великой Октябрьской социалистической революции, в связи с ленинским планом электрификации.

В дореволюционной России ежегодная выработка электроэнергии всеми электростанциями не превышала 2 млрд. киловатт-часов. Перед последней мировой войной производство электроэнергии

в СССР привысило 48 млрд. киловатт-часов, а в 1957 г. достигло 212 млрд. киловатт-часов.

В первые послевоенные годы усилия нашего народа были направлены на устранение разрушений, причиненных войной. Днепровскую гидроэлектростанцию, которая по своей мощности (около полумиллиона киловатт) занимала третье место в мире, пришлось отстраивать заново.

Наша страна осуществила строительство мощных гидроэлектростанций: Куйбышевской на Волге мощностью около 2,3 млн. киловатт, Волгоградской мощностью около 2,5 млн. киловатт, Каховской на Днепре, Цимлянского гидроузла. Вслед за этим было начато строительство еще ряда крупнейших в мире ГЭС на Ангаре и Енисее: Братской 4,5 и Красноярской около 5 млн. *квт*. Одна Куйбышевская ГЭС вырабатывает в шесть раз больше электроэнергии, чем все электростанции дореволюционной России.

§ 51. Вязкость и течение жидкости при трении

Чтобы установить меру вязкости, представим себе следующий опыт: возьмем две пластинки, смоченные какой-либо жидкостью (рис. 99), и станем перемещать верхнюю пластинку относительно нижней в направлении, указанном стрелкой. Слои жидкости, непосредственно соприкасающиеся с этими пластинками, прилипают к ним, все же остальные слои перемещаются, скользят друг по другу со скоростью тем большей, чем больше их расстояние от пластинок. Вязкость жидкости сказывается в том, что возникает сила, препятствующая перемещению слоев жидкости, а значит, и пластинок.

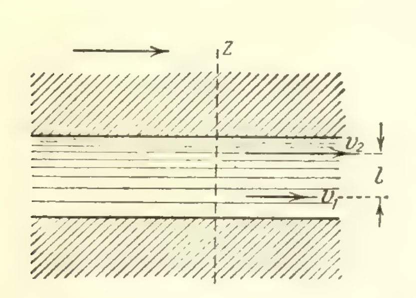


Рис. 99. К рассмотрению внутреннего трения жидкостей.

Проведем ось z перпендикулярно к слоям (а значит, и к скоростям движения слоев). Производная $\frac{dv}{dz}$ от скорости слоев называется *градиентом*[1]) *скорости*. Если скорость слоев равномерно возрастает с увеличением координаты z, то градиент скорости является постоянным для всей массы жидкости или газа и может быть выражен также через $\frac{v_2 - v_1}{l}$, где v_1 и v_2 — скорости перемещения каких-нибудь двух тонких слоев, l — их расстояние друг от друга (рис. 99).

[1]) Понятие градиента было пояснено на стр. 139.

Ньютон установил для силы вязкости F следующий закон:

$$F = \eta S \frac{dv}{dz}, \qquad (3)$$

где η называется *коэффициентом вязкости*, или *коэффициентом внутреннего трения* (обратная величина $\frac{1}{\eta}$ носит название *коэффициента текучести*), S — площадь соприкасающихся слоев.

Сила вязкости стремится остановить тот из двух смежных слоев, который движется быстрее, и ускорить тот, который движется медленнее (аналогично тому, что бывает при скользящем трении твердых тел).

Коэффициент вязкости[1]) показывает, скольким динам должна быть равна сила, чтобы в слое жидкости, имеющем толщину 1 *см* и площадь 1 *см*^{2}, эта сила двигала верхнюю поверхность слоя относительно нижней со скоростью 1 *см/сек*. Единицу вязкости 1 *дин·сек/см*^{2}, или, что то же, 1 *г/см·сек*, называют *пуазом*[2]).

Приборы, служащие для измерения вязкости жидкостей и газов, носят название *вискозиметров*. Для определения вязкости наблюдают: течение жидкости через узкую капиллярную трубку (вискозиметр Пинкевича); относительное вращение двух цилиндров, пространство между которыми заполнено вязкой средой (вискозиметры Воларовича); падение шарика в вязкой среде.

Коэффициент вязкости, как показывает опыт, колеблется для разных веществ в широких пределах и зависит от температуры. Ниже приведены *коэффициенты вязкости некоторых жидких и газообразных веществ* (в пуазах) при 18° С:

Касторовое масло . .	12	Эфир	0,0026
Глицерин	11	Кислород	0,0002
Спирт	0,017	Воздух	0,00018
Вода	0,0106	Водород	0,000088

При течении жидкости по трубе некоторая часть ее энергии расходуется на работу против сил трения и превращается в энергию молекулярно-теплового движения. Поэтому можно написать,

---

[1]) Из формулы Ньютона легко установить размерность коэффициента вязкости:

$$[\eta] = \left[\frac{f\Delta l}{S\Delta v}\right] = \frac{ML}{T^2}\frac{L}{L^2}\frac{T}{L} = ML^{-1}T^{-1}.$$

[2]) В честь французского физиолога и физика Пуазеля, который первый произвел точное исследование влияния вязкости на течение жидкости по капиллярной трубке.

приняв во внимание сказанное в § 49:

$$\left(\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1+\rho g h_1\right)-\left(\frac{\rho v_2^2}{2}+p_2+\rho g h_2\right)=\text{const}=$$

$$=\text{работе трения в единице объема за 1 сек.} \quad (4)$$

Течение при трении бывает или слоистым — *ламинарным*[1]), или *турбулентным*[2]). При ламинарном течении слои жидкости скользят друг по другу со скоростями, увеличивающимися по мере удаления от стенок сосуда. Особенно удобно наблюдать ламинарное течение в узкой стеклянной трубке (рис. 100, *а*). Пока течение имеет слоистый характер, струя краски, пущенная в трубку, остается резко ограниченной. При увеличении скорости наступает такой момент, когда течение переходит в турбулентное: резкая граница между чистой и подкрашенной жидкостью исчезает, и вся трубка оказывается заполненной неправильными вихревыми движениями (рис. 100, *б*). Скорость, при которой ламинарное течение превращается в турбулентное, называют *критической скоростью.*

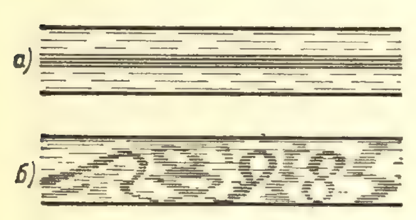


Рис. 100. Ламинарное (*а*) и турбулентное (*б*) течения вдоль трубки.

При установившемся течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей всюду одинаковое сечение, скорость является наибольшей в тех точках поперечного сечения потока, которые наиболее удалены от стенок трубы. Частицы жидкости, непосредственно прилегающие к стенкам трубы, остаются неподвижными. На рис. 101 показано, как распределены скорости в трубе при ламинарном течении. Если радиус трубы есть r, то скорость v_x на расстоянии x от центра поперечного сечения трубы равна:

$$v_x=K(r^2-x^2), \quad (5)$$

где K — коэффициент пропорциональности, зависящий от падения давления на единицу длины трубы и от вязкости жидкости $\left(K=\frac{1}{4}\frac{p_1-p_2}{l}\frac{1}{\eta}\right)$. Приведенное уравнение представляет собой уравнение параболы, которая на рис. 101 изображена пунктиром; поэтому говорят, что *скорости ламинарного течения в трубе распределены по параболическому закону.*

При турбулентном течении (рис. 102) скорость течения, как показывает опыт, пропорциональна примерно корню седьмой степени из расстояния от стенки:

$$v_x=K'\sqrt[7]{r-x} \quad (6)$$

(при шероховатых стенках степень корня ниже, например шестая или пятая).

---

[1]) От латинского lamina — п л а с т и н к а.

[2]) От латинского turbulentus — н е с п о к о й н ы й.

Одномолекулярный слой жидкости, непосредственно прилегающий к стенкам, и при турбулентном течении остается неподвижным; в смежном тонком слое сохраняется ламинарное течение жидкости.

Практически важной является средняя скорость v течения жидкости по трубе. Очевидно, что количество жидкости Q, протекающей в 1 сек. через поперечное сечение трубы S, равно произведению средней скорости течения на площадь поперечного сечения: $Q = vS$.

Экспериментально изучая скорость течения жидкостей по трубам, Гаген (в 1839 г.) и независимо от него Пуазель (в 1841 г.) нашли, что *средняя скорость ламинарного течения жидкости по трубе пропорциональна падению давления на*

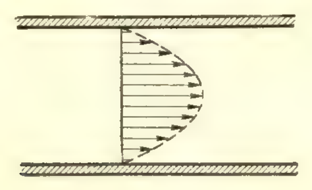


Рис. 101. Параболическое распределение скоростей при ламинарном течении в трубе.

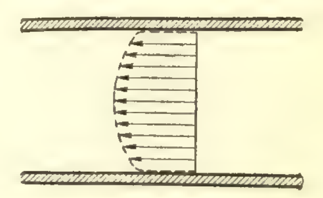


Рис. 102. Распределение скоростей при турбулентном течении в трубе.

единицу длины трубы, пропорциональна квадрату радиуса трубы и обратно пропорциональна коэффициенту вязкости:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{r^2}{8\eta}. \tag{7}$$

Поскольку $Q = vS$, а для круглой трубы $S = \pi r^2$, то легко видеть, что закон Гагена — Пуазеля можно переписать так:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{\pi r^4}{8\pi}. \tag{7'}$$

Закон Пуазеля можно вывести теоретически из уравнения Ньютона (3).

При турбулентном течении скорость течения пропорциональна не первой степени падения давления, а *корню квадратному из падения давления*:

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \lambda \frac{\rho v^2}{2r}. \tag{8}$$

Это — формула Шези. Величину λ, входящую в формулу Шези, называют *коэффициентом сопротивления течению жидкости.*

Формула Шези применима для труб любого сечения, а также и для открытых русел; в этом случае в вышеприведенной формуле Шези радиус трубы r нужно заменить так называемым *гидравлическим радиусом* r_h, который представляет собой отношение площади поперечного сечения потока к «смачиваемому периметру» (для открытого потока ширина свободной поверхности в смачиваемый периметр не входит) [1]).

Чтобы не оперировать с двумя различными законами течения жидкости по трубе (законом Пуазеля и формулой Шези), иногда пользуются формулой Шези

---

[1]) В технических расчетах формулу Шези обычно пишут следующим образом:

$$v = C\sqrt{r_h i};$$

здесь i есть уклон русла: $i = \dfrac{h_1 - h_2}{l}$ [с падением давления вдоль русла уклон связан понятным соотношением: $p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2)$]. Для открытых русел с гладкими каменными стенками при глубине воды от полуметра до нескольких метров $C \approx 80$ *м*$^{1/2}$/*сек*; для русел с земляными стенками $C \approx$ от 30 до 50 *м*$^{1/2}$/*сек*.

не только для турбулентного, но также и для ламинарного течения. Это допустимо, если считать, что для ламинарного течения коэффициент сопротивления течению λ равен:

$$\lambda = \frac{16\eta}{\rho r v}$$

(нетрудно убедиться, что подстановка этого выражения для λ в формулу Шези превращает формулу Шези в закон Пуазеля). Следовательно, для ламинарного течения коэффициент сопротивления убывает с увеличением скорости; для турбулентного течения λ почти не зависит от скорости.

§ 52. Пограничный слой и вихреобразование. Строение турбулентного потока

Если сравнивать для какого-либо конкретного случая действительное течение маловязкой жидкости (например, воды или газов) с тем течением, которое имело бы место при абсолютном отсутствии вязкости, т. е. для идеальной жидкости, то, как уже пояснено выше (в § 48), картина действительного течения оказывается существенно отличной (в связи с вихреобразованиями) от картины течения идеальной жидкости. Однако главное отличие здесь заключается не в том, что в жидкости имеются вихри; и в идеальной жидкости вихри не только могут существовать, но и сами вихри в идеальной жидкости сходны с вихрями в маловязкой жидкости (разница только в том, что в первом случае они абсолютно устойчивы, во втором — они постепенно затормаживаются и энергия их рассеивается в энергию молекулярно-теплового движения).

Главное отличие заключается в обстоятельствах, влекущих за собой возникновение вихрей: в идеальной жидкости вихри не возникали бы, тогда как в самой маловязкой жидкости при определенных скоростях движения они возникают. Стало быть, как бы ни была мала вязкость, имеются такие места в потоке жидкости, обтекающей твердое тело, где вязкость проявляет себя с большим эффектом. Очевидно, что таким местом может быть только то место, где скорости весьма близких слоев жидкости резко различаются по величине, где градиент скорости весьма велик и где поэтому сила трения тоже велика. Из сказанного следует, что существо дела состоит в природе *пограничного слоя* жидкости,— слоя, прилегающего к поверхности обтекаемого тела.

В идеальной жидкости должно было бы происходить скольжение жидкости по поверхности твердого тела. В действительности частицы реальной жидкости самым тончайшим (мономолекулярным) слоем прилипают к поверхности жидкости и остаются в потоке жидкости неподвижными. С другой стороны, при малой вязкости жидкости уже на самом ничтожном расстоянии от поверхности обтекаемого твердого тела обнаруживаются почти такие же скорости течения, как если бы жидкость была идеальной. Стало быть, в очень тонком пограничном слое скорость течения возрастает от нуля до значи-

тельной величины. Большой градиент скорости создает здесь большую величину внутреннего трения.

Если тонкий пограничный слой все время и на всей обтекаемой поверхности тела остается прилегающим к поверхности тела, то в окружающей жидкости течение остается сходным с течением идеальной жидкости и образования

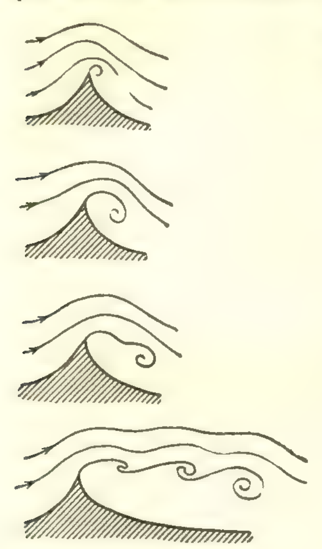


Рис 103. Различные стадии образования вихря при обтекании острого угла.



Рис. 104. Схема, поясняющая возникновение и отрыв вихрей.

вихрей не наблюдается. Но когда жидкость, текущая в пограничном слое, отрывается от поверхности тела, этот оторвавшийся пограничный слой производит завихрение жидкости; вихри, образующиеся в месте срыва пограничного слоя, уносятся вдаль от поверхности тела, и вся картина течения приобретает тем самым совершенно иной характер, чем течение идеальной жидкости.

На рис. 103 вверху показана картина потенциального течения идеальной жидкости, обтекающей острый угол тела. Такова же картина течения и для вязкой жидкости при небольших скоростях, когда в пограничном слое жидкость всюду следует очертаниям тела. При большой скорости течения жидкость, двигавшаяся в пограничном слое, вследствие инерции движения отрывается у края пластины, как это показано на том же рисунке; за краем пластины создается область пониженного давления, куда засасываются струи оторвавшегося пограничного слоя, что и приводит к образованию вихря; вихрь относится течением, но вслед за ним создаются все новые и новые вихри.

На рис. 104, *а* показано возникновение вихрей у неровностей (выступов) поверхности обтекаемого тела, где вследствие инерции

происходит отрыв пограничного слоя. Обращаясь к рис. 104, *б*, мы видим, что на поверхности вихря, которая является ближайшей к поверхности тела, линейная скорость вращения направлена против течения; это создает здесь замедление движения жидкости и, стало быть, по уравнению Бернулли, местное повышение давления, тогда как на противоположной поверхности вихря скорость вращения совпадает по направлению со скоростью течения, что в связи с местным ускорением жидкости ведет, по уравнению Бернулли, к понижению

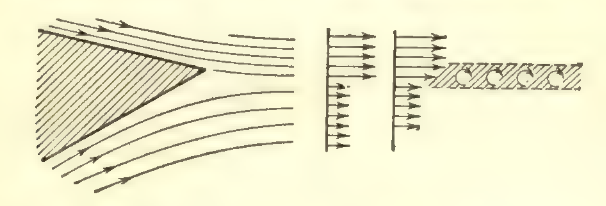


Рис. 105. Поверхность раздела, образующаяся у острого заднего края тела, где встречаются слои жидкости с различными скоростями, переходит (в случае существования вязкости, даже незначительной) в слой с вращением частиц.

здесь давления. В итоге на вихрь действует разность давлений, отбрасывающая его от того участка поверхности тела, где вихрь образовался.

Рис. 105 поясняет, как образуется вихревой слой за острым задним краем тела. В случае идеальной жидкости здесь возникла бы поверхность раздела потенциального течения. При самой незначительной вязкости такая поверхность раздела заменяется непрерывным изменением скорости в слое, в котором макрочастицы жидкости приходят во вращательное движение,— вихревым слоем.

В последующих параграфах приведен еще ряд рисунков, поясняющих условия возникновения вихрей в местах отрыва пограничного слоя и на поверхностях раздела, а в § 54 сообщены дополнительные данные, касающиеся этого вопроса.

Две классификации видов течения жидкости — с одной стороны, на потенциальное (без вращения макрочастиц жидкости) и вихревое (с вращением частиц) и, с другой стороны, на ламинарное (слоистое) и турбулентное — касаются разных сторон явления. Иногда ошибочно представляют себе, что ламинарное течение — это течение потенциальное, а турбулентное — вихревое. В действительности ламинарное течение в одних случаях является потенциальным, в других — вихревым. В турбулентном течении основное переносное движение жидкости часто соответствует потенциальному течению; однако в турбулентном потоке обычно существуют и вихри, накладывающиеся на основное течение и ведущие к перемешиванию жидкости.

Является ли течение безвихревым (потенциальным) или вихревым, это зависит от того, имеет ли место вращение макрочастиц жидкости. Противопоставление же ламинарного течения турбулентному не относится в главном к этой характери-

стике движения, а определяет скорее регулярность, упорядоченность движения — отсутствие или наличие перемешивания масс жидкости при ее течении.

В настоящее время мы еще не имеем в совершенстве ясного и всеми признанного взгляда на строение турбулентного потока. Этот вопрос в важных деталях не одинаково трактуется авторитетными механиками (например, Прандтлем, Карманом, М. А. Великановым и др.). Но в понимании главных характерных особенностей турбулентности существенных разногласий не имеется.

При турбулентном течении «траектории частиц жидкости — даже при движении по прямой круглой трубе — представляют собой не прямые, параллельные оси трубы, а сложные пространственные кривые. Это означает, что компоненты скорости, нормальные к оси трубы, не равны нулю. Вместе с тем траектории неустойчивы во времени — отдельные частицы, проходящие последовательно через данную точку входного сечения, отнюдь не описывают тождественных друг другу кривых. Поэтому если фиксировать некоторый элемент пространства, то условия в нем будут непрерывно изменяться, какова бы ни была обстановка процесса. Однако в случае потока жидкости, совершающей движение под влиянием постоянных внешних воздействий, происходящие изменения имеют характер пульсаций около некоторых средних постоянных значений. Поэтому если суждение о свойствах такого потока строится на основании наблюдения средних по времени величин, то движение жидкости воспринимается как установившееся.

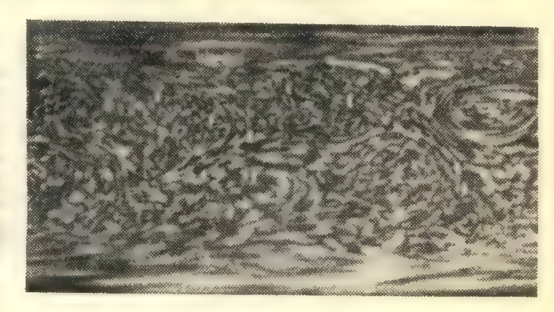


Рис. 106. Турбулентный поток в трубе.

Таким образом, понятие стационарного турбулентного течения является в известной мере условным. Оно законно только по отношению к усредненным по времени величинам. Почти для всех практических задач определение свойств потока с помощью средних величин является достаточным, и, следовательно, вполне возможно рассматривать движение как установившееся.

Эти особенности турбулентного режима — нестационарность процесса по самой его природе и наличие компонентов скорости, нормальных к направлению основного переносного движения жидкости,— являются существенными признаками его отличия от ламинарного режима. Именно они сообщают турбулентному потоку черты хаотичности в противоположность ламинарному потоку, который представляет собой вполне организованную форму течения»[1]).

На рис. 106 показана картина турбулентного потока в трубе, сфотографированная при движении фотокамеры со скоростью движения ядра (т. е. средней части) потока; здесь видны нестационарные вихревые движения в ядре. На рис. 107 тот же поток сфотографирован при более медленном движении фотокамеры — со скоростью в граничном слое; здесь видны завихрения в граничном слое. Эти фотографии показывают, что при турбулентном течении происходит интенсивное перемешивание масс соседних слоев жидкости.

Для потока, ограниченного стенками, характерно, что завихрения направлены вдоль движения (как это и видно на приведенных фотографиях). В свободном потоке (в турбулентной струе) вихри обычно перпендикулярны к направлению движения

---

[1]) А. А. Гухман, Физические основы теплопередачи, т. I. Теория подобия и ее приложения, М.— Л., 1934.

Прандтль в одной из своих статей пишет: «Для точного исследования турбулентного движения с перемешиванием масс жидкости удобно ввести понятие длины пути перемешивания, имеющее для турбулентного движения с перемешиванием масс жидкости такое же значение, как и понятие о средней длине свободного пробега молекул в теории молекулярной диффузии газов. При движении как одного, так и другого рода возникают касательные напряжения (вернее сказать, кажущиеся напряжения) благодаря непрерывному переносу и обмену количеств движения между слоями жидкости, имеющими разные скорости. При объяснении этого довольно сложного в действительности явления можно исходить из следующего упрощенного представления

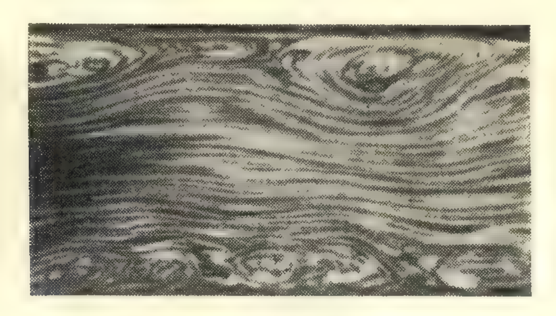


Рис. 107. Картина движения при развитой турбулентности.

Предположим, что некоторая масса жидкости под влиянием столкновения с соседними массами получает движение в перпендикулярном направлении к общей скорости потока, сохраняя ту же скорость в направлении потока, какую имеет тот слой жидкости, из которого выходит рассматриваемая масса. Предположим, что эта масса проходит в поперечном к потоку направлении расстояние l (*путь перемешивания*), пока она не столкнется или не перемешается с другими массами жидкости. Такого рода движения с обменом и перемешиванием масс жидкости происходят в обоих направлениях, а потому в слои с большей скоростью движения попадают все время массы, проникающие из слоев, движущихся медленнее. Скорость движения более быстрых слоев, таким образом, замедляется, и, обратно, те массы, которые поступают в слои с более медленным движением из слоев с большей скоростью, ускоряют движение слоев с меньшей скоростью. Взаимное действие друг на друга двух жидких слоев получается таким же, как если бы между ними существовало взаимное трение».

Академик А. Н. Колмогоров, исследовав строение турбулентного потока, установил, что если в каждый данный момент сопоставлять значения скоростей v_1 и v_2 в двух точках потока, находящихся на расстоянии r друг от друга (небольшом в сравнении с размерами крупных вихрей в потоке), то *средний квадрат разности пульсации скоростей* определяется соотношением

$$\overline{(v_1 - v_2)^2} = C \cdot r^{\frac{2}{3}},$$

где C — некоторая постоянная величина, называемая *характеристикой турбулентности* (для условий атмосферы она имеет значение порядка 1 $см^{2/3} \cdot сек^{-1}$ и с увеличением скорости ветра несколько возрастает). Приведенное соотношение часто называют «законом $^2/_3$». А. Н. Обуков показал, что аналогичное соотношение имеет место и для среднего квадрата пульсаций температуры.

§ 53. Сопротивление движению тел в жидкостях и газах

При движении тела в жидкости или газе с небольшой скоростью сопротивление движению обусловлено силами трения и, как установил Стокс, пропорционально произведению вязкости среды на линейные размеры тела и первую степень скорости. Для тел шарообразной формы *сопротивление вязкости* равно

$$Q = 6\pi\eta r v, \tag{9}$$

где η — коэффициент вязкости, v — скорость и r — радиус тела.

Формула Стокса имеет много применений. В частности, формулу Стокса применяют для вычисления скорости равномерного свободного падения тела в вязкой среде. Очевидно, что равномерное падение должно наблюдаться в том случае, если сопротивление движению равно кажущемуся весу тела в среде (т. е. его истинному весу $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_1 g_1$, где ρ_1 — плотность тела, за вычетом веса вытесненной среды $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_2 g$, где ρ_2 — плотность среды):

$$6\pi\eta r v_{\text{const}} = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_1 - \rho_2).$$

Отсюда скорость равномерного падения тела в вязкой среде равна:

$$v_{\text{const}} = \frac{2}{9}\frac{\rho_1 - \rho_2}{\eta} g r^2.$$

Часто эту формулу используют для вычисления радиуса капелек или пылинок по наблюденной скорости их равномерного падения в воздухе или в жидкости.

Если в указанную формулу подставить вязкость и плотность воздуха при нормальных условиях, то для вычисления скорости равномерного падения водяных капелек в воздухе получается такое соотношение:

$$v_{\text{const}} = 1{,}3 \cdot 10^6 r^2,$$

где r выражено в сантиметрах, а v — в *см/сек*.

При больших скоростях движения сопротивление жидкости и газа обусловлено в основном затратой работы на образование вихрей. В этих случаях сопротивление (его часто называют *лобовым сопротивлением*) по закону, открытому Ньютоном, *пропорционально квадрату скорости* движения и площади проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения («миделево сечение» S):

$$Q = c_x \frac{\rho v^2}{2} S. \tag{10}$$

Здесь ρ — плотность среды и c_x — числовой коэффициент, различный для тел разных форм, называемый *коэффициентом лобового сопротивления*.

Учитывая, что лобовое сопротивление вызывается главным образом возникающими в среде вихрями, мы можем получить выше-

приведенную формулу из следующего (нестрогого) рассуждения. Пусть тело, движущееся в жидкости, оттесняет на своем пути в каждую секунду массу жидкости, равную произведению плотности жидкости ρ на объем Sv. Если считать, что всем частицам этой оттесняемой жидкости сообщается скорость, в среднем пропорциональная скорости движения тела v, то, стало быть, оттесняемой жидкости сообщается в каждую секунду количество движения, пропорциональное ρSv^2; по закону равенства действия и противодействия жидкость должна оказывать телу сопротивление, равное приращению количества движения жидкости за 1 сек., т. е. сопротивление, пропорциональное ρSv^2.

Если бы не происходило вихреобразования, то при равномерном движении тела в жидкости сопротивление движению определялось бы только силами трения, а инерция среды никак не сказывалась бы на величине сопротивления. В идеальной невязкой жидкости относительные скорости частиц жидкости на некотором расстоянии позади тела должны были бы оставаться такими же, как перед ним.

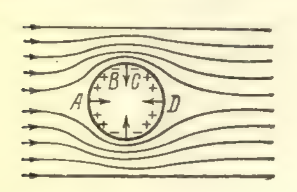


Рис. 108. К пояснению парадокса Эйлера.

Встречаясь с поверхностью тела в точке A (рис. 108), частицы жидкости вынуждены изменить первоначальное прямолинейное направление движения на криволинейное. В связи с этим они действуют на поверхность тела с некоторой силой, поэтому в пространстве AB давление на поверхность тела повышается. На рис. 108 области повышенного давления обозначены знаками плюс. На участке BC направление частиц жидкости вновь меняется: теперь частицы жидкости стремятся по инерции уйти от тела. На этом участке давление понижается. На рис. 108 области пониженного давления обозначены знаком минус. На участке CD частицы жидкости опять будут оказывать давление на поверхность тела. Аналогичное распределение сил имеет место и на нижней поверхности тела. Вследствие симметричного распределения давлений равнодействующая сила равна нулю.

Сказанное приводит к парадоксальному выводу, который находится в противоречии с повседневным опытом и формулой (10): *в невязкой жидкости при равномерном движении тело не должно было бы испытывать никакого сопротивления движению* (парадокс Эйлера).

Сопротивление движению по формуле (10), вызываемое инерциальными силами жидкости, создается вследствие отрыва пограничного слоя, что приводит к вихреобразованию и к той реальной картине обтекания, которая, в отличие от изображенной на рис. 108, показана на рис. 109 и 110.

Вблизи участков поверхности C и C' жидкость движется с большей скоростью, чем в невозмущенном потоке; давление здесь понижается. Под действием разности давлений течение в пограничном слое направлено от A к C и C' (по направлению потока) и от A' к C и C' (против потока). Эти встречные течения пограничного слоя и потока сталкиваются друг с другом у точек C и C'. На пограничном слое создается выступ, который закручивается набегающим потоком, отрывается от поверхности тела и уносится в виде вихря. Вихревая область постепенно перемешивается с окружающей жидкостью, об-

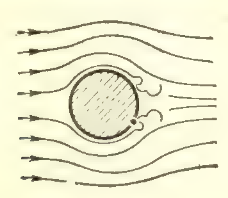


Рис. 109. Поток, обтекающий цилиндр небольшое время.

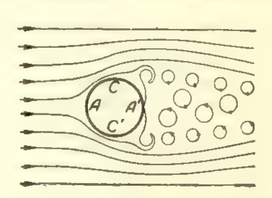


Рис. 110. Схема движений жидкости за цилиндрическим телом.

разуя позади тела расширяющуюся турбулентную зону, или *вихревую пелену*.

В связи со сказанным ясно, почему коэффициент пропорциональности c_x, входящий в формулу (10),— коэффициент лобового сопро-



Рис. 111. Различные тела, обладающие одинаковым лобовым сопротивлением.

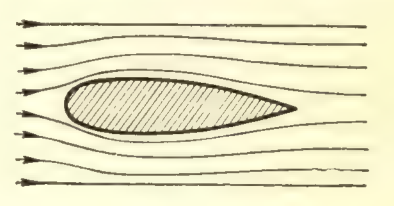


Рис. 112. Тело удобообтекаемой формы.

тивления — зависит от формы тела: форма тела может облегчать или же, наоборот, затруднять возникновение вихрей. Если тело имеет удобообтекаемую форму, то разности давлений в различных участках его поверхности, вызванные различием скорости, будут незначительны; встречное движение слоев жидкости близ поверхности будет выражено слабо; срыва струй и завихрения жидкости почти не будет, и испытываемое телом сопротивление движению будет невелико. Напротив, если тело ограничено острыми углами, как, например, плоская пластинка, поставленная перпендикулярно к потоку, то разности давлений, вызванные изменением скорости при

обтекании острых углов, будут большими, вихрей образуется много, и лобовое сопротивление окажется значительным.

На рис. 111 изображены тела различных размеров и форм, обладающие одним и тем же лобовым сопротивлением. Наиболее удобообтекаемой оказывается вытянутая, каплеобразная форма, такая, какую придают всем фюзеляжам самолетов. Тело подобной формы почти совсем не создает в потоке вихрей (рис. 112); сопротивление движению такого тела вызывается главным образом силами трения.

Ниже даны *коэффициенты лобового сопротивления* c_x для некоторых тел:

Квадратная пластинка, перпендикулярная к направлению потока	1,28
Диск, перпендикулярный к направлению потока	1,12
Шар	0,50
Тело наилучшего обтекания (сигарообразное, с задним заостренным концом) при длине, в четыре раза превышающей диаметр, с осью по потоку	0,026

§ 54. Числа Рейнольдса. Кинематическая вязкость

Опыт показывает, что ньютонова формула лобового сопротивления применима только в некоторых пределах значений скорости.

При малых скоростях (в воздухе до 1 *м/сек*), когда силы инерциального происхождения малы в сравнении с силами внутреннего трения, сопротивление, в соответствии с законом Стокса, пропорционально не квадрату, а п е р в о й степени скорости.

При больших скоростях (близких к скорости звука) сопротивление возрастает, по-видимому, пропорционально кубу скорости. При движении тела со скоростью, большей скорости звука, вновь оказывается справедливым закон квадрата скорости.

Мы видим, таким образом, что, желая применять формулу

$$Q = c_x \frac{\rho v^2}{2} S$$

к любым скоростям движения, мы обязаны рассматривать коэффициент сопротивления c_x как некоторую функцию коэффициента вязкости среды η, плотности среды ρ, скорости движения v и линейных размеров тела l. Можно совершенно строго доказать, что коэффициент сопротивления c_x зависит только от численной величины отношения $\frac{\rho l v}{\eta}$. Почему это так, нетрудно понять: коэффициент сопротивления c_x является отвлеченным числом, поэтому функциональная зависимость c_x от величин η, ρ, l, v должна сводиться к зависимости от такой комбинации этих величин, которая сама представляет собой отвлеченное число. Нетрудно убедиться, что отношение $\frac{\rho l v}{\eta}$

как раз представляет собой отвлеченное число. Указанное отношение называют *числом Рейнольдса.*

Итак, *коэффициент лобового сопротивления представляет собой* некоторую, поныне еще не вполне выясненную, *функцию чисел Рейнольдса:*

$$c_x = f(\mathrm{Re}), \quad \text{где} \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho l v}{\eta}. \tag{11}$$

Отношение коэффициента вязкости к плотности среды $\frac{\eta}{\rho}$ называют *кинематической вязкостью*[1]) и обозначают буквой ν:

$$\frac{\eta}{\rho} = \nu. \tag{12}$$

Как легко видеть из формулы (10), движение какого-либо определенного тела с определенной скоростью в различных средах сопровождается одинаковым лобовым сопротивлением, если равны кинематические вязкости ν этих сред. Иными словами, уменьшение коэффициента вязкости среды η в n раз при одновременном уменьшении плотности среды в n раз не изменяет величины лобового сопротивления. Поэтому числа Рейнольдса обычно выражают не через коэффициент вязкости η, а через кинематическую вязкость ν:

$$\mathrm{Re} = \frac{lv}{\nu}. \tag{13}$$

Нетрудно убедиться в том, что *число Рейнольдса пропорционально отношению сил инерции* $S\rho v^2$ *к силам вязкости*, действующим на поверхность тела, $\eta S \frac{v}{l}$; $\mathrm{Re} \approx \frac{S\rho v^2}{\eta S \frac{v}{l}} = \frac{\rho v l}{\eta}$.

Приведем некоторые *значения кинематической вязкости* (в *см²/сек*):

Вода при 0° 0,0178	Воздух при 100° и 1 *ат* . . . 0,245
» » 20° 0,010	» » 0° » 7,6 *мм* рт ст. 13,3
» » 50° 0,0056	Глицерин при 20° 6,8
» » 100° 0,0030	Ртуть » 0° 0,00125
Воздух » 0° и 1 *ат* . . 0,133	» » 100° 0,00091

Вследствие того, что в выражении кинематической вязкости плотность среды стоит в знаменателе, получается, что воздух имеет кинематическую вязкость бóльшую, чем вода. Разреженный воздух при давлении 7,6 *мм* рт. ст. (и при 0°) имеет кинематическую вязкость в два раза бóльшую, чем глицерин.

По формуле (13) для какого-либо тела, движущегося со скоростью v, число Рейнольдса убывает, когда кинематическая вязкость возрастает; когда число Рейнольдса невелико, то, как указывает

[1]) Размерность кинематической вязкости $\frac{L^2}{T}$. Единицу кинематической вязкости в системе *CGS* называют *стоксом.*

теория, в лобовом сопротивлении силы, обусловленные трением, преобладают над силами, вызываемыми инерцией среды. Наоборот, большие числа Рейнольдса (которые при прочих равных условиях наблюдаются при малой кинематической вязкости) указывают на преобладание сил инерции среды в сравнении с трением.

Большая кинематическая вязкость воздуха сравнительно с водой и соответственно малые числа Рейнольдса указывают на то, что по причине малой плотности воздуха инерция воздуха начинает преобладать в лобовом сопротивлении над трением при скоростях значительно бóльших, чем в случае движения в воде. И действительно, например, при полете дирижабля лобовое сопротивление обусловлено в значительной мере трением; будь вместо воздуха вода, роль сил инерции в лобовом сопротивлении сильно возросла бы в сравнении с трением (силы инерции возросли бы пропорционально плотности, т. е. по порядку величины почти в 1000 раз, вязкость же воды только примерно в 100 раз превышает вязкость воздуха).

Зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса, к сожалению, является сложной и для тел разной формы неодинаковой Тем не менее теоретические изыскания и экспериментальные исследования наглядно показали, что введение чисел Рейнольдса в практику аэродинамических и гидродинамических расчетов вносит в эти расчеты существенные упрощения В особенности же важны числа Рейнольдса потому, что при определенных числах Рейнольдса наступает резкое изменение лобового сопротивления, что свидетельствует о коренном изменении картины обтекания движущегося в потоке тела.

Числа Рейнольдса являются важными также и для характеристики невозмущенного потока жидкости. Так, например, теория показывает, что так называемая *критическая скорость* течения жидкости по трубе или каналу (т. е. та скорость, когда спокойное ламинарное течение вдруг превращается в турбулентное течение) должна соответствовать определенному числу Рейнольдса Для всех жидкостей и газов, каковы бы ни были их плотности и вязкости, превращение ламинарного течения в турбулентное должно происходить при одном и том же числе Рейнольдса. Опыт подтверждает этот вывод, однако дело усложняется тем, что на превращение ламинарного течения в турбулентное довольно сильно влияет форма входного отверстия, через которое жидкость втекает в трубу или в канал. Самое большое число Рейнольдса $Re = \frac{rv}{\nu}$ (где r — радиус трубы, ν — кинематическая вязкость и v — скорость течения), при котором в гладкой трубе может происходить ламинарное течение, равно примерно 20 000. Если входное отверстие не обеспечивает спокойного втекания жидкости в трубу, но, напротив, сделано таким, чтобы содействовать возникновению турбулентности, то превращение ламинарного течения в турбулентное может произойти при числах Рейнольдса порядка 1000—2000. На рис. 113 показано, как зависит для любой жидкости коэффициент сопротивления λ при течении жидкости в трубе (§ 51) от числа Рейнольдса.

На числах Рейнольдса основываются, когда лабораторно воспроизводят течение рек, обтекание самолета воздухом при его полете и т. п. Чтобы в лаборатории на моделях получить правильную картину течения реки или обтекания самолета, необходимо экспериментировать с «модельным» потоком, который характеризуется тем же числом Рейнольдса,что и воспроизводимый поток.Кроме того,модельный поток, конечно, должен быть геометрически подобен воспроизводимому потоку, и тела, возмущающие эти потоки, также должны быть геометрически подобны. Но и при полном геометрическом подобии, если числа Рейнольдса неодинаковы, картины движения и изучаемые коэффициенты сопротивления мо-

гут оказаться различными. Чтобы число Рейнольдса не изменилось, когда мы уменьшаем размеры потока в n раз, нужно в n раз увеличить скорость или же заменить среду другой средой, кинематическая вязкость которой была бы в n раз меньше [все это с очевидностью следует из формулы (13)].

Лабораторное изучение обтекания воздухом движущихся тел, например самолета, проводят на геометрически подобных моделях тел в аэродинамических трубах.

Аэродинамическая труба в простейшем случае представляет собой цилиндр, внутри которого прогоняют воздух с помощью вентилятора, расположенного у одного из концов; близ другого конца внутри трубы помещают испытываемую модель размерами, в несколько раз меньшими внутреннего диаметра трубы. Аэродинамическая труба должна создавать для модели такие же условия, в которых находится движущийся в воздухе самолет. Воздушный поток должен набегать с одинаковой скоростью на различные части модели. Кроме того, все струи воздушного потока должны перемещаться параллельно друг другу; в потоке не должно быть завихрений. Чтобы достигнуть этого, трубам придают своеобразную форму.

В аэродинамических трубах «прямого действия» воздух засасывается из помещения, в котором установлена труба, прогоняется по ней, обдувая модель, и выбрасывается вентилятором с другого конца. В других трубах «замкнутого типа» во время работы циркулирует одно и то же количество воздуха.

Рис. 113. Зависимость коэффициента сопротивления λ течению жидкости по трубе от чисел Рейнольдса.

Упомянутое выше условие обязательного равенства чисел Рейнольдса создает большие затруднения для техники аэродинамических измерений. чем меньше размеры l исследуемой модели, тем больше должна быть при прочих равных условиях скорость v воздушного потока, а при скоростях, бо́льших 100 *м/сек*, сказывается сжимаемость воздуха. Если скорость самолета 1000 *км/час* (примерно 280 *м/сек*), то для испытания в воздушном потоке втрое меньшей по размерам модели этого самолета пришлось бы вести испытания при скорости воздуха свыше 840 *м/сек*, т. е. значительно превышающей скорость звука. Но при переходе к сверхзвуковому течению картина обтекания коренным образом изменяется. Таким образом, производить испытания уменьшенных моделей скоростных дозвуковых самолетов в аэродинамических трубах нельзя; приходится вести испытания отдельных частей самолетов или строить очень большие трубы.

Гидродинамические исследования на моделях картины течения рек и обтекания судов не встречают особых затруднений, так как в этом случае обычно не имеется препятствий для обеспечения равенства чисел Рейнольдса.

При малых числах Рейнольдса непосредственное проявление вязкости преобладает над проявлением инерции среды и становится применимым закон Стокса. А именно, закон Стокса верен, когда число Рейнольдса мало в сравнении с единицей, например равно $^1/_5$, $^1/_{10}$ или еще меньше.

Число Рейнольдса $\mathrm{Re}=\frac{2rv}{\nu}$ при заданном значении кинематической вязкости ν мало́, когда малы размеры тела и скорость движения. Кинематическая вязкость ν воздуха при нормальных условиях по порядку величины равна $^1/_{10}$. Поэтому для движения в атмосферном воздухе закон Стокса относительно верен, когда произведение радиуса тела на скорость (выраженные в сантиметрах и в *см/сек*) не превышает примерно $^1/_{100}$; чем меньше будет это произведение rv, тем лучше оправдывается закон Стокса. Кинематическая вязкость воды по порядку

величины равна $^1/_{100}$; поэтому для движения в воде закон Стокса относительно верен, когда произведение rv не превышает $^1/_{1000}$.

Сопоставляя формулу Стокса (9) с более общей формулой Ньютона (10),

$$Q = 6\pi\eta r v = c_x \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где $S = \pi r^2$, мы видим, что, применяя формулу Ньютона (при малых числах Рейнольдса) для вычисления сопротивления вязкости, коэффициент лобового сопротивления c_x нужно считать, по Стоксу, равным

$$\frac{c_x}{2} = \frac{6\eta}{\rho r v}. \qquad (14)$$

Обычно правую часть этого уравнения выражают через число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{2rv}{\nu} = \frac{2\rho r v}{\eta}$. Тогда

$$c_x = \frac{24}{\mathrm{Re}}. \qquad (15)$$

Стало быть, если не отступать от формулы Ньютона, то закон Стокса нужно формулировать [заменяя, таким образом, уравнение (9) уравнением (10)] так *Когда числа Рейнольдса малы в сравнении с единицей, лобовое сопротивление представляет собой сопротивление вязкости; в этом случае коэффициент лобового сопротивления обратно пропорционален числу Рейнольдса* и равен для шара $\frac{24}{\mathrm{Re}}$.

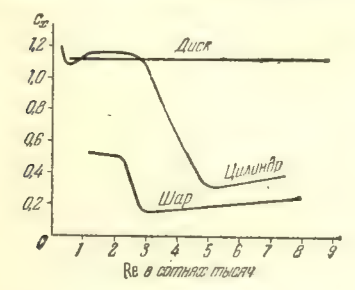


Рис. 114. Зависимость коэффициента лобового сопротивления c_x от чисел Рейнольдса для диска цилиндра и шара

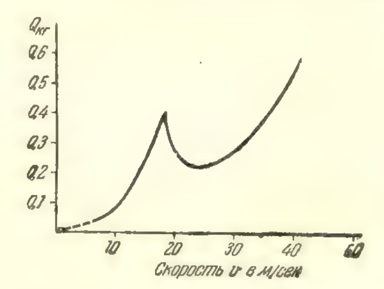


Рис. 115. Лобовое сопротивление шара (диаметром $^1/_4$ м) как функция скорости движения в воздухе. При 18—23 м/сек наблюдается кризис.

Если число Рейнольдса недостаточно мало́, необходимо наряду с вязким сопротивлением учитывать сопротивление, возникающее вследствие инерции среды. Когда число Рейнольдса по порядку величины близко к единице, применяют формулу Озена

$$c_x = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(1 + \frac{3}{16}\mathrm{Re}\right). \qquad (16)$$

При больших числах Рейнольдса (порядка тысяч) непосредственным проявлением сил внутреннего трения можно пренебречь в сравнении с силами вихревого

происхождения, которые, однако, как мы видели (§ 52) косвенно связаны с трением.

Для чисел Рейнольдса малых в сравнении с единицей, коэффициент лобового сопротивления c_x по закону Стокса при увеличении числа Рейнольдса убывает. При дальнейшем возрастании числа Рейнольдса уменьшение коэффициента лобового сопротивления все более замедляется в связи с проявлением инерции среды. В области чисел Рейнольдса порядка десятков тысяч коэффициент лобового сопротивления остается примерно постоянным (значения c_x, приведенные в конце предыдущего параграфа, относятся именно к этому интервалу чисел Рейнольдса, до $\mathrm{Re} \approx 100\,000$—$200\,000$).

В определенной области чисел Рейнольдса (для шара при Re от 200 000 до 300 000; для цилиндра при Re от 400 000 до 500 000) вдруг наступает резкое уменьшение коэффициента лобового сопротивления. Коэффициент лобового сопротивления уменьшается в три, четыре пять раз, а затем при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса вновь остается почти постоянным (рис 114) Лобовое сопротивление в целом испытывает при этом также резкое уменьшение (рис. 115). Указанное явление носит название *кризиса*.

Кризис связан с резким изменением характера течения в слое жидкости (или газа), который прилегает к поверхности движущегося тела. Обратимся вновь к рис. 109 и 110. На этих рисунках показано, что «срыв вихрей» происходит в определенном месте движущегося тела. До места срыва вихрей обтекание изображено на упомянутых рисунках как ламинарное. При кризисе это ламинарное до места срыва вихрей обтекание превращается в турбулентное, в связи с этим место срыва вихрей смещается назад, и лобовое сопротивление резко уменьшается

§ 55. Аэродинамические силы. Подъемная сила крыла и тяга самолета

Особенностью воздуха в сравнении с жидкостями является большая сжимаемость воздуха. Учитывая эту особенность и повторяя рассуждения, которые были приведены в § 49 при выводе уравнения Бернулли, можно получить видоизмененное уравнение Бернулли, в котором сжимаемость воздуха заранее предусмотрена (§ 133). Оказывается, однако, что при не слишком больших скоростях практически нет надобности прибегать к этому уточнению уравнения Бернулли. Действительно, пусть течение воздуха нарушено каким-нибудь телом Скорость воздуха вблизи тела обозначим через v, а на достаточно большом расстоянии от него — через v_0. По теореме Бернулли разность давлений Δp обусловленная разностью скоростей, равна:

$$\Delta p = p_0 - p = \frac{\rho}{2}\,(v^2 - v_0^2).$$

Пусть скорость воздуха вдали от тела $v_0=0$, а скорость близ него $v = 100$ *м/сек*. Тогда разность давлений

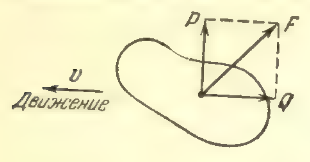
$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{0{,}13\cdot 100^2}{2} = 650\ кГ/м^2.$$

Если давление p_0 невозмущенного потока есть атмосферное давление 10 333 *кГ/м²*, то $\frac{\Delta p}{p} = 0{,}063$, и по закону Бойля таково же сжатие воздуха. Следовательно, ошибка, которую мы совершим, считая в этом случае воздух несжимаемым, составит всего 6%. Скорость 100 *м/сек* есть скорость 360 *км/час*. Мы видим, таким образом, что во многих приближенных расчетах, например в расчетах движения нескоростных самолетов, можно не учитывать сжимаемость воздуха и пользоваться простейшей формой уравнения Бернулли. Однако тот же рассмотренный нами пример показывает, что в расчетах движения скоростных самолетов пренебрегать

поправкой на сжимаемость воздуха недопустимо. Тем более эту поправку нужно учитывать в задачах баллистики (учения о полете снарядов), где приходится иметь дело со скоростями порядка 1000 *м/сек*.

Силы, действующие на движущиеся в воздухе тела, называют *аэродинамическими силами*.

Когда аэродинамическая сила F направлена под углом к движению, ее можно разложить на нормальную составляющую P и на тангенциальную составляющую Q, которая представляет собой лобовое сопротивление (рис. 116). Нормальная составляющая P, возникающая при движении самолетного крыла, является *подъемной силой*, поддерживающей самолет в воздухе.



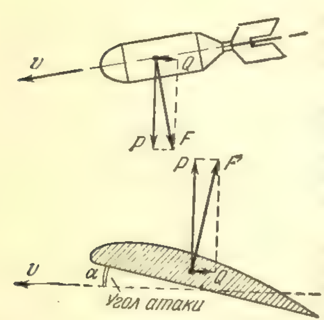


Рис. 116. Аэродинамические силы. α — угол атаки.

Поперечное сечение крыла имеет характерную форму — так называемый *профиль Жуковского* (рис. 117).

Подъемная сила и лобовое сопротивление крыла возникают в результате взаимодействия с крылом вызванных его движением вихревых систем. Таких вихревых систем три:

1. *Вихревая пелена*, возникающая позади крыла, как и позади всякого тела (рис. 117). Существованием этой вихревой пелены и силами вязкости объясняется часть лобового сопротивления крыла — так называемое *профильное сопротивление* Q_p.

2. Скорость потока, обтекающего острую заднюю кромку крыла, имеет очень большую величину (рис. 118), поэтому в самом начале движения самолета тут возникает вихрь большой мощности — так называемый *разгонный вихрь* (рис. 119), который увлекается потоком, и после этого у задней кромки образуется точка срыва струй. А так как в замкнутой системе (крыло — воздух) момент вращения должен оставаться постоянным, то *вокруг крыла устанавливается окружное течение B* («циркуляция» воздуха), момент вращения которого равняется моменту вращения избыточного или разгонного вихря A (рис. 120). Это циркуляционное течение складывается с течением воздуха навстречу крылу, в результате чего *скорость воздуха над крылом оказывается больше, чем под крылом* (рис. 121). На основании теоремы Бернулли давление должно быть больше там, где меньше скорость. Поэтому *под крылом образуется область повышенного давления, над крылом — пониженного*: на крыло действует некоторая подъемная сила P.

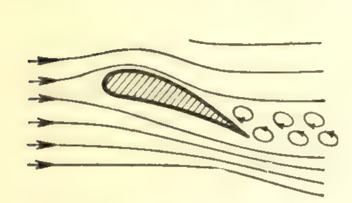


Рис. 117. Вихревая пелена позади несущей поверхности.

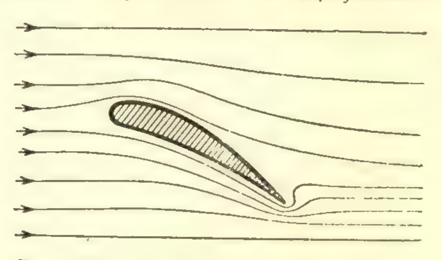


Рис. 118. Скорость воздуха у задней кромки крыла очень велика (на рисунке показано уплотнение линий тока).

На рис. 122 изображено распределение областей с повышенным и пониженным давлением по крылу. Из этого рисунка видно, что подъемная сила обусловливается не столько давлением на нижнюю часть крыла, сколько сосущим действием воздуха на его верхнюю поверхность.

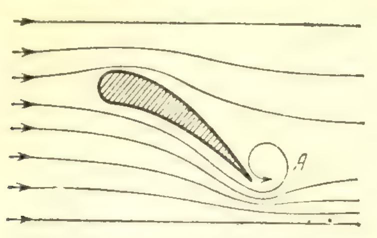


Рис. 119. В начале движения у задней кромки возникает «разгонный вихрь» A.

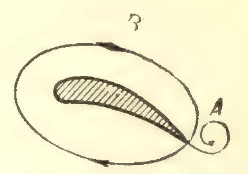


Рис 120. Окружное течение вокруг крыла (присоединенный вихрь).

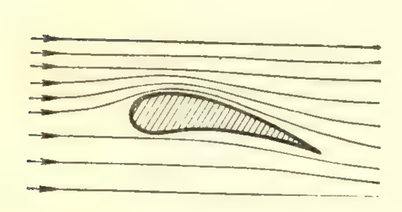


Рис. 121. Наложение циркуляции на встречный поток. Скорость воздуха, пропорциональная густоте линий тока, над крылом оказывается больше, чем под крылом.

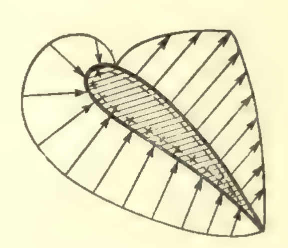


Рис. 122. Распределение давления на несущую поверхность.

3. Циркуляция вокруг крыла — несущий вихрь — не кончается у его концов, но сбегает с них. Кроме того, благодаря пониженному давлению над крылом воздух перетекает, как показано на рис. 123, с нижней поверхности крыла на верхнюю. Это течение воздуха, складываясь со сбегающим с концов крыла вихрем, образует позади крыла так называемые вихревые «усы», или *вихревые жгуты*. Работа, идущая на создание этих вихрей, обусловливает существование добавочного сопротивления Q_i, называемого *индуктивным сопротивлением* (рис. 124). Индуктивное сопротивление тем меньше, чем больше отношение длины крыла к его ширине, называемое удлинением крыла.

При больших скоростях движения сказывается затрата работы на волнообразование — *волновое сопротивление*.

Подъемная сила, как показывают опыт и теория пропорциональна квадрату скорости движения v, площади несущей поверхности самолета S и плотности воздуха ρ, т. е. аналогично формуле (10)

$$P = c_y \frac{\rho v^2}{2} S; \tag{17}$$

здесь P обозначает подъемную силу, а коэффициент c_y называют коэффициентом подъемной силы. Профильное, индуктивное и волновое сопротивления крыла вместе дают лобовое сопротивление Q:

$$Q = Q_p + Q_i + Q_{\text{волн}} = c_x \frac{\rho v^2}{2} S. \qquad (18)$$

Коэффициент c_x есть коэффициент лобового сопротивления крыла. Величины коэффициентов c_x и c_y зависят от формы крыла и от его положения относительно потока — *угла атаки* (рис. 116).

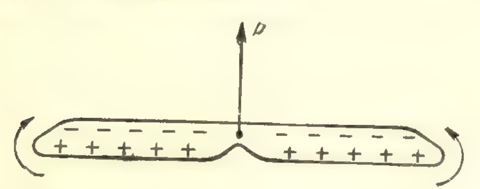


Рис. 123. Благодаря разности давлений воздух перетекает с нижней поверхности крыла на верхнюю.

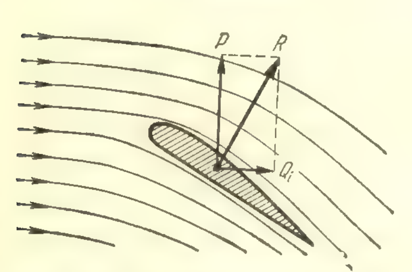


Рис 124. Нормальное давление разлагается на подъемную силу и индуктивное сопротивление.

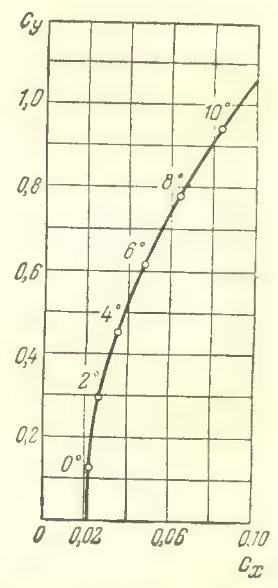


Рис. 125. Поляра самолета-истребителя конца второй мировой войны.

Теоретически коэффициент сопротивления c_x и коэффициент подъемной силы c_y могут быть вычислены для крыльев различной формы по формулам, предложенным Жуковским и Чаплыгиным, с достаточно большой степенью точности. Экспериментальным путем коэффициенты c_x и c_y определяют в аэродинамических лабораториях. С этой целью модель крыла обдувают в аэродинамической трубе. Результаты опыта часто изображают графически в виде так называемых *поляр* (рис. 125) По оси x откладывают коэффициент лобового сопротивления c_x, по оси y — коэффициент подъемной силы c_y.

Координаты точек на кривой соответствуют коэффициентам подъемной силы и лобового сопротивления при различных углах атаки. Имея поляру для какого-нибудь крыла и зная скорость движения самолета, можно определить подъемную силу и лобовое сопротивление, а также угол атаки α, при котором отношение $\varepsilon = \frac{c_y}{c_x}$ — *качество крыла* — будет наибольшим. Для этого достаточно провести касательную к поляре из начала координат. На рис. 125 c_x и c_y представляют собой коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы всего самолета, а не одного только крыла.

Для примера, пользуясь приведенной на рис. 125 полярой самолета, вычислим площадь крыла и мощность мотора, необходимые для полета самолета весом в 6 *т* на высоте 8000 *м*, со скоростью 630 *км/час* при наивыгоднейшем угле атаки.

Чтобы определить *наивыгоднейший угол атаки*, т. е. такой угол, при котором отношение подъемной силы к сопротивлению $\frac{P}{Q}=\frac{c_y}{c_x}$ будет наибольшим, проводим из начала координат касательную к поляре; для точки касания, которая, как легко сообразить, соответствует наибольшему отношению $\frac{c_y}{c_x}$, получается $\alpha_{наив}=6°$, $c_y=0{,}62$, $c_x=0{,}046$. При указанном угле атаки отношение подъемной силы к сопротивлению (это отношение называют *качеством самолета*) $\varepsilon=\frac{0{,}62}{0{,}046}=27{,}0$. Принимая во внимание, что подъемная сила должна уравновешивать вес самолета $P=G=6000$ *кГ*, находим необходимую площадь крыльев: $S=\frac{G}{c_y q}$, где q—скоростной напор $\left(q=\frac{\rho v^2}{2}\right)$. На высоте 8000 *м* весовая плотность воздуха $\gamma=0{,}525$ *кГ/м³*; при скорости полета $v=630$ *км/час* $=175$ *м/сек* скоростной напор $q=\frac{\rho v^2}{2}=\frac{\gamma v^2}{2g}=\frac{0{,}525\cdot 175^2}{19{,}6}=820$ *кГ/м²* и, стало быть, необходимая площадь крыла $S=\frac{6000}{0{,}62\cdot 820}=12$ *м²*.



Николай Егорович Жуковский (1847—1921)

Сопротивление при указанной площади крыла можно вычислить по формуле (10); но, поскольку выше уже было определено качество самолета $\varepsilon=\frac{P}{Q}$, а $P=G$, то можно вычислить Q прямо из соотношения $Q=\frac{G}{\varepsilon}=\frac{6000}{13{,}5}\approx 450$ *кГ*.

Мощность мотора должна быть по меньшей мере такова, чтобы каждую секунду могла быть затрачена работа, равная произведению преодолеваемого сопротивления Q на перемещение самолета за 1 сек. Следовательно, необходимая мощность мотора при к.п.д. винта $\eta=70\%$ будет:

$$N=\frac{Qv}{75\eta}=\frac{450\cdot 175}{75\cdot 0{,}7}\approx 1500 \text{ л. с.}$$

Такой поршневой мотор весит около 1500 *кГ* и расходует 500—600 *кг* бензина в час. Для повышения скорости в 1,5 раза (до 945 *км/час*) пришлось бы увеличить мощность и вес мотора в $(1{,}5)^3=3{,}37$ раза; такой мотор с винтом весил бы почти столько же, как и весь самолет. Вследствие большой потребной мощности и боль-

шого веса поршневых двигателей винтомоторные самолеты никогда не могли достичь скорости в 800 *км/час*. Достижение больших скоростей затруднено и тем, что при увеличении скорости к. п. д. винта убывает.

Воздушный винт развивает тягу потому, что *винт отбрасывает назад некоторую массу воздуха. Сила тяги винта при этом равна изменению количества движения воздуха за* 1 *сек*.: $F = m\Delta v$. В результате работы винта перед ним создается пониженное давление, позади него — повышенное, и воздух, засасываясь передней частью винта и отталкиваясь его задней частью, половину добавочной скорости приобретает перед пропеллером и половину — за ним. Поэтому скорость воздуха, обтекающего винт, равна $v + \frac{\Delta v}{2}$, где v—скорость поступательного движения винта и Δv — добавочная скорость, которую винт сообщает воздуху.

Мощность, потребляемая винтом, равна произведению силы тяги винта F на путь, проходимый им в 1 сек., т. е. на скорость движения винта относительно воздуха: $N = F\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right)$.

Часть этой мощности Fv, называемая *полезной мощностью*, расходуется на поступательное движение винта, часть $F\frac{\Delta v}{2}$ — *теряемая мощность* — на сообщение отбрасываемому воздуху кинетической энергии

Отношение полезной мощности к затрачиваемой представляет собой к.п.д. винта η:

$$\eta = \frac{Fv}{F\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta v}{v}}.$$

Чтобы развить известную тягу, винт должен ежесекундно отбрасывать либо большую массу воздуха M с малой скоростью Δv_1, либо малую массу m с большой скоростью Δv_2. (Тогда тяга будет $F = M\Delta v_1 = m\Delta v_2$.) Легко сообразить, что в первом случае кинетическая энергия, сообщаемая отброшенному воздуху, $\frac{M\Delta v_1^2}{2}$, будет меньше, чем во втором, $\frac{m\,\Delta v_2^2}{2}$; поэтому *выгоднее пользоваться винтами большого диаметра* и большого шага.

Работа винта зависит также от формы лопасти. С аэродинамической точки зрения наивыгоднейшим будет винт большого диаметра с узкой лопастью, вращающийся с большой скоростью. Но соображения прочности не позволяют при постройке воздушных винтов идти в этом направлении слишком далеко.

Сила тяги винта используется на некоторых летательных аппаратах в качестве подъемной силы. Такие аппараты называются *вертолетами*, или *геликоптерами*. За последние годы создано много удачных конструкций вертолетов, винты которых приводятся в движение поршневыми, газотурбинными или реактивными двигателями. Вертолеты могут подниматься и опускаться вертикально и не нуждаются в оборудованных посадочных площадках.

Основоположником теории подъемной силы крыла самолета и теории тяги винта был Николай Егорович Жуковский. Им была установлена фундаментальная теорема, определяющая величину подъемной силы, и им же была установлена зависимость подъемной силы от геометрической формы профиля крыла. Теория подъемной силы при нестационарном движении была создана также нашим соотечественником — акад. Сергеем Алексеевичем Чаплыгиным; он же является родоначальником теории составных крыльев. Чаплыгин первый (в 1902 г.) разработал метод учета влияния сжимаемости воздуха.

ГЛАВА X

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 56. Гармоническое колебание

В повседневной жизни и в технике мы постоянно сталкиваемся с колебательным движением: маятник стенных часов совершает периодические качания около отвесного положения, кузов автомашины или вагона качается на мягких рессорах и т. д. Во многих случаях различным колебательным движениям присущ общий признак, заключающийся в существовании некоторого устойчивого положения, в котором колеблющееся тело пребывает до и после колебаний и в котором оно может находиться неопределенно долгое время — до тех пор, пока внешняя сила не выведет его из этого устойчивого состояния. Для маятника таким устойчивым положением является отвесное; для фундамента машины и подвешенного на рессорах вагона — положение, соответствующее некоторой постоянной деформации, обусловленной весом машины или вагона.

Всегда, когда выводят тело из устойчивого положения, возникает сила, стремящаяся возвратить тело в начальное положение. Происхождение этой силы может быть различным. Для маятника — это сила тяжести, для кузова вагона — упругость рессор.

Наличие возвращающей силы является еще недостаточным условием возникновения колебательного движения. В колебательном движении, помимо возвращающей силы, должен участвовать еще и другой фактор, не позволяющий колеблющемуся телу сразу же остановиться в той точке его пути, которая соответствует устойчивому состоянию. Этим фактором является инерция колеблющегося тела.

Колебательное движение имеет особенно простой характер в том случае, когда *возвращающаяся сила возрастает пропорционально смещению* колеблющегося тела из положения равновесия. Сначала мы рассмотрим этот случай чисто кинематически.

Представим себе точку M (рис. 126), движущуюся по кругу радиуса a с постоянной угловой скоростью ω, и рассмотрим движение *проекции* P этой точки на вертикальную ось. Пусть в момент

времени t радиус OM повернулся из начального положения OA на угол φ; тогда смещение x точки P, равное отрезку OP, определяется простым выражением:

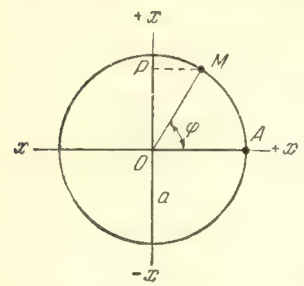


Рис. 126. При равномерном движении точки M по кругу ее проекция P совершает гармоническое колебание.

$$x = a\sin\varphi.$$

Угол φ называют *фазой колебания*[1]) точки P; зная угловую скорость[2])

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

(где T — время обхода точкой M полной окружности, а 2π — длина дуги полной окружности в угловых единицах), нетрудно найти фазу φ:

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T}t,$$

и, следовательно,

$$x = a\sin\omega t = a\sin\frac{2\pi}{T}t. \quad (1)$$

Рассматривая движение проекции точки M на горизонтальную ось, аналогично получаем:

$$x = a\cos\omega t = a\cos\frac{2\pi}{T}t. \quad (1')$$

Колебательный характер движения, выражаемого уравнениями (1) и (1′), становится особенно очевидным, когда они представлены, как это сделано на рис. 127, графически.

Колебательное движение, выражаемое функцией синуса или косинуса, называют простым гармоническим[3]) *колебанием*; оно полностью характеризуется следующими величинами:

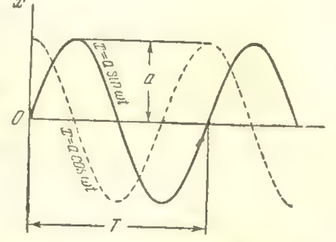


Рис. 127. a — амплитуда гармонического колебания, T — период.

1. Расстоянием (a) наибольшего отклонения от начального положения — *амплитудой*[4]).

2. *Периодом колебания* (T), т. е. временем, в течение которого колеблющаяся точка (или тело) совершает полный цикл колебательного движения, смещаясь сначала в одну, а затем в другую сторону от начального положения и снова возвращаясь к нему.

---

[1]) От греческого phasis — проявление.

[2]) В последующем (в применении к колебательному движению) мы будем, как это принято, называть величину ω не угловой скоростью, а угловой, или круговой, частотой.

[3]) От греческого harmoso — приводить в порядок.

[4]) От латинского amplitudo — широта.

Вместо периода колебания можно задать его *частоту* ν, определяемую *числом полных колебаний, совершаемых в течение* 1 *сек.* Единицу частоты — одно колебание в 1 сек.— называют *герц.* Очевидно, что период и частота являются относительно друг друга обратными величинами:

$$T = \frac{1}{\nu}, \quad \nu = \frac{1}{T}. \tag{2}$$

Угловая частота ω однозначно определяется периодом или частотой:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{3}$$

Очевидно, что ω означает *число полных колебаний, совершаемых в течение* 2π *секунд.*

Перейдем к рассмотрению сил, под действием которых может возникнуть простое гармоническое колебание. Для этого, воспользовавшись уравнением (1), найдем сначала скорость v и ускорение j гармонически колеблющейся точки:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega a \cos \omega t, \tag{4}$$

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 a \sin \omega t = -\omega^2 x. \tag{5}$$

Последнее выражение означает, что в каждый данный момент времени *ускорение* j *пропорционально смещению* x точки из начального положения; знак минус указывает, что ускорение всегда направлено противоположно смещению. Ускорение пропорционально вызывающей его силе и направлено в ту же сторону, что и сила; значит, сила, обусловливающая ускорение колеблющегося тела, направлена тоже в сторону, противоположную смещению, и пропорциональна величине смещения. Очевидно, что эта сила и есть сила, возвращающая точку к положению равновесия.

Умножая обе части уравнения (5) на массу m колеблющейся материальной точки, мы получим *дифференциальное уравнение простого гармонического колебания*:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx, \tag{6}$$

где

$$c = m\omega^2. \tag{6'}$$

Уравнение (6) имеет простой физический смысл: в левой его части стоит произведение массы колеблющейся точки на ее ускорение, чем и определяется согласно второму закону Ньютона действующая на точку возвращающая сила $-cx$. Таким образом, уравнение (6) выражает второй закон механики применительно к

случаю материальной точки, связанной с положением равновесия силой, пропорциональной смещению. Обратно, при наличии возвращающей силы, пропорциональной смещению тела, последнее будет совершать простое гармоническое колебание, выражаемое уравнениями (1) или (1′).

Теория гармонических колебаний играет в физике совершенно исключительную по своему значению роль. Учение о гармонических колебаниях используется во всех отделах физики: в теории упругости, в акустике, в оптике, в учении об электричестве, в кинетической теории материи, в теории атома. Чем объясняется эта универсальная применимость учения о гармонических колебаниях? Исключительная роль учения о гармонических колебаниях объясняется двумя обстоятельствами. Гармоническое колебание — это движение, вызванное силой, возрастающей пропорционально отклонению x от положения равновесия. Какова бы ни была в действительности зависимость силы от x, зависимость эта всегда может быть представлена в виде бесконечного ряда Тейлора; первым членом этого ряда является *квазиупругая сила* (т. е. сила, пропорциональная x), остальные члены ряда пропорциональны последовательно возрастающим степеням x. Если смещение x мало, старшими членами ряда можно пренебречь,— это случай гармонического колебания. При значительных отклонениях от положения равновесия нужно учитывать второй, третий и другие члены ряда (в этом случае колебания *ангармоничны*). По мере роста амплитуды колебательное движение обычно все более и более уклоняется от гармонического колебания. Но и в этом случае каждый раз, когда колеблющаяся система подходит к положению равновесия, поочередно отпадает влияние старших членов ряда Тейлора и близ положения равновесия движение определяется уже одной квазиупругой силой. Поэтому теория гармонических колебательных движений является первым и неизбежным шагом на пути к исследованию почти всех периодических процессов.

Второе обстоятельство, делающее теорию гармонических колебаний весьма важной для различных отделов физики, заключается в том, что многие колебательные системы при внешнем периодическом воздействии на них «отзываются» (резонируют) на гармонические колебания, частота которых близка к частоте собственных колебаний системы (§ 61).

§ 57. Энергия и собственная частота гармонических колебаний

По внешнему виду и по устройству *колебательные системы* (т. е. такие совокупности связанных между собой тел, которые способны к колебательному движению) крайне разнообразны. Рассмотрим простейшую колебательную систему: гирька с массой m подвешена на спиральной довольно жесткой пружине (рис. 128);

когда гирька выведена из положения равновесия, пружина действует на нее с силой F, пропорциональной смещению x и направленной в сторону, противоположную x:

$$F = -cx$$

(для упрощения мы пренебрегаем тем небольшим растяжением пружины, которое вызывается весом гирьки). Множитель пропорциональности c, определяющий величину силы, вызывающей смещение, равное единице, носит название *коэффициента возвращающей силы.*

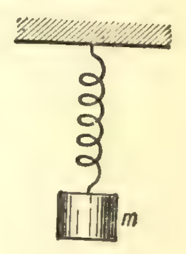


Рис. 128. Простейшая колебательная система.

Будучи выведена из положения равновесия, масса m начнет совершать около этого положения простое гармоническое колебание; если внутреннее трение и сопротивление воздуха отсутствуют, то эти колебания будут продолжаться неопределенно долго. Энергия, сообщенная системе при начальном толчке, будет периодически преобразовываться: потенциальная энергия упруго деформированной пружины будет переходить в кинетическую энергию движущейся гирьки и обратно. По закону сохранения энергии сумма кинетической и потенциальной энергии[1]) будет оставаться постоянной:

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} + \frac{cx^2}{2} = \text{const.}$$

В момент, когда гирька проходит через положение равновесия ($x = 0$), вся энергия системы есть энергия кинетическая, и скорость имеет максимальное значение $v_{\text{макс}}$; напротив, в любом из крайних положений ($x = \pm a$) энергия системы переходит полностью в потенциальную. Поэтому

$$\varepsilon = \frac{mv^2_{\text{макс}}}{2} = \frac{ca^2}{2}. \qquad (7)$$

Но максимальное значение скорости согласно уравнению (4) равно произведению угловой частоты колебания ω на амплитуду a:

$$v_{\text{макс}} = \omega a.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получим в согласии с уравнением (6′):

$$m\omega^2 = c.$$

---

[1]) По общей формуле, выведенной в § 41, потенциальная энергия упругого смещения (деформации) равна:

$$\frac{Fx}{2} = \frac{cx^2}{2}.$$

Отсюда определяем угловую частоту:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \tag{8}$$

т. е. *угловая частота гармонических колебаний равна корню квадратному из коэффициента возвращающей силы, разделенного на массу тела.*

Легко видеть, что весьма важная формула (8) получается также, если в дифференциальное уравнение колебательного движения $m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$ подставить $x = a\sin\omega t$ и вторую производную от x по t, т. е. $-\omega^2 a \sin\omega t$, а затем сократить обе части уравнения на $a\sin\omega t$, что дает: $m\omega^2 = c$.

Выражение (8) позволяет найти частоту и период колебания:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{9}$$

Для энергии колебания из выражений (7), (8) и (9) получаются нижеследующие формулы:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} m\omega^2 a^2, \\ \varepsilon &= 2\pi^2 m\nu^2 a^2, \end{aligned} \tag{10}$$

т. е. *энергия гармонического колебания пропорциональна квадрату амплитуды, квадрату частоты и массе колеблющегося тела.*

Рассмотрим в качестве примера простой маятник — небольшое тело массы m, подвешенное на нерастяжимой нити длиной l (рис. 129), причем будем предполагать, что смещения маятника настолько невелики, что их можно отсчитывать по перпендикуляру, опущенному из центра тяжести маятника на прямую, совпадающую с отвесным положением нити.

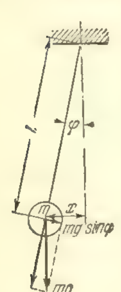


Рис. 129. К расчету периода колебаний математического маятника.

Возвращающей силой будет та слагающая силы тяжести mg (g — ускорение силы тяжести), которая перпендикулярна к нити и направлена к начальному отвесному положению; слагающая, направленная вдоль нити, уравновешивается реакцией нити. Из рис 129 видно, что интересующая нас слагающая веса маятника равна $mg\sin\varphi$, но так как $\sin\varphi = \frac{x}{l}$, то для возвращающей силы получается выражение $F = -\frac{mg}{l}x$, и, следовательно, коэффициент возвращающей силы равен $\frac{mg}{l}$.

Воспользовавшись общей формулой (9), находим период колебаний маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{11}$$

Формула (11) показывает, что *период колебания маятника не зависит от его массы.* Это обстоятельство может на первый взгляд показаться неожиданным. Однако, если вспомнить, что возвращающая сила, обусловленная весом маятника, пропорциональна его массе, то станет понятным, каким образом величина m исчезает из окончательного результата.

Выше мы рассматривали такие колебания, при которых колеблющееся тело движется по прямой линии. Но уже на примере маятника мы должны были бы, строго говоря, считаться с тем, что в данном случае центр тяжести массы m движется не по прямой, но по дуге круга радиуса l. Только ограничившись малыми колебаниями, мы могли заменить отрезок дуги отрезком прямой и отсчитывать смещения не вдоль дуги, а вдоль перпендикуляра, опущенного на отвесную прямую, проходящую через точку подвеса. При малых размахах маятника связанная с этим ошибка не превышает долей процента.

В целом ряде случаев, хотя бы, например, в случае маятника обычных карманных часов, колеблющееся тело совершает не поступательное, но в р а щ а т е л ь н о е движение. (К числу таких колебаний относятся так называемые «крутильные колебания».) Простейшая система, способная совершать колебания с вращательным движением,— это насаженный на ось диск, скрепленный с пружиной таким образом, что повороту диска препятствует возвращающая сила, обусловленная закручиванием пружины. Пусть I — момент инерции диска относительно оси, а M — момент возвращающей силы, который будем считать пропорциональным углу φ поворота диска: $M = D\varphi$. Для периода колебаний такой колебательной системы справедлива формула

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}, \tag{12}$$

аналогичная формуле (9), с той разницей, что место массы занял момент инерции, а место коэффициента возвращающей силы — коэффициент возвращающего момента. Формула (12) может быть получена путем рассуждений, не отличающихся от тех, с помощью которых была выведена формула (9).

Маятник, для которого верна формула (11), представляет собой точечную массу, подвешенную на невесомой нити. Однако действительный маятник (который мы в отличие от рассмотренного

выше «математического» маятника будем называть *физическим маятником*) представляет собой некоторое весомое тело, подвешенное в точке, не совпадающей с центром тяжести. Период колебаний физического маятника может быть найден с помощью формулы (12).

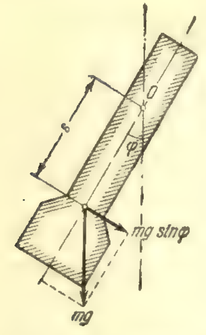


Рис. 130. К расчету периода колебаний физического маятника.

Обозначим по-прежнему через I момент инерции маятника относительно оси его вращения[1]), через D — коэффициент возвращающего момента. Пусть, далее, s означает расстояние центра тяжести тела от оси вращения (рис. 130). Возвращающая сила, возникающая при повороте маятника на угол φ, будет $mg \sin \varphi$, а момент ее $M = mg \sin \varphi \, s$. Если размахи маятника невелики, то можно положить $\sin \varphi = \varphi$, и тогда

$$M = D\varphi = mgs\varphi,$$
$$D = mgs.$$

Воспользовавшись теперь формулой (12), находим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}, \tag{13}$$

где $l' = \frac{I}{ms}$. Величину l' принято называть *приведенной длиной физического маятника.* Смысл этого термина заключается в том, что математический маятник, имеющий длину, равную приведенной длине физического маятника, будет иметь тот же самый период.

§ 58. Сложение колебаний одинаковой частоты и одинакового направления (интерференция колебаний)

Материальная точка может одновременно участвовать в нескольких гармонических колебаниях. Смещение точки в какой-либо момент времени определяется при этом геометрической (векторной) суммой смещений, которые точка получает, участвуя в каждом из колебательных движений в отдельности. Результирующее движение точки, одновременно участвующей в нескольких колебаниях, является сложным движением, однако в большинстве практически интересных случаев это результирующее движение также является колебательным. Таким образом, можно говорить о сложении нескольких колебаний в одно результирующее.

---

[1]) Напомним (§ 36), что если I_s есть момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр тяжести, то момент инерции относительно оси вращения O определяется уравнением

$$I = I_s + ms^2,$$

где s есть расстояние центра тяжести от оси вращения.

Рассмотрим несколько примеров подобного сложения колебаний.

Положим сначала, что речь идет о сложении двух колебательных движений, происходящих *в одном и том же направлении*, причем смещения, получаемые точкой в каждом из колебаний, складываются, очевидно, алгебраически. Положим, далее, что оба колебания происходят с одной и той же угловой частотой ω (т. е. *с одним и тем же периодом*), но с различными начальными фазами φ_1 и φ_2. В соответствии с формулами (1) и (3) напишем уравнения колебательных движений в следующем виде:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$
$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

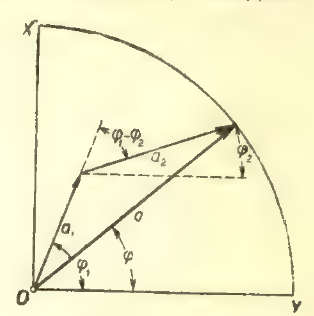


Рис. 131. Векторная диаграмма сложения двух колебаний одинаковой частоты.

Для вывода уравнений, определяющих результирующее колебание, совместим векторные диаграммы (рис. 126) двух рассматриваемых колебаний в одну диаграмму (рис. 131). Результирующее смещение $x = x_1 + x_2$ получается проектированием на вертикальный диаметр векторов-амплитуд $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, т. е. для любого момента времени оно равно проекции на ту же ось вектора $\boldsymbol{a}$, представляющего геометрическую сумму $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Таким образом, очевидно, что уравнение результирующего колебания имеет вид

$$x = x_1 + x_2 = a \sin(\omega t + \varphi), \tag{14}$$

где, как это следует из рис. 131,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}, \tag{15}$$

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{16}$$

Рассмотренный случай сложения гармонических колебаний одинаковой частоты и одинакового направления смещений называют *интерференцией колебаний.*

Энергия гармонического колебания, как мы видели [формула (10)], пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому энергия результирующего колебания только в том случае будет равна сумме энергий слагаемых колебаний, если

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Такое соотношение между амплитудой результирующего колебания и амплитудами слагаемых колебаний имеет место, как

показывает формула (16), только тогда, когда фазы слагаемых колебаний отличаются на величину $\frac{\pi}{2}$, или на $3\frac{\pi}{2}$, или вообще на величину $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, где n — нуль или какое-либо целое число.

Когда разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ или вообще $(2n+1)\pi$, то говорят, что колебания находятся в *противоположных фазах*. Действительно, в этом случае

$$|a| = |a_1 - a_2|.$$

Если фазы слагаемых колебаний противоположны и амплитуды равны ($a_1 = a_2$), то сложение колебаний приводит к покою ($a = 0$).

Когда разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ или вообще $2n\pi$, где n — любое целое число, то говорят, что колебания *совпадают по фазе*. В этом случае из формулы (16) следует, что

$$a = a_1 + a_2.$$

При совпадении фаз и равенстве амплитуд ($a_1 = a_2$) амплитуда результирующего колебания в два раза превышает амплитуду каждого из складываемых колебаний, и, следовательно, энергия результирующего колебания в четыре раза превышает энергию каждого из складываемых колебаний.

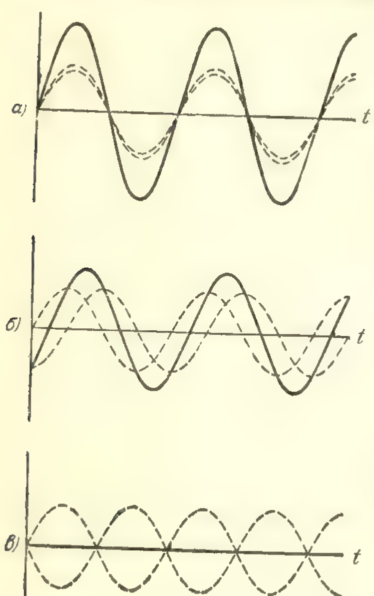


Рис. 132. Интерференция колебаний с одинаковыми амплитудами и с фазами: одинаковыми (*а*), разными (*б*) и противоположными (*в*).

На рис. 132 приведены три случая интерференции колебаний с одинаковой амплитудой, но с разными фазами (синусоида результирующего колебания построена посредством алгебраического суммирования ординат слагаемых синусоид).

§ 59. Другие случаи сложения колебаний

Когда складываемые колебания имеют *одинаковое направление, но неодинаковый период*, то результирующее колебание, вообще говоря, *не является гармоническим*.

Чтобы разобраться в том, какое результирующее движение в данном случае будет совершать материальная точка, обратимся снова к векторной диаграмме. Однако теперь вследствие неодинаковости частот слагаемых колебаний векторная диаграмма в том виде, как

она изображена на рис. 131, может быть применена только к начальному моменту времени $t=0$. Желая построить векторную диаграмму для какого-либо другого момента времени, мы должны заменить углы φ_1, φ_2 и φ углами $\omega_1 t+\varphi_1$, $\omega_2 t+\varphi_2$ и $\omega t+\varphi$. Так как в данном случае $\omega_1 \neq \omega_2$, то угол между векторами, изображающими амплитуды слагаемых колебаний, а именно угол $(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)$, будет представлять собой величину, изменяющуюся со временем. Следовательно, если бы мы пожелали представить результирующее колебание в виде функции

$$x=x_1+x_2=a\sin(\omega t+\varphi),$$

то мы должны были бы считать «амплитуду» a и «начальную фазу» φ величинами, изменяющимися со временем (рис. 133). Как изменяются со временем величины a и φ, об этом можно составить себе представление, если вообразить, что векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ вращаются вокруг начала координат с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 (угол между этими векторами будет изменяться со скоростью $\omega_1-\omega_2$).

Рис. 133. При сложении двух гармонических колебаний неодинаковой частоты «амплитуда» и «начальная фаза» результирующего колебания изменяются со временем, что указывает на то, что результирующее колебание не является гармоническим.

Весьма важными являются два частных случая: сложение колебаний с кратными периодами и сложение колебаний, периоды которых разнятся весьма мало.

Сложение колебаний с кратными периодами. Всякое колебание характеризуется прежде всего *формой* колебания; под формой колебания подразумевают зависимость между смещением x и временем t, представленную графически, как это сделано, например, на рис. 127 и 132. Нетрудно убедиться в том, что сложение гармонических колебаний (синусоидальных и косинусоидальных) дает результирующее колебание, ф о р м а которого существенно зависит от соотношения периодов и фаз слагаемых колебаний. Простейший способ определения формы результирующего колебания состоит в том, что на графике (x, t) мы алгебраически складываем ординаты кривых, изображающих слагаемые колебания. На рис. 134 утолщенной линией показана форма колебаний, получаемая при сложении двух синусоидальных колебаний, периоды которых относятся, как 1 к 2.

По теореме, доказанной Фурье, *колебание любой формы с периодом T можно представить как сумму гармонических колебаний с периодами* T, $T/2$, $T/3$, $T/4$ и т. д. Такое разложение произвольной

периодической функции на синусоидальные функции называют *гармоническим анализом*. На рис. 135 показано разложение периодической функции треугольной формы на четыре синусоиды с периодами T, $T/3$, $T/5$ и $T/7$. Зная форму периодической функции

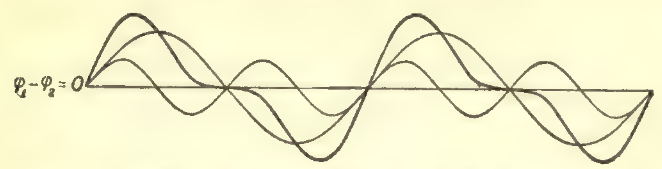


Рис. 134. Форма результирующего колебания при отношении периодов $T_1 : T_2 = 1:2$.

$x = f(t)$, по методу, разработанному Фурье, всегда можно вычислить амплитуды и фазы синусоид, суммированием которых может быть получена данная функция (метод Фурье излагается в курсах анализа).

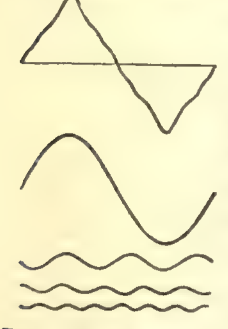


Рис. 135. Разложение треугольной кривой на четыре синусоиды.

Сложение колебаний с близкими периодами (биения). Когда частоты слагаемых колебаний ω_1 и ω_2 мало различаются, то в некоторые промежутки времени колебания оказываются почти совпадающими по фазе и в это время они «усиливают друг друга». В другие промежутки времени колебания оказываются почти противоположными по фазе и тогда они «гасят друг друга». Такие усиления и ослабления результирующего колебания, чередуясь, следуют друг за другом с частотой, равной разности частот слагаемых колебаний. Это явление носит название *биений*. На рис. 136 показано возникновение биений при сложении двух гармонических колебаний одинаковой амплитуды с отношением периодов 7 к 6.

Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний. Участвуя одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебательных движениях одинакового периода, точка совершает результирующее движение по эллиптической траектории. Вид этого эллипса зависит от разности фаз колебаний; в частных случаях эллипс может выродиться в прямую линию (рис. 137).

Если разность фаз равна $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, причем амплитуды колебаний равны друг другу ($a_1=a_2=a$), то результирующее движение происходит по окружности.

Гораздо более сложные траектории получаются в тех случаях, когда периоды складывающихся колебаний неодинаковы. В зависимости от соотношения периодов, амплитуд и начальных фаз склады-

вающихся колебаний траектории результирующего движения принимают вид замысловатых кривых, известных под названием *фигур*

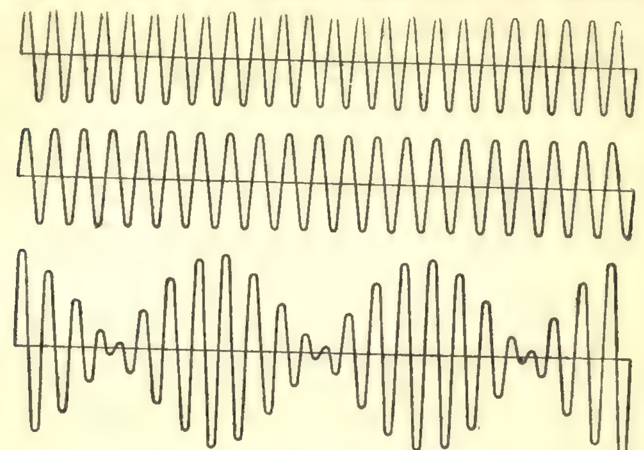


Рис. 136. Биения; нижняя кривая представляет собой результат сложения двух верхних кривых.

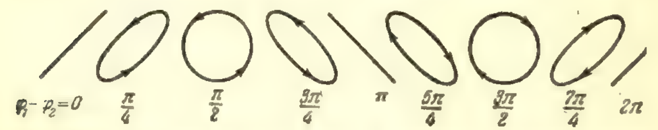


Рис. 137. Влияние разности фаз на результирующую траекторию при сложении взаимно перпендикулярных колебаний одинакового периода и равных амплитуд.

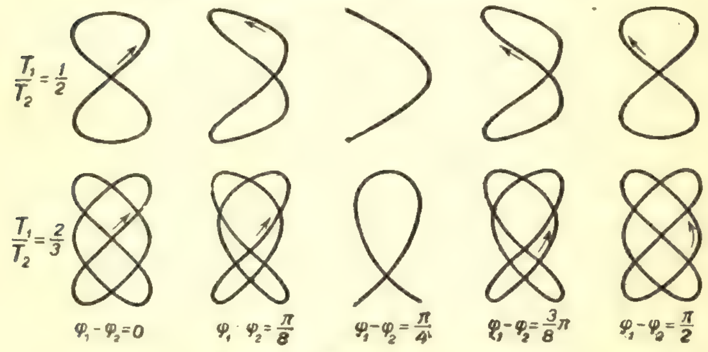


Рис. 138. Фигуры Лиссажу.

Лиссажу (в честь изучавшего их французского физика). На рис. 138 показаны некоторые из этих фигур. Лиссажу демонстрировал сложение колебаний посредством светового «зайчика», отраженного

от ножек двух колеблющихся камертонов. Этот способ демонстрации сложения колебаний пояснен рисунками 139 и 140 (если бы в случае,

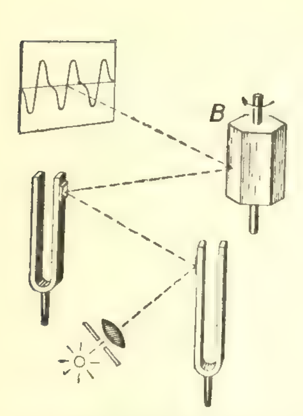


Рис. 139. Демонстрация сложения колебаний одинакового направления.

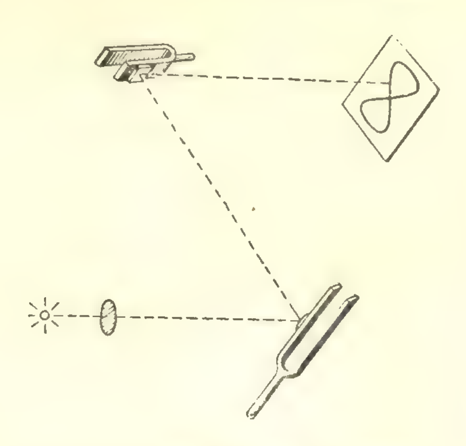


Рис. 140. Демонстрация сложения взаимно перпендикулярных колебаний

изображенном на рис. 139, мы убрали вращающееся шестигранное зеркало B и на его место поставили экран, то могли бы наблюдать «результирующую траекторию» в виде вертикальной полоски).

§ 60. Затухающие колебания

Вследствие сопротивлений движению колебательная система непрерывно отдает часть энергии среде. Энергия пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому при убывании энергии уменьшается и амплитуда колебаний. Очевидно, что закон убывания амплитуды определяется быстротой расхода энергии системой.

Колебательная система может расходовать свою энергию двумя путями: вследствие *трения* и вследствие *излучения*, т. е. отдачи энергии во внешнюю среду в форме волн.

В большинстве случаев налицо имеются оба источника потерь. Затрата энергии на излучение обычно есть полезный расход (назначение целого ряда колебательных систем); отдача энергии вследствие трения является непроизводительной потерей.

Чтобы поддерживать колебания системы длительное время, нужно подводить к ней энергию извне; при этом амплитуда искусственно поддерживаемых колебаний принимает такое значение, при котором приход энергии компенсирует ее расход, и система с точки зрения ее энергетического баланса работает без прибыли и убытка.

В большинстве технически интересных случаев расход энергии обусловлен наличием *сопротивления, величина которого пропор-*

циональна скорости колеблющейся массы: $R = -r\frac{dx}{dt}$, где знак минус означает, что сопротивление R уменьшает скорость движения, а величина $r = \text{const}$ представляет собой *коэффициент сопротивления.* Таково, например, сопротивление вязкого трения, а также и сопротивление излучения, обусловленное реакцией среды, окружающей колебательную систему. При наличии такого сопротивления дифференциальное уравнение колебаний будет иметь более сложный вид, нежели уравнение (6). Очевидно, что в данном случае ускорение колеблющейся точки определяется в каждый момент времени не только возвращающей силой $-cx$, но еще и сопротивлением $-r\frac{dx}{dt}$. Приравняв произведение массы точки на ее ускорение сумме действующих на точку сил, получим дифференциальное уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - cx. \quad (17)$$

Этому уравнению уже не удовлетворяет формула простого гармонического колебания, характеризующегося, как мы знаем, постоянством амплитуды. Напротив, вследствие расхода энергии амплитуда колебаний должна с течением времени убывать. Колебания с убывающей амплитудой называются *затухающими.* Таким образом, уравнение (17) есть дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

Формулу затухающих колебаний найдем, сделав предположение, что амплитуда колебаний убывает тем медленнее, чем меньше она становится. Это предположение означает, что скорость изменения амплитуды $\frac{da}{dt}$ пропорциональна величине самой амплитуды, т. е.

$$\frac{da}{dt} = -\alpha a$$

(знак минус показывает, что изменение амплитуды происходит в сторону ее уменьшения). Разделяя переменные, находим:

$$\frac{da}{a} = -\alpha\, dt,$$

или, интегрируя:

$$\ln a = -\alpha t + C.$$

Полагая $C = \ln a_0$, получаем:

$$a = a_0 e^{-\alpha t}.$$

Здесь $e = 2{,}71\ldots$ есть основание натуральных логарифмов, а a_0 — амплитуда в начальный момент времени ($t = 0$). Величина α называется *коэффициентом затухания.* Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид

$$x = a_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t. \quad (18)$$

Путем подстановки функции (18) и ее производных по времени в дифференциальное уравнение (17) можно найти значения коэффициента затухания α и угловой частоты ω:

$$\alpha = \frac{r}{2m}, \tag{19}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \tag{20}$$

График уравнения (18) показан на рис. 141.

Как видно из формулы (20), частота колебаний при наличии затухания уменьшается. Однако в большинстве практических случаев это уменьшение очень невелико.

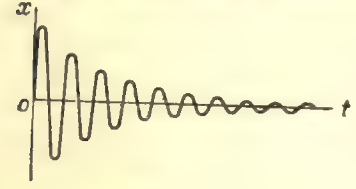


Рис. 141.

Из формулы, выражающей закон убывания амплитуды колебаний, можно убедиться, что отношение амплитуд, отделенных друг от друга интервалом в один период (T), остается постоянным в течение всего процесса затухания. Действительно, амплитуды колебаний, отделенные интервалом в один период, выражаются так:

$$a_1 = a_0 e^{-\alpha t}, \quad a_2 = a_0 e^{-\alpha (t+T)}.$$

Отношение этих амплитуд равно:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_0 e^{-\alpha t}}{a_0 e^{-\alpha (t+T)}} = \frac{1}{e^{-\alpha T}} = e^{\alpha T}.$$

В качестве меры затухания часто берут величину натурального логарифма ϑ этого отношения:

$$\vartheta = \alpha T. \tag{21}$$

Эта безразмерная величина носит название *декремента* затухания.

Часто рассматривают также так называемую *добротность* Q колебательной системы, которую определяют как отношение $\frac{\omega_0}{2\alpha}$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$. При малых декрементах добротность — величина, обратная декременту, а именно $Q \approx \frac{\pi}{\vartheta}$. При больших декрементах соотношение между Q и ϑ получается из (19) и (20):

$$Q^2 = \left(\frac{\pi}{\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

§ 61. Вынужденные колебания. Резонанс

Система, однажды возбужденная начальным толчком и затем предоставленная самой себе, совершает, как мы видели выше, затухающие колебания с некоторой определенной частотой, зависящей только от свойств самой системы: от ее массы, возвращающей силы и сопротивления. Эти колебания называют *свободными*, а их частоту — частотой свободных колебаний. Свободные колебания в случае отсутствия затухания называют *собственными колебаниями*, а их частоту — *собственной частотой*. Так, например, струна рояля, возбужденная при нажатии клавиши ударом молоточка, совершает собственные колебания, издавая при этом звук, который мы называем собственным тоном струны, пренебрегая небольшим затуханием.

Однако в целом ряде случаев дело обстоит иначе: система совершает свои колебания под действием некоторой в н е ш н е й силы, работа которой периодически возмещает потерю энергии на трение и излучение; при этом частота колебаний зависит, очевидно, не от свойств самой системы, но от частоты изменений силы, под действием которой система совершает свои колебания. В этом случае мы имеем дело уже не со свободными, а с *вынужденными колебаниями*,— с колебаниями, навязанными нашей системе действием внешних сил.

Системой, совершающей вынужденные колебания, является, например, фундамент поршневой машины. Под действием периодических сил, возникающих при прямолинейно-возвратном движении больших масс, фундамент машины дрожит и вибрирует с частотой, которая равна числу оборотов главного вала, иными словами, частоте колебаний поршней. Точно так же мембрана громкоговорителя, связанная с электромагнитным механизмом, совершает вынужденные колебания с частотой, определяющейся числом периодов переменного тока, пропускаемого через катушку электромагнита.

Приложенная к системе внешняя периодическая сила выполняет двоякого рода задачу: с одной стороны, она должна раскачать систему, сообщить ей известный запас энергии; с другой стороны, работа этой силы пополняет расходуемую энергию, поддерживая, таким образом, колебательное движение.

Система, управляемая внешней силой, совершает свои колебания с той частотой, с которой эта внешняя сила действует. Однако вынужденные колебания с навязанной частотой устанавливаются не сразу. В первый момент система получает некоторый толчок (или начальное отклонение), который заставляет систему совершать, помимо вынужденных, еще и свободные колебания. Таким образом, по крайней мере в начальной стадии процесса система совершает свободные колебания, на которые накладываются колебания вынужденные. Если множитель затухания невелик, то частота свободных

колебаний ω_0 может быть рассчитана по формуле (8):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

и уравнение свободных колебаний будет иметь вид

$$x_1 = a_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

Предположим, что внешняя сила меняется во времени по закону синуса с угловой частотой ω:

$$P = P_0 \sin \omega t;$$

тогда уравнение вынужденных колебаний будет:

$$x_2 = A \sin (\omega t - \psi). \qquad (22)$$

Величина ψ указывает на то, что *колебания системы будут следовать за колебаниями силы с некоторым запозданием*, т. е. между ними будет существовать разность фаз ψ. Так как с течением времени амплитуда свободных колебаний убывает, то через некоторый непродолжительный промежуток времени (называемый периодом установления режима) свободные колебания практически прекратятся вовсе и останутся лишь колебания вынужденные, определяемые уравнением (22).

От чего зависит амплитуда A вынужденных колебаний? Почему колебательное движение отстает по фазе от вызывающей его силы и как велика разность фаз ψ?

Чтобы ответить на эти вопросы, присмотримся ближе к возникновению колебательного движения под действием периодической вынуждающей силы.

Пусть в начальный момент времени колебательная система находится в покое и вынуждающая сила P равна нулю. С этого момента сила начинает действовать, совершая положительную работу и отводя колеблющуюся массу все дальше и дальше от устойчивого положения. По прошествии некоторого промежутка времени, равного четверти периода изменения силы, смещение и приложенная к системе внешняя сила достигают максимума. Теперь внешняя сила начинает убывать по величине; в то же время возвращающая сила тянет массу назад к устойчивому положению. Если бы внешней силы не было, то через промежуток времени, равный четверти собственного периода системы, масса вновь возвратилась бы к начальному положению. Но в действительности сила, хотя и убывая, продолжает действовать, только теперь она тормозит движение массы, т. е. совершает отрицательную работу. При этом движение колеблющейся массы замедляется, колебания системы начинают отставать от колебаний силы, или, иначе говоря, *сила опережает* смещение.

Обратимся теперь к одному весьма замечательному частному случаю: допустим, что *частота изменений силы* ω *совпадает с собственной частотой системы* ω_0, причем в некоторый момент времени сила опережает смещение как раз на четверть периода. Для конкретизации наших рассуждений предположим, что колебательное движение происходит вдоль горизонтальной линии и что в рассматриваемый момент времени колеблющаяся масса находится в крайнем левом положении. Если *сила опережает смещение на четверть периода*, то в этот момент она только что прошла через нуль и действует вправо, толкая массу к устойчивому положению и способствуя возвращающей силе. При прохождении массы через нулевое положение внешняя сила достигает максимума и затем начинает убывать по величине, сохраняя, однако, свое направление и, значит, способствуя дальнейшему движению массы в крайнее правое положение. Когда масса дойдет до этого крайнего положения, тогда сила вновь обратится в нуль, а затем, способствуя возвращающей силе, начнет толкать массу обратно. Поскольку частоты ω и ω_0 совпадают, постольку опережение на четверть периода, однажды установившись, будет существовать и дальше, значит, работа внешней силы в рассматриваемом случае будет всегда положительной. Следовательно, в этом случае приток энергии к системе будет максимальным, и, стало быть, амплитуда колебаний примет наибольшее возможное для нее при данных условиях значение. Этот случай носит название *резонанса* [1]); условием резонанса является, очевидно, совпадение собственной и навязанной частот.

Если частоты ω и ω_0 не совпадают, то в некоторой части периода вынужденных колебаний работа силы будет отрицательной; следовательно, система будет снабжаться энергией в меньшем количестве и амплитуда колебаний соответственно уменьшится. При этом сила будет опережать смещение уже не на четверть периода, а на какую-то иную величину, либо бо́льшую, либо меньшую четверти периода силы.

Конечно, каково бы ни было соотношение между собственной частотой и навязанной, возрастание амплитуды колебаний ограничено тем, что при увеличении ее увеличивается и скорость колебательного движения; с увеличением скорости растет и сопротивление (R), а значит, с возрастанием амплитуды колебательная система начинает интенсивнее расходовать энергию. Таким образом, амплитуда совершенно автоматически принимает каждый раз такое значение, при котором прибыль энергии как раз компенсирует ее расход на трение или излучение.

Теперь математически определим величину амплитуды вынужденных колебаний.

---

[1]) От латинского resone — о т к л и к а ю с ь.

Для простоты предположим сначала, что *затухание отсутствует* ($\alpha = 0$). Тогда на систему действуют две силы: возвращающая сила $F = -cx$, внешняя сила $P = P_0 \sin \omega t$.

Приравнивая сумму этих сил произведению колеблющейся массы на ее ускорение, которое, как это вытекает из двукратного дифференцирования функции (22), равно $-\omega^2 x$, получаем уравнение

$$-m\omega^2 x = P_0 \sin \omega t - cx,$$

откуда

$$x = \frac{P_0}{c - m\omega^2} \sin \omega t,$$

или, разделив числитель и знаменатель на m:

$$x = \frac{\frac{P_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \tag{23}$$

$\left(\text{так как } \frac{c}{m} = \omega_0^2\right)$. Выражение (23) показывает, что амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{\frac{P_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{23'}$$

зависит от разности собственной и вынужденной частот; если ω приближается к ω_0, то амплитуда безгранично возрастает, так как при отсутствии затухания энергия системы в случае резонанса ($\omega = \omega_0$) непрерывно возрастает. Само собой понятно, что практически амплитуда не может безгранично увеличиваться, ибо всякая реальная колебательная система всегда имеет некоторое затухание.

Аналогичный расчет, произведенный *с учетом затухания, пропорционального скорости*, приводит к несколько более сложному выражению для амплитуды вынужденных колебаний, из которого формула (23') получается как частный случай:

$$A = \frac{\frac{P_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}. \tag{24}$$

При резонансе амплитуда вынужденных колебаний достигает наибольшей величины. Стало быть, резонанс наступает при той частоте колебаний вынуждающей силы (при $\omega = \omega_{рез}$), для которой знаменатель формулы (24) минимален. Для вычисления этой резонансной частоты приравниваем нулю производную от выражения, стоящего под знаком радикала в знаменателе формулы (24); получаем:

$$2(\omega_0^2 - \omega_{рез}^2) \cdot 2\omega_{рез} + 8\alpha^2\omega_{рез} = 0$$

или

$$(\omega_0^2 - \omega_{рез}^2) + 2\alpha^2 = 0,$$

откуда

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}, \tag{24'}$$

тогда как частота с в о б о д н ы х колебаний по формулам (19) и (20)

$$\omega_{своб} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Мы видим, таким образом, что *при наличии затухания резонанс наступает при такой частоте вынужденных колебаний, которая меньше собственной частоты и частоты свободных колебаний*. Разности между этими тремя частотами тем меньше, чем меньше затухание.

Для определения резонансной амплитуды подставляем значение резонансной частоты по формуле (24') в формулу (24). Это дает:

$$A_{рез} = \frac{\frac{P_0}{m}}{2\alpha \cdot \omega_{своб}}, \tag{24''}$$

где $\omega_{своб}$ — частота свободных колебаний.

Из рис. 142 видно, каким образом амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения навязанной и собственной частот; различные кривые на этом рисунке соответствуют различным значениям множителя затухания α. Мы видим, что чем меньше затухание, тем больше увеличивается амплитуда по мере приближения к резонансу.

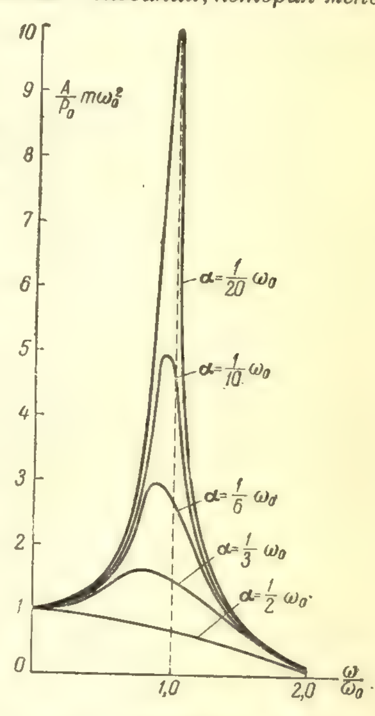


Рис. 142. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний по формуле (24) от частоты и затухания.

В ряде случаев резонанс может стать опасным явлением, влекущим за собой разрушение колебательной системы вследствие чрезмерного возрастания амплитуды.

Еще в первые годы развития быстроходных машин было установлено, что неспокойный ход валов, угрожающий целости вала, наблюдается при определенном числе оборотов. Именно это обстоятельство и дало повод искать причину происходивших поломок валов в явлении резонанса. Понятие о *критической скорости вращения* или о *критическом числе оборотов* было найдено первоначально опытным

путем и только впоследствии в процессе развития машиностроения получило качественное и количественное истолкование.

Чтобы понять, каким образом возникают резонансные колебания вращающихся валов, представим себе ротор (вращающуюся часть) турбины в виде оси с насаженным на нее диском. Как бы точно ни был изготовлен диск, как бы хорошо ни был он центрирован на оси, неизбежные погрешности в обработке могут привести к тому, что ось вращения не будет проходить через центр тяжести диска. Таким образом, в огромном большинстве случаев насаженный на вал диск будет обладать некоторым «весовым» *эксцентриситетом* [1]), который может быть определен как расстояние e между центром тяжести диска и осью вращения Очевидно, что при вращении диска этот эксцентриситет вызовет появление центробежной силы, которая будет стремиться изогнуть вал. Таким образом, диск будет вращаться, как это схематически показано на рис. 143, вокруг изогнутой оси.

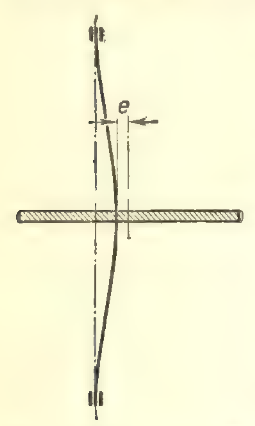


Рис. 143. «Весовой» эксцентриситет плохо центрированного диска.

Во время вращения вала центробежная сила периодически меняет свое направление относительно оси вала и, таким образом, действует как колебательная нагрузка. При некотором определенном числе оборотов, которое называют критическим, частота изменения направления силы совпадает с собственной частотой колебаний вала, и резонансное возрастание амплитуды может повлечь за собой разрушение машины.

Однако современные паровые *турбины работают при таком числе оборотов вала в минуту, которое в несколько раз превышает критическую скорость вращения* [2]). Уже после того как подобная турбина была построена выяснилось, что быстрый переход за пределы критической скорости,— настолько быстрый, чтобы вал *не успел раскачаться*,— гарантирует при дальнейшем возрастании скорости от опасности аварии Это объясняется тем, что за пределами критической скорости уже больше не имеет места явление резонанса. Центр тяжести эксцентрично насаженного на вал колеса сам отыскивает геометрическую ось вращения и устойчиво удерживается на этой оси; вал вращается в несколько изогнутом виде.

§ 62. Связанные колебания

Между колебательными системами может быть установлена «связь», приводящая колебания систем к некоторому согласованию друг с другом. В этом случае колебания называют *связанными*. Примером могут служить колебания двух маятников, изображенных на рис. 144; каждый из показанных здесь маятников представляет собой гирю, подвешенную на нити; нити обоих маятников скреплены с концами третьей нити, посредине которой подвешен не-

---

[1]) От латинского ex — в н е и centrum — с р е д о т о ч и е, ц е н т р.

[2]) Экономический к. п. д. турбины достигает максимума тогда, когда окружная скорость вращения колеса турбины составляет $^1/_2$ скорости струи пара или воды (§ 50). Скорость падающей воды даже при значительном напоре сравнительно невелика, но скорость выхода пара под давлением в 15—20 *ат* составляет примерно 1 *км/сек*, т. е. превышает скорость полета пули. Желая сконструировать турбину с удовлетворительным к. п. д., Лаваль ввел в технику скорость вращения до 20 000 оборотов вала в 1 мин.

большой грузик. Если один из двух указанных маятников мы выведем из положения равновесия и дадим ему возможность колебаться, то и другой маятник вскоре начнет колебаться.

Замечательным и общим свойством связанных систем является то, что *вследствие связи частоты колебаний связанных систем становятся несколько отличными от тех частот, которые каждая из систем имела бы, если бы связь между ними отсутствовала*, причем колебание к а ж д о й из двух связанных систем представляет собой результат сложения двух колебаний с разными частотами, вследствие чего *колебание каждой из двух связанных систем имеет характер биений*. Эти биения имеют при прочих равных условиях тем меньший период, чем «сильнее» связь.

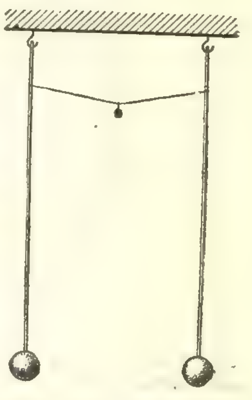


Рис. 144. Связанные маятники.

Если, не будучи связаны, системы имеют собственные частоты ν_1 и ν_2, то после установления связи первая система будет испытывать колебательное движение, представляющее собой результат сложения двух колебаний с частотами ν_1' и ν_2', и аналогичное движение, представляющее собой результат сложения двух колебаний с теми же частотами ν_1' и ν_2', будет испытывать и вторая система. Эти общие для обеих связанных систем частоты колебаний ν_1' и ν_2' называют *нормальными частотами* связанных колебаний. Меньшая из частот связанных колебаний всегда меньше обеих собственных частот; бóльшая из частот связанных колебаний всегда больше обеих собственных частот. Таким образом,

$$|\nu_1' - \nu_2'| > |\nu_1 - \nu_2|$$

(прямые скобки здесь означают, что берутся арифметические, а не алгебраические значения разности частот).

Все сказанное справедливо и для того случая, *когда собственные частоты систем одинаковы. Будучи связана, каждая из таких систем испытывает колебание, представляющее собой результат сложения двух колебаний с частотами, из которых одна меньше, другая больше собственной частоты.* Колебание каждой из этих систем будет иметь характер биения, причем вследствие резонансного взаимодействия биения первой системы будут опережать биения второй системы на четверть периода биений (рис. 145). Вследствие этого энергия колебаний будет как бы «перекачиваться» из первой системы во вторую и обратно с частотой биений.

Так, например, в случае маятников, изображенных на рис. 144, если гири и длины нитей этих маятников взять одинаковыми (чтобы их собственные частоты были равны), можно наблюдать, как качания первого маятника, возбудив качания второго маятника, начинают замирать, причем первый маятник останавливается, когда амплитуда второго достигает максимума, после этого второй маятник начинает раскачивать первый и т. д. Если для этого опыта взять гири массой по 1 *кг* и подвесить их на нитях длиной по 2 *м* на расстоянии 0,5 *м* друг от

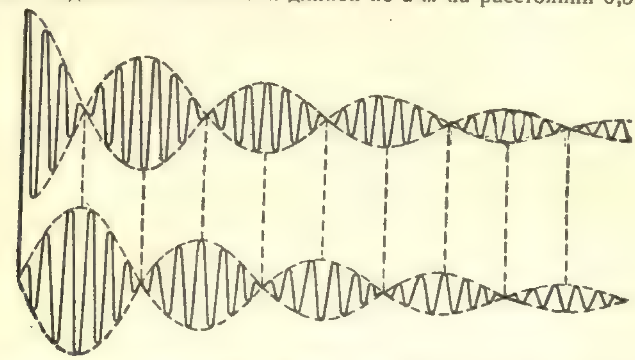


Рис. 145. График колебаний двух связанных систем с одинаковыми собственными частотами.

друга и связать их нитью в 0,7 *м* с грузиком в 50 *г* посредине, то первый маятник отдаст всю энергию второму маятнику и сам остановится приблизительно через 10 качаний, после чего через новых 10 качаний второй маятник передаст всю энергию первому маятнику и т. д. Если заменить грузик, связывающий маятники, гирькой в два раза большей массы (100 *г*), то полная передача энергии будет осуществляться через каждые пять качаний.

ГЛАВА XI

УЧЕНИЕ О ВОЛНАХ

§ 63. Волновой процесс. Уравнение волн. Виды волн

Колебательная система может отдавать энергию во внешнюю среду. Эта передача энергии становится возможной благодаря тому, что вследствие упругости среды отдельные небольшие участки ее сами представляют собой миниатюрные колебательные системы.

Если в результате смещения частиц среды (например, воздуха, воды или другого вещества) в каком-либо месте среды нарушено равновесное значение ее плотности, то силы, действующие со стороны окружающих частиц, заставят смещенные частицы двигаться обратно, т. е. силы упругости будут стремиться восстановить нарушенное равновесие, однако по инерции частицы среды пройдут это положение равновесия и сместятся в противоположную сторону. При таком движении частицы, соседние с колеблющимися, также будут испытывать действие смещающих сил, отклоняясь от устойчивого положения равновесия. Следовательно, *каждое возмущение, однажды возникнув в определенном участке среды, будет постепенно распространяться*, захватывая частицы, все дальше и дальше отстоящие от места начального возмущения.

Находясь в какой-либо среде, колебательная система взаимодействует с непосредственно прилегающими к ней частицами. Совершая свои колебания, она создает вокруг себя периодический ряд возмущений, т. е. действует на прилегающие частицы как некоторая периодическая внешняя среда. Эта сила заставляет частицы среды совершать колебания с частотой вынуждающей силы, причем колебательный процесс благодаря взаимодействию частиц будет распространяться в среде с некоторой определенной, характерной для свойств этой среды скоростью.

Очевидно, что частица среды, находящаяся на расстоянии y от места начального возмущения, начнет колебаться только тогда, когда до нее дойдет распространяющийся в среде колебательный процесс.

Обозначим *скорость распространения колебательного процесса* через u. Колебательный процесс дойдет до рассматриваемой

нами частицы через промежуток времени

$$\tau = \frac{y}{u}.$$

Если колебания системы выражаются уравнением

$$x = a \sin \omega t,$$

то колебания рассматриваемой нами частицы будут происходить по такому же синусоидальному закону, но с запозданием на отрезок времени τ; таким образом, мы можем написать для частицы уравнение

$$x' = A \sin \omega (t - \tau) = A \sin \omega \left(t - \frac{y}{u}\right). \qquad (1)$$

Это уравнение определяет смещение частицы x' в функции от времени и от расстояния до начальной точки. Если, однако, одно-

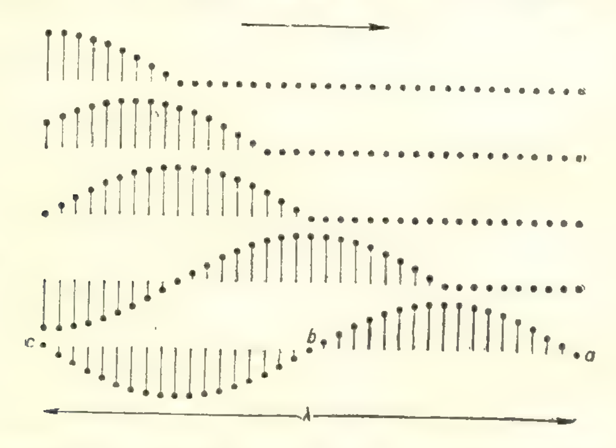


Рис. 146. Смещения частиц среды при распространении поперечных колебаний для пяти различных моментов времени.

временно рассматривать точки, лежащие на одной прямой, проходящей через начальную точку, то, задавая для y различные значения, мы можем выяснить посредством уравнения (1) распределение смещений вдоль выбранной нами прямой. В этом случае x' мы рассматриваем как функцию от одного только y (при $t = \text{const}$). Рис. 146 поясняет, как начинается и происходит передача колебательного движения в среде, когда частицы среды колеблются перпендикулярно к направлению передачи движения. Мы видим, что этот процесс периодичен не только во времени, но и в пространстве. По сходству явления с одним из его частных случаев (именно

с волнами на поверхности воды) этот процесс называют *волновым*, а распространяющееся в среде периодическое (или хотя бы мгновенное) возмущение — *волной*. Уравнение (1) есть *уравнение волн*, распространяющихся в положительном направлении оси x.

Чтобы с большей ясностью показать, что уравнение (1) выражает процесс, периодичный и во времени и в пространстве («волны»), мы можем поступить следующим образом.

Рассматривая сначала течение процесса в некоторой определенной точке среды ($y = \text{const}$), мы можем представить себе начало координат именно в этой точке; тогда $y = 0$ и уравнение (1) принимает вид

$$x' = A \sin \omega t.$$

Это уравнение есть уравнение колебаний выбранной нами частицы среды; оно определяет периодичность волнового процесса во времени.

Интересуясь распределением смещений в пространстве в некоторый определенный момент времени ($t = \text{const}$), мы можем выбрать именно этот момент за начальный, т. е. положить $t = 0$; тогда

$$x' = A \sin \omega \frac{y}{u} = A \sin \frac{2\pi}{uT} y.$$

Введя величину λ, определяемую равенством

$$\lambda = uT, \tag{2}$$

перепишем уравнение в следующем виде:

$$x' = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} y.$$

Последнее уравнение выражает пространственную периодичность процесса. Введенная в него величина λ имеет простой физический смысл. Так как T есть период колебаний, а u — скорость их распространения, то произведение uT определяет, очевидно, расстояние, на которое распространяется колебательный процесс за время одного периода. Следовательно, две частицы, отделенные друг от друга интервалом $\lambda = uT$, колеблются с одной и той же фазой; каждая из них проходит через нулевое положение одновременно с другой. Величину λ называют *длиной волны*.

Важно уяснить себе, что частицы среды не увлекаются движущейся волной; они совершают лишь колебательные движения около положения равновесия. Щепка, брошенная на поверхность непроточной воды, лишь колеблется вверх и вниз, оставаясь в одном и том же месте поверхности. Скорость волны u не есть скорость движения материальных частиц,— это есть скорость распространения импульса, вызывающего смещение частиц.

На первый взгляд может показаться неясным, почему *волна распространяется только в одном направлении*, а не в двух противоположных направлениях. Чтобы разобраться в причинах одностороннего распространения единичной волны, снова обратимся к рис. 146. На этом рисунке изображены смещения точек некоторого участка среды в различные моменты времени. Если бы мы сместили частицы среды так, как это показано в нижней строчке рис. 146, и если бы при этом в начальный момент все смещенные частицы были в покое, а потом мы предоставили бы им возможность двигаться к положениям равновесия, то такая деформация среды стала бы волнообразно распространяться и вправо и влево. В *проходящей* («бегущей») волне дело обстоит, однако, иначе: здесь все смещенные частицы, кроме тех, которые находятся в крайнем отклонении, в любой рассматриваемый момент времени имеют некоторую скорость движения к положениям равновесия или от положений равновесия. Частица a, находящаяся перед волной, была в покое и смещением находящихся перед нею частиц будет увлечена кверху. В середине волны частица b, двигаясь сверху вниз, подошла в рассматриваемый момент времени к положению равновесия и будет двигаться по инерции вниз (воздействие на частицу b смежных частиц взаимно компенсируется, так как передние тянут ее вверх, а задние — с той же силой вниз). Что же касается частицы c, находящейся в конце волны, то ее скорость направлена противоположно воздействию смежных частиц. Действительно, частица c была отклонена вниз и перед рассматриваемым моментом двигалась вверх, преодолевая воздействие смежных частиц, которые стремились оттянуть ее вниз. Вследствие этого частица c подойдет в рассматриваемый момент к положению равновесия, утратив скорость движения, и в дальнейшем будет оставаться в покое, если вслед за первой волной не идут другие волны.

Вид волн, распространяющихся в среде, существенно зависит от упругих свойств среды. Чтобы уяснить себе характер этой зависимости, разделим мысленно среду на ряд тонких, соприкасающихся друг с другом слоев, перпендикулярных к направлению распространения волны.

Газы, а также практически и жидкости не оказывают упругого сопротивления сдвигу слоев. Напротив, при попытке сблизить два соседних слоя или удалить их друг от друга возникают возвращающие силы, препятствующие деформации сжатия или растяжения. Колебания частиц происходят в направлении возвращающих сил, поэтому в среде, где отсутствует упругость сдвига, возможны лишь такие волны, в которых колебания частиц совпадают с направлением распространения волнового процесса; иначе говоря, в газах и в жидкостях упругая волна может распространяться лишь в направлении колебательного движения частиц. Такие волны называют *продольными*, так как движения материальных частиц происходят здесь вдоль волны.

Продольные волны представляют собой чередующийся ряд *сгущений и разрежений*, причем длина волны по смыслу этого понятия есть расстояние, между двумя соседними сгущениями или разрежениями (рис. 147, *а*). Типичным примером продольных волн являются звуковые волны в жидкостях и газах. Продольные волны могут, конечно, распространяться и в твердых телах.

В твердом теле деформация сдвига вызывает волну, распространяющуюся в направлении, перпендикулярном к направлению смещения частиц. Волна, в которой колебательное движение совершается перпендикулярно к направлению распространения колебаний, называется *поперечной* (рис. 147, *б*).

Как мы видели выше, в жидких и газообразных средах поперечные волны возникнуть не могут; в твердых же телах они распространяются наряду с волнами продольными. В чисто поперечной волне сгущения и разрежения среды уже не имеют места.

Продольные волны суть волны объемной деформации; поперечные же волны являются волнами деформаций сдвига.

Укажем здесь на два технически интересных примера поперечных волн: это волны, бегущие вдоль натянутой струны, и крутильные волны, вызываемые попеременным закручиванием и раскручиванием конца длинного стержня.

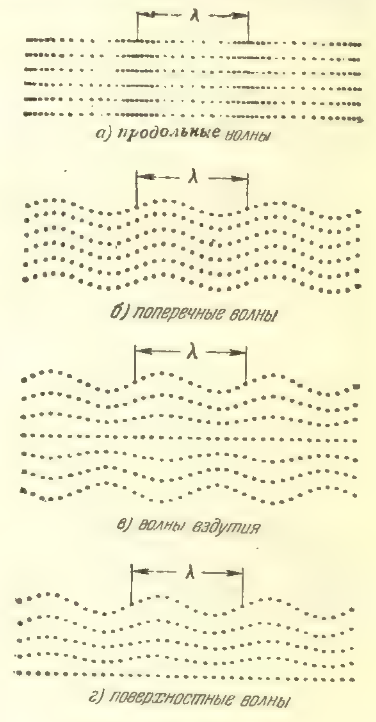


Рис. 147. Виды волн.

Продольные и поперечные колебания частиц волнонесущей среды представляют собой частные случаи волнового процесса. Существуют и другие волны, в которых колебательные движения складываются из одновременных продольных и поперечных смещений.

Например, когда мы ударяем молотком по торцовому срезу круглого стержня, то вдоль стержня бежит волна, причем смещения частиц будут чисто продольными только вдоль оси стержня, по мере же приближения к его поверхности частицы стержня будут совершать поперечные колебания возрастающей амплитуды (рис. 147, *в*). Такие волны можно назвать *волнами вздутия*; они возникают, например, в жидкостях (и даже в газах), заключенных в трубы с гиб-

кими (податливыми) стенками. Условием возникновения волн вздутия является возможность смещения частиц перпендикулярно к поверхности.

Важным примером волнового движения являются *поверхностные волны* (рис. 147, *г*). Всем хорошо знакомы волны на поверхности воды. Нужно, впрочем, отметить, что законы поверхностных волн более сложны, чем законы прочих видов волн. Колебательные траектории частиц, участвующих в распространении поверхностной волны, не являются прямолинейными; частицы описывают замкнутые круговые или эллиптические орбиты (рис. 148).

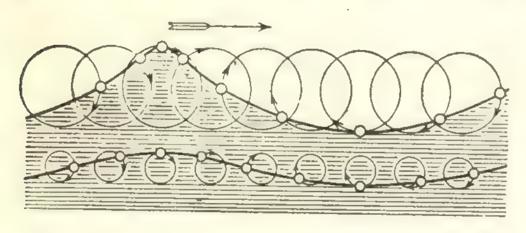


Рис. 148. Частицы волнующейся жидкости движутся по круговым траекториям.

Простые синусоидальные волны на поверхности могут существовать только при амплитудах, малых сравнительно с длиной волны,— таковы, например, волны морских приливов, длина которых может доходить до сотен километров. Обычные же волны, например корабельные волны или волны от брошенного камня, имеют профиль, резко отличающийся от синусоиды: плоские длинные впадины и острые короткие верхушки (рис. 149). Поверхностная волна большой амплитуды увлекает с собой колеблющиеся частицы, которые в этом случае описывают уже не круговые, а более сложные траектории. Именно поэтому большие волны выбрасывают на берег плавающие на них предметы.

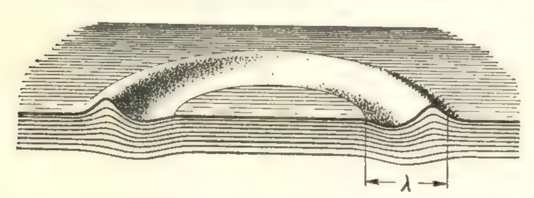


Рис. 149. Профиль волны на поверхности воды.

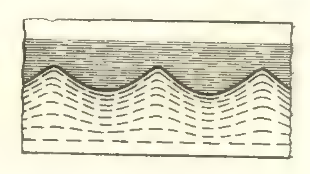


Рис. 150. Волны на поверхности раздела масла и воды.

Волны возникают не только на свободной поверхности жидкости, но вообще на поверхности раздела двух жидкостей, например масла и воды или соленой и пресной воды, а также на диффузионной границе двух газов различной плотности. На рис. 150 изображены волны на поверхности раздела масла и воды; свободная поверхность масла в этом случае почти спокойна.

Возникновением волн на поверхности раздела пресной и соленой воды объясняется интереснейшее явление — так называемая «мертвая вода», наблюдаемая недалеко от устьев рек, особенно в скандинавских фиордах. Идущие корабли вдруг тормозятся вследствие того, что корабль, попав на поверхность раздела пресной и соленой воды, разводит на ней невидимую с поверхности моря волну.

Смежные слои атмосферы могут иметь различную плотность благодаря разности температур. На поверхности раздела таких слоев атмосферы нередко возникают волны, которые движутся с очень малой скоростью и становятся заметными вследствие периодической конденсации водяного пара, поднимаемого на гребнях волн в более холодные слои атмосферы, где он образует так называемые «волнистые» облака.

§ 64. Интерференция волн. Стоячие волны

Очень часто в среде одновременно распространяются не один, а несколько волновых процессов; например, так обстоит дело в том случае, когда несколько колебательных систем одновременно излучают волны. При этом каждая частица среды, попадающая в такое сложное *волновое поле*, совершает результирующее колебательное движение, определенным образом складывающееся из колебаний, вызванных каждым из волновых процессов.

Результирующее смещение частицы среды в любой момент времени является геометрической суммой смещений, вызываемых каждым из складывающихся колебательных процессов в отдельности. Таким образом, каждый из одновременно существующих волновых процессов распространяется в среде так, как если бы никаких других одновременных процессов не существовало. Сформулированный здесь закон сложения колебаний или волн обычно называют *принципом суперпозиции*[1]) (независимого наложения волновых или колебательных процессов друг на друга).

Важный пример независимого сложения колебаний дают звуковые волны, распространяющиеся от нескольких источников звука. Слушая игру оркестра или пение хора, мы можем, сосредоточив внимание, различить каждый отдельный инструмент и каждый отдельный голос. Если бы принцип суперпозиции был ложен и складывающиеся колебания не продолжали существовать в результирующем сложном процессе, то речь и музыка сделались бы невозможными.

Представим себе два распространяющихся через одну и ту же точку среды волновых процесса *с одинаковой частотой и с одинаковым направлением смещения* частиц; если скорости распростра-

---

[1]) От латинского super — над и positio — положение.

нения обоих процессов одинаковы и сами процессы во всем подобны друг другу, то в выбранной нами точке среды оба процесса будут иметь *постоянную разность фаз.*

Физически все эти условия удовлетворяются в том случае, когда *источником обеих серий волн является одна и та же колебательная система.* Получение же от одного источника двух серий волн можно осуществить хотя бы путем использования наряду с прямой волной еще и волны отраженной.

Как уже упоминалось в § 58, такое сложение нескольких колебаний, при котором они либо усиливают, либо ослабляют друг друга, носит название *интерференции* [1]. Условиями возможности интерференции волн являются одинаковая частота, одинаковое направление смещения частиц и постоянство разности фаз, т. е. физически — общность источника интерферирующих колебаний (так называемая *когерентность* [2]) волн).

Математическое рассмотрение вопроса об интерференции двух (в более общем случае нескольких) волн приводит к уже знакомым нам формулам сложения колебаний.

Пусть ω есть угловая частота двух когерентных волн, распространяющихся от источников S_1 и S_2; тогда в точке P, находящейся от S_1 и S_2 на расстояниях y_1 и y_2, будут складываться два колебания:

$$x_1 = a_1 \sin \omega \left(t - \frac{y_1}{u} \right),$$

$$x_2 = a_2 \sin \omega \left(t - \frac{y_2}{u} \right).$$

Вводя в эти уравнения начальные фазы колебаний

$$\varphi_1 = -\frac{\omega}{u} y_1 \quad \text{и} \quad \varphi_2 = -\frac{\omega}{u} y_2,$$

перепишем уравнения колебательных движений в уже знакомой нам форме:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Сложение этих колебаний дает (§ 58) результирующее колебание с амплитудой

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

так как

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\omega}{u}(y_2 - y_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(y_2 - y_1),$$

то

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda}}, \tag{3}$$

[1]) От французского interferer — вмешиваться.

[2]) От латинского cohaerere — находиться в связи.

где

$$\delta = y_2 - y_1$$

есть *разность хода* интерферирующих волн.

Формула (3) отображает следующее интересное явление: амплитуда колебаний в поле интерферирующих волн будет меняться от точки к точке в зависимости от изменения величины δ. При этом будет меняться и энергия колебаний, увеличиваясь в одних местах за счет уменьшения в других местах волнового поля. Согласно закону сохранения энергии это перераспределение энергии должно, однако, происходить без изменения полного ее запаса.

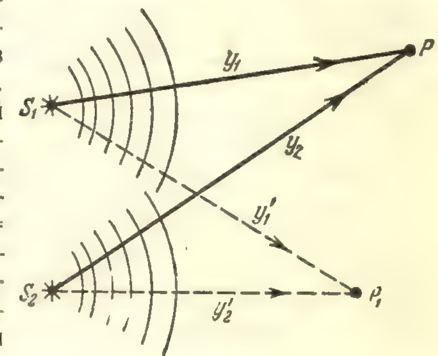


Рис. 151. К расчету интерференции волн от двух точечных источников.

Если для рассматриваемой точки P (рис. 151) разность хода интерферирующих волн обеспечивает совпадение фаз колебаний ($\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ или $\varphi_1 - \varphi_2 = n \cdot 2\pi$, где n — любое целое число), то здесь амплитуда a результирующего колебания будет равна сумме амплитуд a_1 и a_2. В частности, когда $a_1 = a_2$, результирующая амплитуда $a = 2a_1$ и, следовательно, энергия колебания, пропорциональная квадрату амплитуды, будет вследствие интерференции в два раза больше суммарной энергии интерферирующих колебаний. Но наряду с этим увеличением энергии колебаний в одних местах волнового поля в других местах, к примеру в точке P', где разность хода волн такова, что фазы колебаний противоположны $[\varphi_1 - \varphi_2 = (2n-1)\pi]$, результирующая амплитуда окажется равной разности амплитуд a_1 и a_2, и когда $a_1 = a_2$, то колебания взаимно уничтожат друг друга.

Как показывает формула (3), наибольшее усиление колебаний происходит там, где разность хода волн δ удовлетворяет равенству

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = n \cdot 2\pi, \quad \text{или} \quad \delta = 2n\frac{\lambda}{2} \qquad (3')$$

(n — любое целое число).

Наибольшее ослабление колебаний происходит в тех местах волнового поля, где

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = (2n-1)\pi,$$

т. е.

$$\delta = (2n-1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (3'')$$

Итак, когда на один поток бегущих волн (порождающих последовательно во всех точках рассматриваемой части волнового поля одинаковые колебания) накладывается другой когерентный поток таких же волн (порождающий во всей рассматриваемой части волнового поля колебания с той же амплитудой), то сложение (интерференция) этих волн приводит к *стабильному* (т. е. не изменяющемуся со временем) *расчленению волнового поля на чередующиеся области* двух родов (и пространственные слои между ними, промежуточные

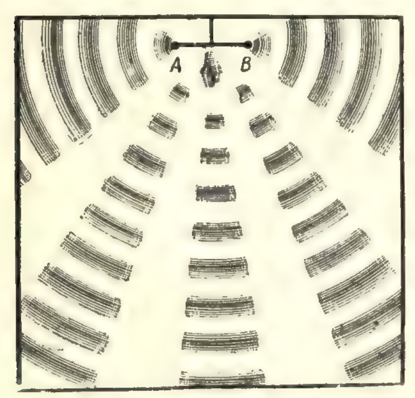


Рис. 152. Интерференция волн от двух точечных источников.

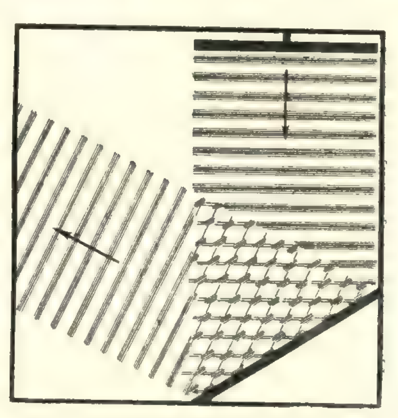


Рис. 153. Интерференция падающих и отраженных волн.

и в энергетическом отношении): 1) области интерференционного усиления, где колебания происходят с энергией в два раза большей, чем сумма энергий интерферирующих колебаний, и 2) области интерференционного ослабления, где колебания взаимно уничтожаются. Геометрическое положение *слоев интерференционного усиления* колебаний определяется равенством *разности хода волн четному числу полуволн*, а положение слоев интерференционного *ослабления* колебаний определяется равенством разности хода волн *нечетному* числу полуволн.

На рис. 152 схематически показана картина интерференции волн на поверхности жидкости; такую картину можно наблюдать, если вызывать волны колебательным движением вертикально расположенных палочек A и B, которые имеют общую опору и (посредством передачи движения от небольшого моторчика) синхронно опускаются в воду и поднимаются из нее. Рис. 153 дает схематическое представление об интерференции падающих и отраженных волн (также для случая волн на поверхности жидкости, вызванных в данном случае колебательным движением пластинки).

Если на пути расходящихся круговых волн, образованных на поверхности воды, поместить небольшое препятствие (неподвижный

стержень A на рис. 154 и 155), то это препятствие само становится источником, конечно, более слабых, но легко различимых круговых волн. Это явление называют *рассеянием волн*. При рассеянии также наблюдается интерференция приходящих и рассеянных волн.

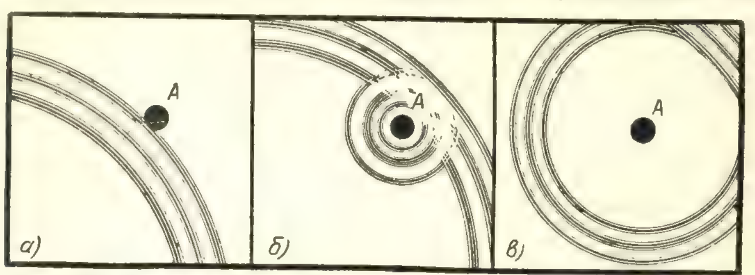


Рис. 154. Рассеяние волны, созданной прикосновением палочки к поверхности воды; три рисунка соответствуют трем последовательным моментам времени.

Явление интерференции может быть хорошо наблюдаемо со световыми лучами. При определенной величине разности ходов прямого и отраженного лучей они могут, падая на одну и ту же точку экрана, «погасить» друг друга. Этот поразительный эффект свидетельствует, наряду со многими другими явлениями, о волновой природе процесса, связанного с распространением света.

Интерференцию можно наблюдать хотя бы на примере привязанной одним концом веревки, другой конец которой приводят рукой в колебание. Волна, бегущая по веревке, отражается от закрепленного конца и движется в противоположном направлении (рис. 156). Обе волны — прямая и отраженная — интерферируют друг с другом, причем те точки веревки, в которых разность фаз прямой и отраженной волн равна нулю, колеблются с наибольшей амплитудой, те же точки, в которых разность фаз соответствует полупериоду, остаются в покое. Такую волну называют *стоячей*, ибо в простейшем случае, когда амплитуды колебаний в прямой и отраженной волнах равны между собой, энергия не перемещается в пространстве,

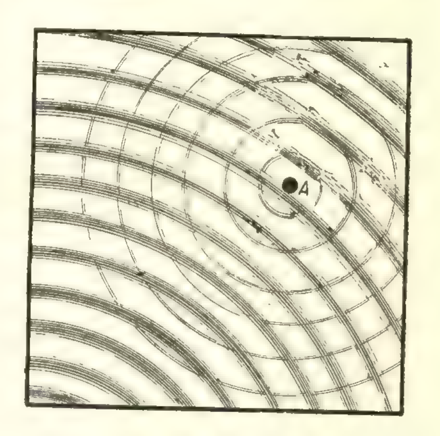


Рис. 155. Стержень A рассеивает волны, создаваемые на поверхности воды гармонически колеблющимся стерженьком.

так как равные ее количества движутся в противоположных направлениях.

Стоячими волнами являются: колебания закрепленных по концам струн, мембран, колебания столбов воздуха в трубах (например, органных), звуковые колебания воздуха в закрытых помещениях и т. п.

Простейший из опытов, показанный на рис. 156, вскрывает замечательные особенности стоячей волны:

1) В отличие от бегущей волны, когда различные точки среды колеблются с одинаковой амплитудой, в стоячей волне амплитуда колебаний неодинакова: в одних местах (удаленных друг от друга на $\frac{\lambda}{2}$) амплитуда колебаний максимальна; эти места называют *пучностями*; в других — колебания вообще не происходят (амплитуда — нуль); эти места называют *узлами*. Таким образом, в противоположность однородной картине волнового поля бегущих волн в стоячих волнах с особенной отчетливостью проявляется характерное для всех случаев интерференции расчленение волнового поля на чередующиеся и стабильные области интерференционного усиления и ослабления колебаний.

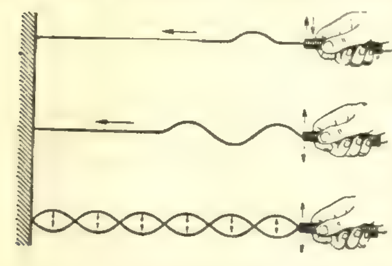


Рис. 156. Возникновение стоячей волны.

2) В отличие от бегущей волны, где в любой момент времени смежные точки среды имеют неодинаковые фазы, в стоячей волне *все точки между соседними узлами колеблются с одинаковой фазой* — все они одновременно проходят через положение равновесия. В аналогичном соседнем участке длиной $\frac{\lambda}{2}$ все точки колеблются тоже синфазно, но в противоположной фазе: когда первые приходят в положение равновесия сверху, то вторые — снизу.

3) При возникновении стоячей волны на концах ее образуется узел (как на рис. 156) или, при других *краевых условиях*, пучность. Если по условиям опыта в конечных точках колебания невозможны («концы закреплены», как на рис. 156), то понятно, что в этих местах располагаются узлы. Когда, напротив, колебания на концах возможны и даже облегчены (такие примеры будут рассмотрены в акустике), концами стоячей волны могут являться пучности. Если в случае, показанном на рис. 156, возбудив колебательное движение веревки, остановить движение руки, то в конечных точках образуются узлы стоячей волны; но если, уловив ритм стоячей волны, продолжать колебательные движения руки, сохраняя этот ритм, то стоячая волна будет оканчиваться у руки пучностью.

4) Когда происходит *отражение волны от более плотной среды*, то в месте отражения фаза скачком изменяется на противоположную — *теряется полволны*. Случай, показанный на рис. 156, иллюстрирует этот общий закон. Действительно, ближайший к точке закрепления узел стоячей волны расположен на расстоянии $\frac{\lambda}{2}$ от точки закрепления, т. е. от места, где происходит отражение прямой волны и возникновение обратной волны. В узле колебания для прямой и обратной волн противоположны по фазе (поэтому они и уничтожают друг друга). Вместе с тем прямая волна проходит от рассматриваемого нами предпоследнего узла до точки закрепления путь $\frac{\lambda}{2}$, и обратная волна проходит тот же путь $\frac{\lambda}{2}$. Мы видим, таким образом, что если бы при отражении не было утрачено полпериода колебаний, то фазы прямой и обратной волн должны были бы в той точке, где находится предпоследний узел, оказаться совпадающими, а не противоположными.

Выведем *уравнение стоячей волны*. За начало координат выберем такую точку, где встречные волны имеют одинаковые фазы, и будем производить отсчет времени от момента, когда начальные фазы оказались равными нулю. Для простейшего случая равных амплитуд имеем для прямой волны уравнение

$$x_1 = A\sin\omega\left(t - \frac{y}{u}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda}\right),$$

и для отраженной волны, идущей в сторону отрицательных y, имеем уравнение

$$x_2 = A\sin\omega\left(t + \frac{y}{u}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{y}{\lambda}\right).$$

Результирующее смещение есть сумма обеих составляющих x_1 и x_2:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\frac{2\pi y}{\lambda}\sin\omega t. \qquad (4)$$

Из последней формулы мы видим, что результирующее колебание имеет ту же частоту ω, но амплитуда его меняется от точки к точке. Во всех тех точках, для которых расстояние от источника волн (или от любой точки, в которой фазы совпадают) равно четному числу четвертей волны (т. е. любому целому числу полуволн), колебания происходят с удвоенной амплитудой; это — *пучности* стоячей волны. Напротив, во всех точках, для которых y равно нечетному числу четвертей волны, амплитуда результирующего колебания есть нуль, т. е. в этих точках колебания не происходят; это — *узлы* стоячей волны.

Для случая неравных амплитуд в пучностях волны результирующая амплитуда равна сумме амплитуд обеих составляющих, а в узлах — их разности.

§ 65. Фазовая и групповая скорости волн

Для изучения волновых процессов с помощью написанных выше уравнений (§ 63) необходимо знать скорость распространения волн u, которая зависит от свойств среды. В среде более плотной (и, следовательно, более инертной) волны распространяются медленнее, нежели в среде менее плотной; в среде более упругой — быстрее, нежели в среде менее упругой.

Вычисления дают следующий результат[1]): для *продольных* волн (рис. 147, *а*) скорость распространения

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \tag{5}$$

а для *поперечных* (рис. 147, *б*)

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \tag{6}$$

где K — модуль объемной упругости (при изменении объема, происходящем без притока и отдачи тепла), G — модуль сдвига, ρ — плотность среды.

В твердых телах продольные волны опережают поперечные, так как в большинстве случаев модуль объемной упругости значительно превышает по величине модуль сдвига; например, в железе $u_{\parallel}=5170$ *м/сек*, $u_{\perp}=2550$ *м/сек*.

Скорость распространения волн на поверхности жидкости зависит от соотношения между глубиной жидкости и длиной волны. В наиболее общем случае скорость распространения волн выражается довольно сложной формулой. Но для тех классов волн, у которых длина волны весьма велика или же, наоборот, весьма мала по сравнению с глубиной жидкости, упомянутая формула сильно упрощается.

У *приливных* волн (обусловленных совокупным действием тяготения к Солнцу и Луне) длина волны достигает сотен километров, т. е. является величиной весьма большой по сравнению с глубиной моря. Вследствие этого скорость распространения приливных волн практически зависит только от глубины моря h и определяется формулой

$$u = \sqrt{gh}, \tag{7}$$

где g — ускорение силы тяжести.

У обычных *морских* волн длина волны, наоборот, весьма мала по сравнению с глубиной. В связи с этим скорость распространения

---

[1]) Вывод формулы для скорости волн приведен в § 134.

этих волн зависит только от длины волны и определяется формулой

$$u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \tag{8}$$

где λ — длина волны.

В случае чрезвычайно коротких, так называемых *капиллярных* волн главную роль играют междучастичные силы, а не сила тяжести. Скорость распространения капиллярных волн определяется формулой

$$u = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}, \tag{9}$$

где α — поверхностное натяжение, ρ — плотность жидкости.

Приведенные формулы показывают, что в случае продольных и поперечных упругих волн скорость волнового процесса не зависит от длины волны. Иначе обстоит дело в случае морских волн. Мы видим, и это нетрудно подтвердить наблюдением, что скорость морской волны тем больше, чем волна длиннее; длинные волны догоняют, поднимают на себя и затем опережают короткие. Скорость капиллярной волны, наоборот, тем больше, чем волна короче.

Формулы (8) и (9) для скорости распространения поверхностных волн можно преобразовать, связав скорость распространения u с периодом колебаний T. Учитывая, что $\lambda = uT$, возводя обе части формулы (6) в квадрат и сокращая величину u, для скорости морских волн вместо формулы (6) получаем:

$$u = \frac{gT}{2\pi}.$$

При $T = 10$ сек. морская волна распространяется со скоростью 15,6 *м/сек*, т. е. 56 *км/час*. При периоде в 20 сек. скорость морской волны достигает 112 *км/час*.

Следует отметить, что здесь речь идет о так называемой *фазовой скорости* волн. Перенос энергии поверхностными волнами осуществляется движением группы волн и происходит (как будет пояснено ниже) в случае морских волн со скоростью, в два раза меньшей, а в случае капиллярных волн со скоростью, в полтора раза большей, чем фазовая скорость.

Изменение скорости распространения волн в зависимости от длины волны называют *дисперсией* [1]). Волновой процесс, связанный с распространением света, характеризуется ясно выраженной зависимостью скорости от частоты — дисперсией света.

Звуковые волны распространяются со скоростью, которая практически одинакова для волн разной длины. Только при тех

---

[1]) От латинского dispergo — р а с с е и в а ю.

частотах, при которых вследствие особенностей молекулярного строения среды упругие волны испытывают быстрое затухание, наблюдается более или менее заметная зависимость скорости волн от их длины.

При землетрясениях по земному шару распространяются волны упругих деформаций, эти волны называют *сейсмическими*. В их состав входят продольные, поперечные и поверхностные волны. Установлено, что поперечные волны, т. е. волны сдвига, не проходят глубже 2900 *км*. Ядро Земли состоит, по-видимому, из жидкообразной раскаленной среды, которая не передает деформаций сдвига.

В земной коре сдвиги, вызванные землетрясениями, передаются со скоростью около 4,5 *км/сек*; на глубине 1000 *км* поперечные сейсмические волны имеют скорость около 6 *км/сек*. Продольные сейсмические волны обгоняют поперечные и движутся в поверхностных слоях со скоростью 8 *км/сек*, а на глубине 1000 *км* — со скоростью 11 *км/сек*.

Дисперсия сейсмических волн была изучена впервые акад. Б. Б. Голицыным (в 1906—1910 гг.), труды и точнейшие приборы которого создали новое направление в развитии науки о землетрясениях. В настоящее время регистрацию и исследование сейсмических волн осуществляют во всем мире около 500 сейсмических станций.

Групповая скорость волн. Волновой процесс есть процесс пространственного переноса энергии: перенос энергии происходит вследствие передачи импульса упругой деформации от одного участка среды к другому. Казалось бы, что поэтому скорость переноса энергии должна совпадать со скоростью распространения волн. В действительности это совпадение не всегда имеется. Как мы сейчас увидим, энергия передается со скоростью волны лишь при отсутствии дисперсии или же при наличии только одного ряда волн с некоторой определенной частотой.

Представим себе, что в среде одновременно и в одном направлении распространяются ряды волн, частоты которых несколько различны; предположим, кроме того, что скорость волн зависит от частоты, т. е. имеет место дисперсия. Благодаря неодинаковой скорости распространения волн различной длины эти волны будут приходить в некоторую точку волнового поля, вообще говоря, с различными фазами, и в каждый данный момент времени результирующее смещение выбранной нами точки будет зависеть от соотношения фаз отдельных колебаний. Если эти фазы будут почти противоположны, то результирующее колебание будет невелико. Но в том месте, где фазы отдельных колебаний в данный момент времени совпадут, там в результате интерференции все колебания сложатся и дадут результирующее колебание с наибольшей возможной амплитудой. При этом плотность энергии в данной точке среды будет, очевидно, максимальной. Но в следующий момент времени соотношение фаз неизбежно изменится

и в связи с этим уменьшится и плотность энергии в этой точке. Будем называть точку с наибольшей плотностью энергии *центром энергии* группы волн. Очевидно, что в силу непрерывно изменяющегося соотношения фаз отдельных колебаний центр энергии будет перемещаться в пространстве. Вследствие интерференции картина распространения группы волн с близкими частотами будет иметь вид, показанный на рис. 157. Амплитуда смещений в центре энергии будет наибольшей; впереди и позади волны гасят друг друга.

Определим скорость перемещения центра энергии. Для этого положим, что в некоторый момент времени t центр энергии находится

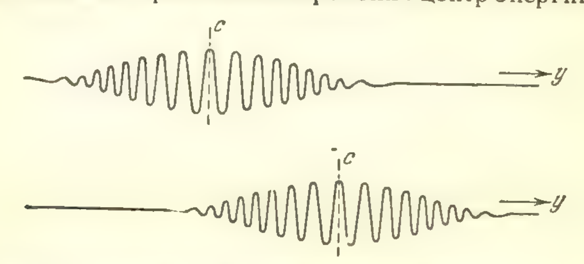


Рис. 157. Волновое поле группы волн с близкими частотами и перемещение центра энергии C.

в точке с координатой y. Смещение, соответствующее каждому отдельному колебанию, можно определить по уравнению волны

$$x = A\sin\varphi,$$

где фаза

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{y}{u}\right),$$

или, если вместо угловой частоты ω подставить выражение ω через длину волны $\left(\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\frac{u}{\lambda}\right)$:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{u}{\lambda}t - \frac{y}{\lambda}\right).$$

Где в группе волн находится центр энергии, там колебания, вызываемые близкими по длине волнами, усиливают друг друга. Иначе говоря, *в центре энергии фазы колебаний у волн различной, но близкой длины совпадают*. Стало быть, в центре энергии фаза колебаний не зависит от длины волны и, следовательно, производная от фазы по длине волны равна нулю:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 2\pi\left(t\frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda} + y\frac{1}{\lambda^2}\right) = 0.$$

Это уравнение, характеризующее положение центра энергии его координатой y в момент времени t, можно переписать так:

$$y = -\lambda^2 \frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda} \cdot t = vt. \tag{10}$$

Мы видим, таким образом, что положение центра энергии группы волн, определяемое координатой центра энергии y, изменяется со временем, а именно: по смыслу формулы (10) ясно, что центр энергии перемещается в пространстве со скоростью v, причем

$$v = -\lambda^2 \frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda}. \tag{11}$$

Скорость *v есть скорость перемещения энергии* группы волн; эту скорость называют *групповой скоростью* в отличие от скорости распространения отдельной волны — фазовой скорости u.

Нетрудно видеть, что если дисперсия отсутствует, т. е. $\frac{du}{d\lambda} = 0$, то $v = u$. Это означает, что в случае, *когда волны разной длины распространяются с одинаковой скоростью, группа волн движется и переносит энергию со скоростью распространения отдельной волны.*

Для звуковых волн групповая скорость практически совпадает с фазовой.

В случае поверхностных волн, например морских, волн гнутия стержня и т. д., фазовая скорость различна для волн разной длины. Поэтому в этих случаях группа близких по длине волн распространяется со скоростью, отличной от скорости распространения отдельной волны.

Пусть

$$u = k\lambda^n, \tag{12}$$

где $k = \text{const}$, а показатель степени n имеет характерное значение для волн различной природы (например, для морских волн, как упоминалось, $n = \frac{1}{2}$; для ряби, т. е. капиллярных волн, $n = -\frac{1}{2}$).

Из (12) имеем:

$$\frac{u}{\lambda} = k\lambda^{n-1}$$

и, стало быть,

$$\frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda} = (n-1)\,k\lambda^{n-2}.$$

Умножая обе части этого уравнения на λ^2 и заменяя в правой части $k\lambda^n$ через u, находим согласно формуле (11), что

$$v = (1 - n)\,u. \tag{13}$$

Мы видим, таким образом, что группа морских волн $\left(n = \frac{1}{2}\right)$ перемещается со скоростью, в два раза меньшей, чем скорость распространения отдельной волны:

$$v = \frac{1}{2}\,u.$$

Если морские волны при шторме имеют период 20 сек. и движутся соответственно формуле $u = \frac{gT}{2\pi}$ со скоростью 112 *км/час*, то при распространении волнения передние волны затухают, а группа волн перемещается со скоростью 56 *км/час*.

Рябь — группа капиллярных волн — распространяется, напротив, со скоростью, большей, чем отдельные волны. Действительно, в этом случае в формуле (12) показатель степени $n = -\frac{1}{2}$, и поэтому по формуле (13)

$$v = \frac{3}{2}\,u.$$

Заметим, что общее уравнение групповой скорости (11), если продифференцировать, как указано в этом уравнении, отношение $\frac{u}{\lambda}$ можно переписать в следующей, часто применяемой форме:

$$v = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}\,. \tag{14}$$

ГЛАВА XII

АКУСТИКА

§ 66. Звук как физическое явление. Распространение звуковых волн

Специфическое ощущение, воспринимаемое нами как звук, является результатом воздействия на слуховой аппарат человека колебательного движения упругой среды — чаще всего воздуха. Колебания среды возбуждаются источником звука и, распространяясь в среде, доходят до приемного аппарата — нашего уха. Таким образом, бесконечное разнообразие слышимых нами звуков вызывается колебательными процессами, различающимися друг от друга частотой и амплитудой. Не следует смешивать две стороны одного и того же явления: звук как физический процесс представляет собой частный случай колебательного движения; в качестве же психо-физиологического явления звук есть некоторое специфическое ощущение, механизм возникновения которого изучен в настоящее время довольно подробно.

Говоря о физической стороне явления, мы характеризуем звук его *интенсивностью* (*силой*), его *составом* и *частотой* связанных с ним колебательных процессов; имея же в виду звуковые ощущения, мы говорим о *громкости*, о *тембре*, о *высоте* звука.

В твердых телах звук может распространяться как в виде продольных, так и в виде поперечных колебаний. Поскольку жидкости и газы не имеют упругости сдвига, очевидно, что в газообразной и в жидкой средах звук может распространяться только в виде *продольных* колебаний. В газах и в жидкостях звуковые волны представляют собой чередующиеся *сгущения* и *разрежения* среды, удаляющиеся от источника звука с определенной характерной для каждой среды скоростью. *Поверхностью звуковой волны* является геометрическое место частиц среды, имеющих одинаковую фазу колебаний. Поверхности звуковых волн можно провести, например, так, чтобы между поверхностями соседних волн заключались слой сгущения и слой разрежения. Направление, перпендикулярное к поверхности волны, называют *лучом*.

Звуковые волны в газообразной среде могут быть сфотографированы. Для этой цели за источником звука помещают фотографиче-

скую пластинку, на которую спереди направляют пучок света от электрической искры так, чтобы эти лучи от мгновенной вспышки света падали на фотопластинку, пройдя через воздух, окружающий источник звука. На рис. 158—160 приведены полученные по указанному способу фотографии звуковых волн. Источник звука был отделен от фотопластинки небольшим экранчиком на подставке.

На рис. 158, *а* видно, что звуковая волна только что вышла из-за экрана; на рис. 158, *б* та же волна заснята вторично спустя несколько тысячных долей секунды. Поверхностью волны в данном случае является сфера. На фотографии изображение волны получается в виде окружности, радиус которой со временем увеличивается.

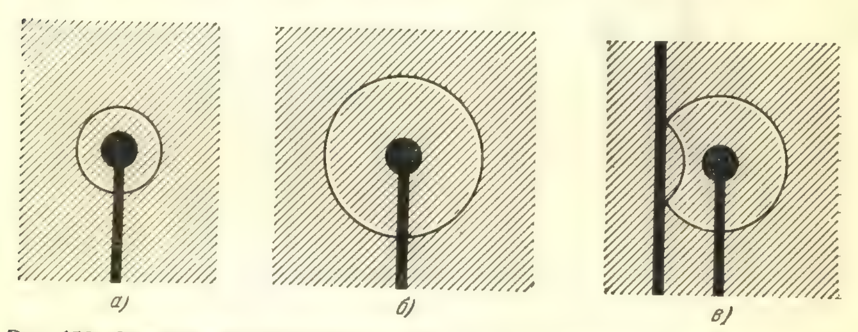


Рис. 158. Фотография звуковой волны в два момента времени (*а* и *б*). Отражение звуковой волны (*в*).

На рис. 158, *в* приведена фотография звуковой сферической волны, *отраженной* от плоской стенки. Здесь следует обратить внимание на то, что отраженная часть волны как бы исходит из точки, находящейся за отражающей поверхностью на таком же расстоянии от отражающей поверхности, как и источник звука. Общеизвестно, что явлением отражения звуковых волн объясняется *эхо*.

На рис. 159 показано изменение волновой поверхности при прохождении звуковой волны через линзообразный мешочек, наполненный водородом. Это изменение поверхности звуковой волны является следствием *преломления* (рефракции) звуковых лучей: у поверхности раздела двух сред, где скорость волн различна, направление распространения волны изменяется.

Рис. 160 воспроизводит фотографию звуковых волн, на пути распространения которых поставлен экран с четырьмя щелями. Проходя через щели, волны огибают экран. Это явление огибания волнами встреченных препятствий называют *дифракцией*.

Законы распространения, отражения, преломления и дифракции звуковых волн могут быть выведены из принципа Гюйгенса, согласно которому каждая приведенная в колебание частица

среды может рассматриваться как новый центр (источник) волн; интерференция всех этих волн дает наблюдаемую в действительности волну (способы применения принципа Гюйгенса будут пояснены в третьем томе на примере световых волн).

Звуковые волны несут с собой некоторое количество движения и вследствие этого оказывают давление на встречаемые ими препятствия.



Рис. 159. Преломление звуковой волны.

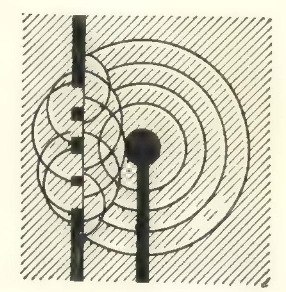


Рис. 160. Дифракция звуковых волн.

Для пояснения этого факта обратимся к рис. 161. На этом рисунке пунктиром изображена синусоида смещений частиц среды в некоторый момент времени при распространении в среде продольных волн. Скорости этих частиц в рассматриваемый момент времени изобразятся косинусоидой, или, что то же, синусоидой, опережающей синусоиду смещений на четверть периода (на рис. 161 — сплошная линия). Нетрудно сообразить, что с г у щ е н и я среды будут наблюдаться там, где в данный момент смещение частиц равно нулю или близко к нулю и где скорость направлена в сторону распространения волн [1]). Наоборот, разрежения среды будут наблюдаться там, где смещение частиц тоже равно нулю или близко к нулю, но где скорость частиц направлена в сторону, противоположную распространению волн. Итак, в сгущениях частицы движутся вперед, в разрежениях — назад. Но в сгущен-

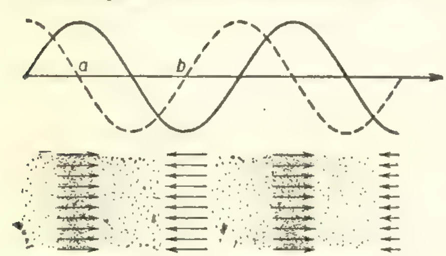


Рис. 161. В сгущениях проходящей звуковой волны частицы движутся вперед.

[1] Синусоида смещений, изображенная на рис. 161, показывает, что частицы среды, смежные с a и лежащие слева от a, смещены направо, лежащие же справа от a — налево, т. е. навстречу друг другу. Частицы среды, смежные с b и лежащие слева от b, смещены налево, справа от b — направо, т. е. здесь вследствие смещения частицы удалены друг от друга.

ных слоях находится большее число частиц, чем в разрежениях. Таким образом, в любой момент времени в бегущих продольных звуковых волнах число частиц, движущихся вперед, несколько превышает число частиц, движущихся назад. Вследствие этого звуковая волна несет с собой некоторое количество движения, что и проявляется в давлении, которое звуковые волны оказывают на встречаемые ими препятствия.

Экспериментально *давление звука* было исследовано Рэлеем и Петром Николаевичем Лебедевым.

Теоретически *скорость звука* определяется формулой Лапласа [§ 65, формула (5)]:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \tag{1}$$

где K — модуль всесторонней упругости (когда сжатие производится без притока и отдачи тепла), ρ — плотность.

Если сжатие тела производить, поддерживая температуру тела постоянной, то для модуля упругости получаются величины меньшие, чем в том случае, когда сжатие производится без притока и отдачи тепла. Эти два значения модуля всесторонней упругости, как доказывается в термодинамике, относятся так, как теплоемкость тела при постоянном давлении к теплоемкости тела при постоянном объеме.

Для газов (не слишком сжатых) изотермический модуль всесторонней упругости равен просто давлению газа p. Если, не изменяя температуры газа, мы сожмем газ (увеличим его плотность) в n раз, то и давление газа возрастет в n раз. Следовательно, по формуле Лапласа получается, что скорость звука в газе не зависит от плотности газа.

Из газовых законов и формулы Лапласа можно вывести (§ 134), что скорость звука в газах пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры газа:

$$c = \sqrt{g\varkappa RT}, \tag{2}$$

где g — ускорение силы тяжести, $\varkappa$ — отношение темплоемкостей ($\varkappa = C_p/C_v$) и R — универсальная газовая постоянная.

При 0° С скорость звука в сухом воздухе равна $c_0 = 332$ *м/сек*; при средних температурах и средней влажности скорость звука в воздухе считают равной 340 *м/сек*. Скорость звука в водороде при 0° С равна 1280 *м/сек*.

В воде скорость звука составляет 1450 *м/сек*, в стекле 5600 *м/сек*, в железе 5170 *м/сек*.

Следует заметить, что ударные звуковые волны, вызываемые выстрелом или взрывом, в начале своего пути имеют скорость, зна-

чительно превосходящую нормальную скорость звука в данной среде. Ударная звуковая волна в воздухе, вызванная сильным взрывом, может иметь вблизи источника звука скорость, в несколько раз превосходящую нормальную скорость звука в воздухе, но уже на расстоянии десятков метров от места взрыва скорость распространения волны уменьшается до нормальной величины.

Как уже упоминалось в § 65, звуковые волны разной длины имеют практически одинаковую скорость. Исключение составляют те области частот, для которых характерно особенно быстрое затухание упругих волн при их распространении в рассматриваемой среде. Обычно эти частоты лежат далеко за пределами слышимости (для газов при атмосферном давлении — это частоты порядка 100 000 колебаний в секунду). Теоретический анализ показывает, что дисперсия и поглощение звуковых волн связаны с тем, что для перераспределения энергии между поступательным и колебательным движениями молекул требуется некоторое, хотя и малое, время. Это приводит к тому, что длинные волны (волны звукового диапазона) движутся несколько медленнее, чем очень короткие «неслышимые» волны. Так, в парах углекислоты при 0° С и атмосферном давлении звук имеет скорость 268 *м/сек*, тогда как весьма короткие, «неслышимые», волны распространяются со скоростью 280 *м/сек*.

Звуковая волна, распространяясь в среде, может иметь различную форму, зависящую от размеров и формы источника звука. В случаях, технически наиболее интересных, источник звука (излучатель) представляет собой некоторую колеблющуюся поверхность,— таковы, например, мембрана телефона или диффузор громкоговорителя. Если такой источник звука излучает звуковые волны в открытое пространство, то форма волны существенным образом зависит от относительных размеров излучателя; излучатель, размеры которого велики сравнительно с длиной звуковой волны, излучает звуковую энергию в одном только направлении, именно в направлении своего колебательного движения. Напротив, излучатель малого сравнительно с длиной волны размера излучает звуковую энергию по всем направлениям. Форма волнового фронта в том и другом случаях будет, очевидно, различной.

Рассмотрим сначала первый случай. Представим себе жесткую плоскую поверхность достаточно большого (сравнительно с длиной волны) размера, совершающую колебательное движение в направлении своей нормали. Двигаясь вперед, такая поверхность создает перед собой сгущение, которое благодаря упругости среды будет распространяться в направлении смещения излучателя. Двигаясь обратно, излучатель создает за собой разрежение, которое будет перемещаться в среде вслед за начальным сгущением. При длительном колебании излучателя мы будем наблюдать по обе стороны от него звуковую волну, характеризующуюся тем, что все частицы среды, находящиеся на равном расстоянии от излучающей поверхности

(причем это расстояние мы будем отсчитывать в направлении нормали к поверхности), совершают синфазные (т. е. совпадающие по фазе) колебания с одинаковой амплитудой. Такую волну мы называем *плоской*. Уравнение простейшей плоской волны нам уже знакомо (§ 63); перепишем его здесь в следующем виде:

$$\xi = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{3}$$

В этом уравнении введены следующие обозначения: ξ — смещение частицы среды; a — амплитуда колебания частицы; ω — угловая частота колебаний, т. е. число колебаний в 2π сек.; t — время; x — расстояние частицы от излучающей поверхности, измеренное в направлении нормали к этой последней; c — скорость звука.

Вычисления показывают, что амплитуда избыточного давления p_0 равна произведению амплитуды скорости частиц (ωa), средней плотности среды ρ и скорости звука c:

$$p_0 = c\rho \cdot \omega a. \tag{4}$$

Произведение средней плотности среды на скорость звука, $c\rho$, называют *акустическим сопротивлением среды*.

Акустические сопротивления $c\rho$ при 20° С

Материал	c, м/сек	ρ, г/см³	$c\rho$, г/см²·сек
Железо	5170	7,8	4 000 000
Бетон	2200	2,2	480 000
Дерево	5000	0,5	250 000
Вода	1440	1,0	144 000
Пробка	430	0,3	13 000
Резина	60	1,0	6 000
Воздух	340	0,0013	44

Рассмотрим теперь случай *сферических* волн. Когда размеры излучающей поверхности становятся малыми сравнительно с длиной волны, волновой фронт заметно искривляется. Это происходит потому, что энергия колебаний распространяется по всем направлениям от излучателя.

Явление можно лучше всего понять на следующем простом примере. Представим себе, что на поверхность воды упало длинное бревно. Возникшие благодаря этому волны идут параллельными рядами в обе стороны от бревна. Иначе обстоит дело в том случае, когда в воду брошен небольшой камень,— при этом волны распространяются концентрическими кругами. Бревно велико сравнитель-

но с длиной волны на поверхности воды; идущие от него параллельные ряды волн представляют собой наглядную модель плоских волн. Камень же имеет небольшие размеры; расходящиеся от места его падения круги дают нам модель сферических волн. При распространении сферической волны поверхность волнового фронта возрастает пропорционально квадрату его радиуса. При постоянной мощности источника звука энергия, протекающая через каждый квадратный сантиметр сферической поверхности радиуса r, обратно пропорциональна r^2. Так как энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, то ясно, что амплитуда колебаний в сферической волне должна убывать как величина, обратная первой степени расстояния от источника звука. Уравнение сферической волны имеет, следовательно, такой вид:

$$\xi = \frac{a}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \qquad (5)$$

§ 67. Интенсивность звука

Силой, или интенсивностью, звука в проходящей (т. е. нестоячей) волне называется *количество энергии, ежесекундно протекающей через 1 см² площадки, перпендикулярной к направлению распространения волны.*

Интенсивность (силу) звука измеряют в *эрг/см²·сек* или же в единицах, в 10 раз бо́льших, а именно в *мквт/см²* (микроватт — миллионная доля ватта).

Вычисления показывают, что интенсивность звука I равна отношению квадрата амплитуды избыточного давления к удвоенному акустическому сопротивлению среды:

$$I = \frac{p_0^2}{2c\rho}. \qquad (6)$$

Это справедливо как для плоских, так и для сферических волн. В случае плоских волн, если пренебречь потерями, связанными с внутренним трением, сила звука не должна изменяться с расстоянием. В случае сферических волн амплитуды смещения, скорости частиц и избыточного давления убывают как величины, обратные первой степени расстояния от источника звука. Следовательно, в случае сферических волн сила звука убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от источника звука.

Для измерения силы звука обычно применяют микрофоны (их устройство описано во втором томе курса, в главе об электрических колебаниях). Для измерения силы звука применяют также *диск Рэлея* — это тонкий небольшой диск (изготовленный из пластинки слюды толщиной в 2—3 сотых миллиметра) диаметром в 2—5 *мм*, подвешенный на тончайшей нити. В поле звуковых волн на диск

действует вращающая пара, момент которой пропорционален силе звука и не зависит от частоты звука. Эта вращающая пара стремится повернуть диск так, чтобы плоскость его была перпендикулярна к направлению распространения звуковых волн. Обычно диск Рэлея подвешивают в звуковом поле под углом в 45° к направлению распространения волн и измеряют силу звука, определяя угол поворота диска.

Для определения силы звука можно также измерять давление p, которое звуковые волны оказывают на твердую стенку. Это давление пропорционально силе звука:

$$p = \frac{\varkappa + 1}{2c} I;$$

здесь $\varkappa$ есть отношение теплоемкости среды при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме, c — скорость звука.

Сопоставляя приведенную формулу с формулой (6), мы видим, что давление, оказываемое звуковыми волнами на твердую стенку, пропорционально квадрату амплитуды избыточного давления и обратно пропорционально плотности среды.

Определение интенсивности звука, данное в начале настоящего параграфа, утрачивает смысл для стоячей волны. Действительно, если амплитуды давления в прямой и отраженной волнах равны между собой, то через площадку, поставленную перпендикулярно к оси волны, протекают в противоположных направлениях равные количества энергии. Поэтому результирующий поток энергии через площадку равен нулю. В этом случае интенсивность звука характеризуют *плотностью звуковой энергии*, т. е. энергией, содержащейся в 1 $см^3$ звукового поля.

Для вычисления плотности звуковой энергии в поле плоской проходящей волны представим себе цилиндрический объем сечением в 1 $см^2$ и длиной, численно равной скорости звука c; ось цилиндра пусть совпадает с направлением распространения волны. Ясно, что общее количество энергии, содержащейся внутри цилиндра, численно равно интенсивности звука I. С другой стороны, при сечении в 1 $см^2$ объем цилиндра численно равен c; таким образом, плотность E звуковой энергии оказывается равной

$$E = \frac{I}{c}. \tag{7}$$

Представление о движении энергии и важнейшие в настоящее время понятия о плотности энергии в точке среды и о скорости движения энергии были введены в науку в 1874 г. Н. А. Умовым в его докторской диссертации, где, в частности, дано строгое обоснование уравнения (7). Десятью годами позже идеи Умова были развиты английским физиком Пойнтингом в применении к электромагнитным волнам.

Поясним, как вычисляется интенсивность звука в отраженной звуковой волне и в преломленной волне.

Законы отражения и преломления звуковых волн подобны законам отражения и преломления света. При отражении звуковой волны угол, образуемый направлением волны с нормалью к отражающей поверхности (угол падения), равен углу, образуемому направлением отраженной волны с той же нормалью (углу отражения).

При переходе звуковой волны из одной среды в другую угол падения θ_1 и угол преломления θ_2 связаны между собой соотношением

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

где c_1 и c_2 — скорости звука в первой и во второй средах.

Если I_1 — интенсивность звука в первой среде, то при нормальном падении волн на поверхность раздела интенсивность звука I_2 во второй среде будет:

$$I_2=\beta I_1,$$

где, как было доказано Рэлеем, *коэффициент проникновения* звука β определяется формулой

$$\beta=4\frac{\frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2}}{\left(\frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2}+1\right)^2}.$$

Очевидно, что *коэффициент отражения* равен $(1-\beta)$.

Из формулы Рэлея мы видим, что чем больше различаются акустические сопротивления сред $(c_1\rho_1)$ и $(c_2\rho_2)$, тем меньшая доля звуковой энергии проникает через поверхность раздела сред. Нетрудно сообразить, что когда акустическое сопротивление второй среды весьма велико в сравнении с акустическим сопротивлением первой среды, то

$$\beta\approx 4\frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2}.$$

Такой случай имеет место при переходе звука из воздуха в массу воды или в толщу бетона, дерева; акустическое сопротивление этих сред в несколько тысяч раз больше акустического сопротивления воздуха. Стало быть, при нормальном падении звука из воздуха на массивы воды, бетона, дерева в эти среды проникает не более тысячной доли интенсивности звука. Тем не менее бетонная или деревянная стена может оказаться весьма звукопроводной, если она тонка; в этом случае стена воспринимает и передает упругие колебания, как большая мембрана. Приведенная выше формула для такого случая неприменима.

Отдельные слои атмосферного воздуха вследствие неодинакового температурного состояния могут обладать различным акустическим сопротивлением; от поверхности раздела таких слоев воздуха происходит отражение звука. Этим объясняется, что дальность слышимости звуков в атмосфере подвержена значительным колебаниям. Дальность слышимости в зависимости от степени однородности воздуха может изменяться в 10 и более раз. Погода (дождь, снег, туман) не влияет на звукопроводность воздуха. В ясный день и во время густого тумана слышимость может быть одинаковой. И, напротив, в дни, когда погода видимым образом одинакова, звукопроводность воздуха может оказаться весьма различной, если степень однородности слоев воздуха неодинакова.

Одной из важных задач акустики является выяснение условий, влияющих на интенсивность звука акустических излучателей. Когда колеблющееся тело-излучатель отдает звуковую энергию во внешнюю среду, это тело совершает работу против *реакции звукового поля*, т. е. против сил, обусловленных избыточным давлением в излучаемой волне и тормозящих колебательное движение излучателя.

Вычисление показывает, что когда излучатель имеет размеры, большие сравнительно с длиной волны, он излучает плоскую волну, причем мощность звукового излучения равна половине произведения амплитуды скорости колебательного движения излучателя $\dot{\xi}=\frac{d\xi}{dt}$ на площадь излучателя S и на акустическое сопротивление среды:

$$N=\frac{1}{2}\dot{\xi}\cdot c\rho_0 S.$$

Если же излучатель мал сравнительно с длиной волны, то он излучает сферическую волну, причем мощность излучения в этом случае определяется формулой

$$N=\frac{1}{2}\dot{\xi}\cdot\frac{\rho_0}{2\pi c}\omega^2 S^2.$$

Для какого-либо излучателя заданных размеров (например, для колеблющегося диска площадью S) первая из двух приведенных формул для мощности определяет мощность излучения высоких частот (коротких волн), вторая — мощность излучения низких частот (длинных волн).

Часто требуется, чтобы в области высоких, средних и низких частот излучатель имел одинаковую мощность (этим качеством должны обладать мембраны патефонов, диффузоры громкоговорителей). Но при заданной амплитуде колебательного движения излучатели малого размера при удовлетворительной мощности излучения высоких звуков имеют весьма малую мощность излучения низких звуков. Это делает их в музыкальном отношении неполноценными.

Из сказанного ясны недостатки излучателей малого размера. Излучатели большого размера обладают тем существенным неудобством, что их масса значительна и, стало быть, для сообщения им колебательного движения с требуемой амплитудой необходимо прилагать очень большие силы. Поэтому с технической точки зрения желательно поставить излучатель малого размера в условия наиболее выгодного акустического режима.

Эта задача может быть решена с помощью специального устройства, соединяющего излучатель с открытым пространством, а именно с помощью *рупора*. Рупор представляет собой постепенно расширяющуюся трубу, в узком конце которой (в горле) колеблется излучатель. Жесткие стенки рупора не дают звуковой волне «расползаться» в стороны. Таким образом, фронт волны сохраняет более или менее плоскую форму, что делает первую из приведенных выше формул

для мощности излучения применимой не только в области высоких, но также и в области низких частот.

Обычно изучение интенсивности звука приходится проводить для замкнутых помещений. Исследование звука в замкнутых помещениях важно для проектирования аудиторий, театров, концертных залов и т. п. и для исправления акустических дефектов помещений, построенных без предварительного акустического расчета. Отрасль техники, занимающаяся этими вопросами, носит название **архитектурной акустики**.

Основной особенностью акустических процессов в замкнутых помещениях является наличие многократных отражений звука от ограничивающих поверхностей (стен, потолка). В помещении средних размеров звуковая волна претерпевает несколько сот отражений, прежде чем энергия ее уменьшится до порога слышимости В больших помещениях звук достаточной силы может быть слышен после выключения источника в течение нескольких десятков секунд за счет существования отраженных волн, движущихся во всевозможных направлениях. Совершенно очевидно, что такое постепенное замирание звука, с одной стороны, выгодно, так как звук усиливается за счет энергии отраженных волн; однако, с другой стороны, чрезмерно медленное замирание может существенно ухудшить восприятие связного звучания (речи, музыки) вследствие того, что каждая новая часть связного контекста (например, каждый новый слог речи) перекрывается еще не отзвучавшими предыдущими. Уже из этих беглых рассуждений понятно, что для создания хорошей слышимости время отзвука в аудитории должно иметь некоторую оптимальную величину.

При каждом отражении часть энергии теряется вследствие поглощения. Отношение поглощенной энергии звука к падающей называют *коэффициентом поглощения* звука. Приводим его значения для ряда случаев:

Открытое окно	1,00
Оштукатуренная кирпичная стена	0,025
Стекло обычной толщины	0,027
Известь по деревянной обрешетке	0,034
Линолеум	0,12
Ковер	0,20
Войлок (толщиной 2,5 *см* на расстоянии 8 *см* от стены)	0,78
Паркет	0,06
Бетон	0,015

Очевидно, что чем больше коэффициент поглощения звука, характерный для стен какого-либо помещения, и чем меньше размеры этого помещения, тем короче время отзвука.

Рис. 162. Оптимальная реверберация для помещений различного объема.

Время отзвука, в течение которого интенсивность звука убывает до порога слышимости, зависит не только от свойств помещения, но и от начальной силы звука. Чтобы внести определенность в расчет акустических свойств аудиторий, принято (совершенно условно) рассчитывать *время, в течение которого плотность звуковой энергии уменьшается до одной миллионной доли начального значения*. Это время называют временем стандартной реверберации, или просто *реверберацией*.

Оптимальное значение реверберации, при котором слышимость может считаться наилучшей, многократно определялось экспериментально. В малых поме-

щениях (объемом не свыше 350 $м^3$) оптимальной является реверберация 1,06 сек. При дальнейшем увеличении объема оптимальная реверберация растет пропорционально $\sqrt[3]{V}$, как это представлено на рис. 162. В помещениях с плохими акустическими свойствами (слишком «гулких») реверберация вместо оптимального значения в 1—2 сек. составляет 3—5 сек.

§ 68. Частота и состав звуков

В случае гармонических звуковых колебаний среды наше ощущение *высоты* звука объективно соответствует *частоте* колебаний. Если звуковые колебания среды негармоничны, то, пользуясь теоремой Фурье, такие колебания можно представить как сумму гармонических колебаний с кратными частотами. В этом случае составляющее гармоническое колебание, характеризуемое наименьшей частотой ν, называют *основным тоном*, а все другие — *обертонами* (первый обертон имеет частоту 2ν, второй 3ν и т. д.).

Явление *акустического резонанса* позволяет опытным путем анализировать звуковые негармонические колебания сложной формы, т. е. определять частоту основного тона и относительную силу обертонов. Для такого анализа звуков может служить набор *резонаторов Гельмгольца*, представляющих собой полые шары различных размеров, изготовленные из стекла или латуни (рис. 163) и имеющие по два отверстия: одно широкое, через которое колебания воздуха передаются внутрь шара, и другое узкое, которое экспериментатор вставляет в ухо. Звук любой формы возбуждает в резонаторе Гельмгольца собственные колебания воздуха, частота которых определяется объемом воздуха, заключенного в резонаторе. Но эти собственные колебания воздуха только тогда приобретают большую амплитуду и дают ощущение громкого звука, когда их частота близка к частоте основного тона или к частоте какого-либо сильного обертона возбудившего их звука. Таким образом, слушая некоторый звук и последовательно прикладывая к уху различные резонаторы Гельмгольца, собственные частоты которых известны, нетрудно определить частоту основного тона исследуемого звука и частоты тех обертонов, которые имеют наибольшую амплитуду.

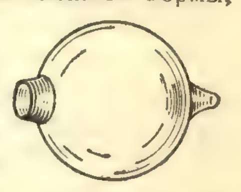


Рис. 163. Резонатор Гельмгольца.

Для более точного анализа звуков применяют электроакустические приборы, в которых звуковые колебания преобразуются в электрические колебания той же формы и эти электрические колебания разлагаются на гармонические составляющие.

Результаты анализа звука часто выражают графически в виде *акустического спектра*: на оси абсцисс откладывают частоты, на оси ординат — относительные силы гармонических составляющих (основного тона и обертонов), выраженные в процентах от силы наи-

более интенсивной составляющей; обычно для ординат пользуются логарифмическим масштабом. На рис. 164 представлены акустические спектры для некоторых звуков, издаваемых музыкальными инструментами (частота основного тона анализируемого звука указана в скобках на каждом спектре рядом с названием инструмента).

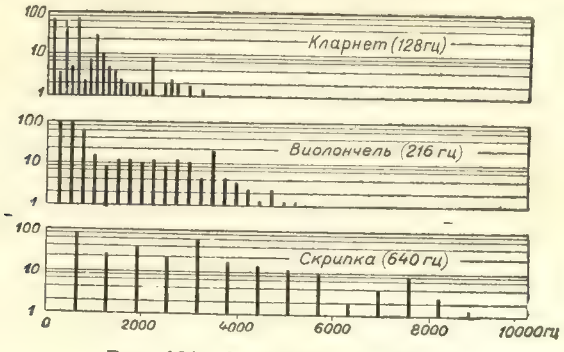


Рис. 164. Акустические спектры.

Положение вертикальных штрихов указывает частоты гармонических составляющих анализируемого звука, а высота этих штрихов определяет относительную силу этих составляющих. Из приведенных спектров видно, сколь сложен каждый звук, издаваемый музыкальным инструментом.

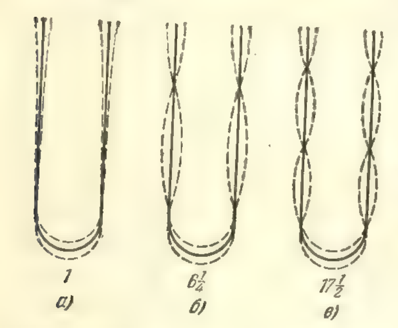


Рис. 165. Основной и добавочные тоны камертона.

Частоту основного тона такого сложного звука мы воспринимаем как высоту звука; сила и число обертонов и характер нарастания звука определяют *тембр* звука.

Наиболее «чистый» звук (т. е. звук со слабыми и малочисленными обертонами) можно получить посредством камертона, если осторожно провести смычком скрипки по свободному концу ветвей камертона. Чтобы этот звук был явственно слышен, камертон ставят на резонаторный ящик, открытый с одного конца (длина этого ящика должна быть равна четверти длины волны основного тона камертона в воздухе).

Ветви камертона колеблются так, что образуется *стоячая волна*, показанная пунктиром на рис. 165, *а*. На это колебание, которое соответствует основному тону, накладываются колебания, которые по-

рождают добавочные тоны, причем заметно выражены те гармонические колебания, частоты которых в $6^1/_4$ и $17\frac{1}{2}$ раз превосходят частоту основного тона.

Если провести смычком скрипки несколько ниже середины ветви камертона, то преобладающим колебанием будет то, которое показано на рис. 165, *б*. В этом случае камертон издает весьма чистый первый добавочный тон, частота которого в $6^1/_4$ раз больше частоты основного тона.

Частота основного тона звука, издаваемого *музыкальной трубой* (например, флейтой, кларнетом, фаготом и др.), зависит от длины столба воздуха, резонансные колебания которого усиливают возбужденный в трубе звук. В этом столбе воздуха возникают стоячие звуковые волны, причем если труба открыта с обоих концов, то на концах трубы будут находиться пучности стоячей волны; если же труба открыта только с одного конца, то у открытого конца будет

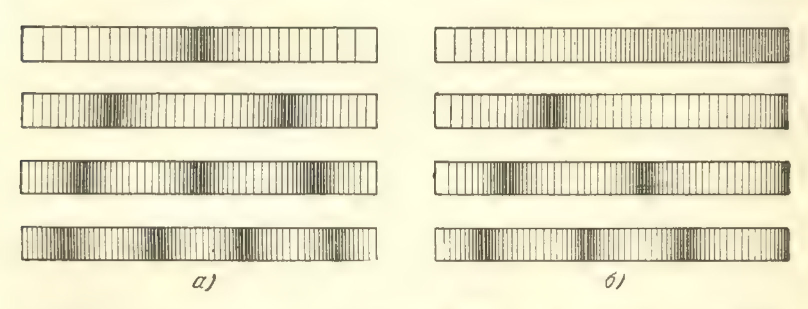


Рис 166 Колебания воздуха в трубе, открытой с обоих концов (*а*) и с одного конца (*б*).

находиться пучность, а у закрытого — узел. В любой стоячей волне расстояние между пучностями всегда равно половине длины волны, поэтому основной тон звука, резонансно усиливаемого открытой с обоих концов трубой, имеет длину волны, равную *удвоенной длине трубы*. Одновременно с этим основным колебанием в трубе, открытой с обоих концов, могут происходить колебания *со всеми кратными частотами* (рис. 166).

Если труба закрыта с одного конца, то основной тон звука, резонансно усиливаемого этой трубой, будет иметь длину волны, равную *учетверенной длине трубы* (в этом случае, как было упомянуто, у открытого конца трубы будет находиться пучность, а у закрытого — узел; расстояние же между пучностью и узлом равно четверти длины волны).

Сопоставляя рис. 166, *а* и *б*, нетрудно сообразить, что для трубы, закрытой с одного конца, числа колебаний основного тона и обертонов будут относиться, как 1 : 3 : 5 : 7 и т. д., т. е. *четные*

обертоны отсутствуют (действительно, если мы разрежем вертикально посредине рис. 166, *а* и отбросим фигуры, где в середине трубы имеется пучность, а не узел, то получим изображение всех возможных стоячих волн в трубе, закрытой с одного конца, т. е. получим рис. 166, *б*).

Частотный состав звука, издаваемого *струной*, зависит от длины, массы и натяжения струны, а также и от способа возбуждения колебаний струны. Основной тон и обертоны звука, издаваемого струной, соответствуют стоячим волнам поперечных колебаний струны.

Стоячие волны в струнах были исследованы Мельде (1860), схема опытов которого представлена на рис. 167. Мельде для возбуждения колебаний струны пользовался камертоном, к одной из ветвей которого был прикреплен один конец струны, тогда как другой конец струны был переброшен через блок и нагружен гирей. Указанный способ возбуждения колебаний интересен в том отношении, что в данном случае продольные импульсы, сообщаемые камертоном струне, порождают поперечные колебания струны. Это — случай так называемого *параметрического возбуждения колебаний* (от слова «параметр» — величина; воздействие колеблющегося камертона на струну заключается в периодическом изменении величины натяжения струны).

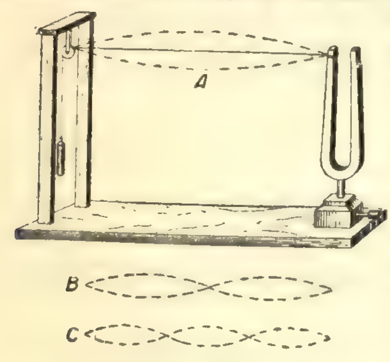


Рис. 167. Опыт Мельде.

В опыте Мельде стоячие волны колебаний струны образуются и являются резко выраженными при определенном соотношении между числом колебаний камертона и собственной частотой поперечных колебаний струны. Этот случай резонанса называют *параметрическим резонансом*; он наблюдается, когда частота внешнего воздействия (частота камертона) в целое число раз превышает собственную частоту колебаний системы (струны). Собственная частота поперечных колебаний струны пропорциональна корню квадратному из натяжения струны. Воспроизводя опыт Мельде, нетрудно подобрать такую гирю, натягивающую струну, чтобы собственная частота колебаний струны была в два раза меньше частоты колебаний камертона; тогда образуется стоячая волна, показанная на рис. 167, *A*. При гире в четыре раза меньшего веса возникает узел посредине струны (рис. 167, *B*); если уменьшить вес гири в 9, 16, 25 и т. д. раз, то число узлов каждый раз возрастает на единицу.

Законы колебания струн открыл Мерсе́н (1636). Эти законы были обобщены Тейлором (1713) в формуле, выведенной теоретически:

$$\nu_i = \frac{1+n_i}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}}; \qquad (8)$$

здесь при $n_i = 0$ ν_0 означает частоту основного тона, издаваемого струной; при $n_i = 1, 2, 3, 4$ и т. д. ν_i означает частоту соответствующего обертона; L — длина струны; T — натяжение струны; m — масса единицы длины струны.

Относительная сила обертонов зависит от способа возбуждения колебаний струны. Например, если осторожно провести смычком посредине струны, где находится узел стоячей волны первого обертона, то возбуждается звук, почти не содержащий первого обертона.

Звуки речи излучаются голосовыми связками, колебания которых имеют очень сложный характер. Благодаря резонансным свойствам полости глотки и главным образом полости рта характер звука, излучаемого связками, претерпевает резкое изменение: отдельные компоненты, частоты которых приближаются к собственным частотам резонансных полостей, усиливаются, и именно на них и сосредоточивается максимальная энергия излучаемого звука. Так как собственная частота полости определяется ее размерами и формой, то очевидно, что положение максимально усиливаемых компонентов определяется формой, придаваемой полости рта при произнесении того или иного речевого звука.

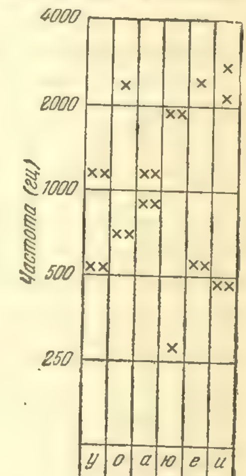


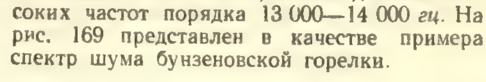
Рис. 168. Область частот, характерных для гласных звуков (форманты гласных звуков).

Мы знаем по ежедневному опыту, что каждому звуку речи соответствует известная форма полости рта, определяемая положением языка и губ; следовательно, *каждому звуку речи соответствует одна или несколько характеристических областей частот*, лежащих вблизи собственных частот резонирующих полостей. Именно эта концентрация звуковой энергии в определенных (для гласных звуков очень узких) областях частот и дает нам возможность отличать звуки речи один от другого. Эти характерные для каждого речевого звука области частот называют *формантами*. Положение формант отдельных гласных звуков показано на рис. 168: двумя крестами обозначены основные (главные) форманты, одним крестом обозначены второстепенные форманты, характеризующие главным образом индивидуальные особенности тембра.

Согласные звуки, по своей природе скорее приближающиеся к шумам, также характеризуются формантами. Однако формантные области здесь ш и р е, чем у гласных, охватывая значительно более широкий диапазон частот. Нужно заметить, что в процессе возбуждения отдельных согласных звуков участвуют не только голосовые связки, но и сами резонансные полости, например при произнесении согласной «с» струя воздуха продувается между языком и зубами; этим и определяется ее свистящий характер. Для некоторых согласных форманты лежат в области очень высоких частот (например, спектр согласной «с» простирается до 13 000 *гц*).

В отличие от музыкальных звуков, в которых всегда можно обнаружить совокупность гармонических колебаний, *шумы* представляют собой звуки,

обусловленные процессами, частота и амплитуда которых изменяются со временем. Как было пояснено выше, для музыкальных звуков является характерным линейчатый акустический спектр. В шуме, если попытаться разложить его на гармонические колебания, обнаруживаются колебания всех частот, вплоть до очень вы-



соких частот порядка 13 000—14 000 *гц*. На рис. 169 представлен в качестве примера спектр шума бунзеновской горелки.

Рис. 169. Спектр шума бунзеновской газовой горелки.

§ 69. Явление Допплера

Когда мы находимся на платформе железнодорожной станции, мимо которой проносится поезд, легко заметить резкое понижение высоты звука гудка паровоза, что свидетельствует об уменьшении частоты звука. Изменение тона наблюдают в тот момент, когда паровоз, поравнявшись с наблюдателем, начинает удаляться. Причина описанного явления, называемого явлением Допплера, заключается в том, что при приближении источника каких-нибудь волн к наблюдателю приходит большее число волн в секунду, чем когда источник колебаний удаляется. Это приводит к тому, что наблюдатель воспринимает большее число колебаний в секунду, когда источник приближается к нему, и меньшее, когда удаляется.

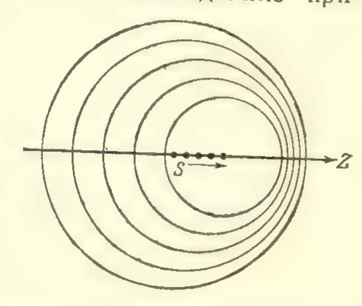


Рис. 170. Волны движущегося источника звука.

Пусть *источник звука S движется* (рис. 170) к наблюдателю со скоростью v *м/сек*. Источник звука посылает звуковые колебания с частотой ν. Следовательно, за $\frac{1}{\nu}$ сек. источник S посылает одну волну, распространяющуюся с некоторой скоростью c. За время $\frac{1}{\nu}$ источник S приближается к наблюдателю на величину $v\cdot\frac{1}{\nu}$ *м*. Следовательно, конец следующей волны, исходящий от источника через $\frac{1}{\nu}$ секунд, будет отделен в пространстве от конца предыдущей волны не расстоянием $\lambda = \frac{c}{\nu}$ (длина волны), как это было бы в случае неподвижного источника, а меньшим:

$$\lambda' = \frac{c}{\nu} - \frac{v}{\nu} = \frac{c-v}{\nu}.$$

Таким образом, наблюдатель будет воспринимать звук меньшей длины волны λ'. Соответствующая частота

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{\nu}{1 - \frac{v}{c}}. \tag{9}$$

Легко вывести аналогичным образом, что если источник звука удаляется со скоростью v, то воспринимаемая наблюдателем частота равна:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}}. \tag{9'}$$

Если рассматривать *движение наблюдателя* к источнику звука, то вследствие более частых «встреч» с гребнями волн частота воспринимаемых колебаний увеличивается.

Пусть наблюдатель движется к источнику звука со скоростью v *м/сек*. Тогда скорость звука относительно наблюдателя будет равна $c + v$ и мимо наблюдателя в единицу времени пройдет ν' волн, причем, как обычно,

$$\nu' = \frac{c + v}{\lambda};$$

с другой стороны,

$$\nu = \frac{c}{\lambda};$$

таким образом,

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{v}{c}\right). \tag{10}$$

При движении наблюдателя от источника получим соответственно:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right). \tag{10'}$$

Все формулы, относящиеся к указанным случаям, при малых значениях скорости v делаются тождественными. Именно

$$\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{v}{c}\right), \tag{11}$$

где знак минус соответствует удалению, а плюс — сближению наблюдателя и источника со скоростью v.

§ 70. Звук как психофизиологическое явление. Механизм звукового восприятия

Обратимся к субъективному восприятию звука. Здесь прежде всего необходимо отметить, что не каждый доходящий до уха колебательный процесс может вызвать ощущение звука: для этого необходимо, чтобы частота процесса и сила звука не выходили за

некоторые (правда, довольно широкие) пределы. Нижней границей частоты является частота около 20 колебаний в 1 сек. (20 *гц*), верхняя граница лежит между 16 000 и 20 000 *гц*. Положение этих границ не для всех людей одинаково и подвержено индивидуальным колебаниям, в отдельных случаях довольно значительным. Частоту, лежащую внутри указанных границ, принято называть *звуковой частотой*. Подобные же границы существуют и для силы воспринимаемых ухом звуков. Для того чтобы волна звуковой частоты создала ощущение звука, необходимо, чтобы сила звука превышала некоторую минимальную величину, называемую *порогом слышимости*. Звук, сила которого лежит ниже порога слышимости, ухом не воспринимается. Он слишком слаб для этого. С другой стороны, звуки очень большой силы (порядка сотен тысяч *эрг/см²сек*) также не воспринимаются как звук, вызывая лишь ощущение боли и давления в ухе. Максимальная величина силы звука, при превышении которой уже возникает боль, называется *порогом болевого ощущения*.

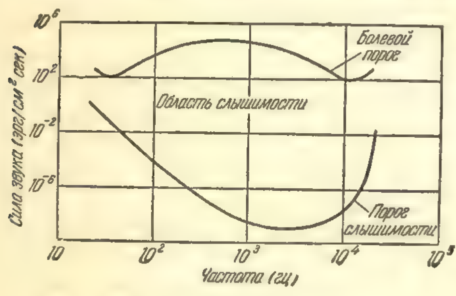


Рис. 171. Область слышимости.

Значения обоих порогов — слышимости и боли — различны в различных областях частот. Ухо наиболее чувствительно в области средних частот (1000—3000 *гц*): порог слышимости здесь 10^{-8} *эрг/см² сек*. При такой силе звука амплитуда колебаний частиц воздуха имеет порядок всего 10^{-10} *см*, т. е. в сотни раз меньше диаметра молекул. В области низких и высоких частот порог слышимости лежит гораздо выше, т. е. ухо гораздо менее чувствительно к низким и высоким звукам. Порог болевого ощущения лежит наиболее высоко в области средних частот, несколько понижаясь как в сторону более низких, так и в сторону более высоких частот.

На рис. 171 представлены кривые, показывающие зависимость обоих порогов от частоты. Верхняя кривая относится к болевому порогу, нижняя — к порогу слышимости. Очевидно, что область, лежащая между обеими кривыми, определяет диапазон частот и сил всех воспринимаемых ухом звуков, поэтому эту область называют *областью слышимости*.

Ухо представляет собой звукоприемный аппарат, работающий в чрезвычайно широком диапазоне частот и амплитуд. Большая широта области слышимости (не надо забывать, что на рис. 171 оси координат построены для экономии места в логарифмическом масштабе) связана с довольно сложным устройством слухового аппарата. Мы ограничимся здесь описанием весьма упрощенной схемы (рис. 172).

Звуковая волна, доходя до ушной раковины, попадает в наружный слуховой проход *1*, в конце которого находится *барабанная перепонка* *8*. Под действием периодически меняющегося давления в звуковой волне барабанная перепонка колеблется, совершая вынужденные колебания с частотой воспринимаемого звука. Колебания барабанной перепонки через посредство действующей как рычаг системы сочлененных косточек *2* — молоточка, наковальни и стремечка — передаются так называемому овальному окну *3*, закрывающему внутреннюю полость ушного лабиринта. Ушной лабиринт в той его части, где лежат чувствительные к механическому раздражению окончания слухового нерва, заполнен почти несжимаемой жидкостью — *эндолимфой*; эндолимфа передает колебания овального окна круглому окну *5*, причем в своем движении она заставляет колебаться определенные части так называемой *основной мембраны* *6*. Основная мембрана является главнейшей и наиболее интересной частью органа слуха; она представляет собой ряд волокон различной длины (общим числом несколько тысяч), настроенных каждое на некоторый определенный тон. Нечто похожее представляет собой система натянутых струн рояля: каждая струна имеет свою собственную частоту, и если в доходящей до струн звуковой волне содержатся колебания с этой именно частотой, то соответствующая струна начинает колебаться (явление резонанса). Точно так же и движения эндолимфы обусловливают колебания тех волокон основной мембраны, которые настроены на частоты, содержащиеся в воспринимаемой звуковой волне. При этом нервные окончания (так называемые волосатые клетки) прикасаются к параллельно идущей *текториальной мембране* *7*, чем и вызывается специфическое нервное раздражение.

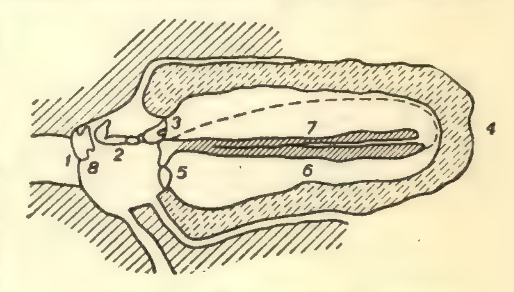


Рис. 172. Схема слухового аппарата.

Изложенная здесь картина механизма слухового восприятия была разработана в прошлом столетии Гельмгольцем (резонансная теория слуха). Теория Гельмгольца встретила целый ряд возражений, для устранения которых неоднократно предлагались другие теории слуха. Однако, несмотря на некоторые немаловажные трудности, до последнего времени считали, что резонансная теория в ее современной форме лучше всех других согласуется с данными, добытыми анатомией и физиологией органа слуха.

В связи с описанным выше механизмом слухового восприятия становится понятным то обстоятельство, что ухо способно к различению отдельных компонентов сложного звука (например, аккорда). Орган зрения — глаз — при восприятии одновременных колебаний с различными частотами (например, сложного цвета) в противоположность уху не обладает свойствами спектрального аппарата; он не разлагает сложного колебания на простые составляющие. Напротив, орган слуха анализирует колебательный процесс, развертывая его в спектр простых гармонических колебаний; таким образом, с физической точки зрения ухо является как бы набором резонаторов, обладающих ясно выраженным свойством избирательности.

Следует заметить, что относительно природы этих резонаторов могут быть высказаны предположения, глубоко отличающиеся от теории Гельмгольца. В 1948 г. Я. И. Френкелем была предложена новая, релаксационная, теория слуха. Френкель писал:

«Физикам уже давно известно, что наряду с явлением резонанса, обусловленного совпадением частоты возбуждающих колебаний («внешней силы») с частотой собственных (или свободных) колебаний воспринимающей их системы, существует до некоторой степени аналогичное явление в том случае, когда

соответствующая система вовсе не обладает упругостью, т. е. когда ее собственная частота колебаний равна нулю, но когда она испытывает при своем движении силу трения, прямо пропорциональную скорости. Эту силу трения можно характеризовать некоторым *временем релаксации* τ, т. е. временем, необходимым для возвращения системы в нормальное (неподвижное) состояние при устранении возмущающих внешних сил». Для подобных систем (не обладающих упругостью и характеризующихся трением, которое пропорционально скорости) поглощение энергии колебательного движения, подводимой извне, оказывается максимальным, когда угловая частота вынужденных колебаний совпадает с обратным значением времени релаксации ($\omega_{\text{вын}}=\frac{1}{\tau}$), что как бы соответствует явлению резонанса. Я. И. Френкель считает, что «все биологические системы (в том числе различные ткани, в частности нервная и мышечная) принадлежат к категории таких, которые если и не вовсе лишены способности к свободным колебаниям упругого характера, то во всяком случае обладают ею в минимальной степени (соответствующей весьма малым значениям частоты собственных колебаний по сравнению с частотой колебаний внешних сил). Так, например, у обыкновенной резины при комнатных температурах время релаксации имеет порядок $\tau=10^{-7}$ сек., тогда как период свободных колебаний небольшого куска резины не превышает 1/50 сек. Применяя этот принцип к слуховому аппарату человека и других высших животных, мы можем высказать гипотезу, что окончания слухового нерва, разветвляющиеся в улитке наподобие гребешка, характеризуются не различными значениями частоты собственных колебаний (все эти частоты можно в действительности считать равными нулю), а различными значениями времени релаксации. Различные значения, вероятно, находятся в простой связи с длиной нервных волоконец, а именно: чем длиннее волокно, тем больше время релаксации, характеризующее его поведение при погружении в вязкую жидкость, которой наполнено внутреннее ухо».

Интенсивности звука соответствует ощущение *громкости звука*. Понятно, что интенсивность звука и громкость являются понятиями неравнозначными. Интенсивность звука объективно характеризует физический процесс независимо от того, воспринимается ли он слушателем или нет; громкость же является чисто субъективным качеством; поэтому, строго говоря, количественный масштаб к ней неприложим. Однако, если мы расположим громкости одного и того же звука в виде ряда, возрастающего в том же направлении, что и сила звука, и будем руководствоваться воспринимаемыми ухом ступенями прироста громкости (при непрерывном увеличении силы звука), то найдем, что громкость возрастает значительно медленнее силы звука. Согласно известному психофизическому закону Вебера — Фехнера ухо, как и все органы чувств, оценивает интенсивность внешнего раздражения в логарифмическом масштабе: *прирост силы ощущения пропорционален логарифму отношения энергий двух сравниваемых раздражений.*

При выборе шкалы громкостей этот логарифмический закон должен быть принят во внимание. Условимся считать, что на пороге слышимости громкость равна нулю; согласно закону Вебера — Фехнера громкость некоторого звука будет пропорциональна логарифму отношения его силы I к силе того же самого звука на пороге слышимости I_0:

$$L=k\log\frac{I}{I_0}. \tag{12}$$

В этом равенстве L выражает собой некоторую отвлеченную величину, характеризующую громкость звука, сила которого равна I; k есть коэффициент пропорциональности. Величину L обычно называют *уровнем звука*.

Выбор коэффициента пропорциональности k, вообще говоря, совершенно произволен. Если положить его равным единице, то уровень звука выразится в единицах, получивших название *белов*:

$$L = \log \frac{I}{I_0} \text{ белов.}$$

Практически оказалось более удобным пользоваться единицами, в 10 раз меньшими; эти единицы получили название *децибелов*. Коэффициент k в формуле (12) при этом, очевидно, равняется 10:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ децибелов.} \qquad (12')$$

Чтобы получить более конкретное представление о децибеле, следует заметить, что минимальный прирост громкости, воспринимаемый человеческим ухом, примерно равен 1 децибелу. Нижеприведенная табличка дает возможность ориентироваться в значениях уровня громкости различных звуков.

Уровни различных звуков

Звук	Уровень в децибелах	Сила звука[1]) в *эрг/см²сек*	Эффективное давление [1]) в *дин/см²*
Тиканье часов	20	$1 \cdot 10^{-4}$	$6{,}4 \cdot 10^{-2}$
Тихий разговор	40	$1 \cdot 10^{-2}$	$6{,}4 \cdot 10^{-1}$
Речь средней громкости	60	1	6,4
Крик	80	$1 \cdot 10^{2}$	$6{,}4 \cdot 10$
Фортиссимо большого оркестра	100	$1 \cdot 10^{4}$	$6{,}4 \cdot 10^{2}$
Ощущение боли	120	$1 \cdot 10^{6}$	$6{,}4 \cdot 10^{3}$

[1]) Числа в графах «Сила звука» и «Давление» вычислены для звуков в средней области частот (около 1000 *гц*) и носят ориентировочный характер

Исследования С. Н. Ржевкина и др. показали, что закон Вебера — Фехнера неудовлетворительно передает нарастание громкости в зависимости от интенсивности звука. Вблизи порога слышимости этот закон вообще теряет силу, поэтому уровень громкости очень слабых звуков не дает количественного представления об их субъективной громкости.

По неодинаковой громкости при восприятии звука (большой частоты) правым и левым ухом в слуховом центре мозга создается *представление о направлении* прихода звуковых волн (это — так называемый *бинауральный эффект*). В случае звуков низкой частоты

бинауральный эффект обусловлен ощущением разности фаз звуков, слышимых правым и левым ухом. Если к одному уху звук приходит на $3 \cdot 10^{-5}$ сек. раньше или позже, чем к другому уху, это уже делается заметным и оценивается нами как отклонение источника звука примерно на 3° от прямой «прямо перед» наблюдателем.

§ 71. Высота и тембр звука

Как уже упоминалось, частоте звуковых синусоидальных колебаний соответствует ощущение высоты звука. В случае сложных несинусоидальных колебаний высота звука оценивается ухом по высоте основного тона (период основного тона совпадает с периодом анализируемого звука). Обертоны, даже если их относительная сила велика, мало влияют на ощущение высоты звука.

Чтобы дать представление о высоте звуков, наиболее используемых в музыке, отметим, что у рояля самый низкий звук соответствует 27 колебаниям струны в секунду, а самый высокий — 4184 *гц*.

Ряд звуков, отличающихся по числу колебаний в два раза, т. е. составляющих октаву, воспринимается как ряд звуков, равноудаленных друг от друга по высоте. Таким образом, геометрическая прогрессия частот звуков соответствует арифметической прогрессии в субъективной оценке высоты звуков.

Музыкальные звуки составляют восемь октав: субконтроктава (16—32 *гц*), контроктава (32—65,5 *гц*), большая октава (65,5—131 *гц*), малая октава (131—262 *гц*), первая октава (262—523 *гц*; в физике эту октаву принято обозначать как третью), октавы вторая (523—1046 *гц*), третья (1046—2092 *гц*) и четвертая (2092—4184 *гц*).

Голоса певцов характеризуются следующими диапазонами частот и соответствующих им длин волн основных тонов:

	Частота в *гц*	Длина волны в воздухе при 15° С в *см*
Бас	90— 340	380—100
Баритон	110— 440	310— 77
Тенор	130— 520	260— 65
Контральто	200— 780	170— 44
Меццо-сопрано	220— 880	130— 32
Сопрано	260—1050	155— 39
Колоратурное сопрано	—1390	— 25

Ухо не способно оценить высоту звука, если продолжительность звучания составляет меньше 1/20 сек. В случае самых низких воспринимаемых нами звуков за указанное время, необходимое для оценки высоты звука, происходит одно-два колебания, в случае самых высоких слышимых звуков — до 1000 колебаний.

При одновременном звучании двух близких по частоте тонов их высота воспринимается раздельно, если относительная разность частот этих звуков превосходит 2—3%:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 0{,}02.$$

При меньшей разности частот слышится один слитный звук средней высоты.

При одновременном звучании близких друг к другу тонов возникают *биения* (быстро следующие друг за другом замирания и усиления звука), которые оказываются в особенности неприятными для слуха, если число биений достигает 33 в 1 сек.

При одновременном звучании двух тонов с большой силой звука (так же как и вообще при колебательном движении тела под действием двух периодических сил большой амплитуды, когда пропорциональность между смещением и действующими силами является нарушенной) обычные законы сложения колебаний усложняются. В этом случае, как показал Гельмгольц, совместное действие двух вынуждающих периодических сил с частотами ν_1 и ν_2 дает результирующее колебание такой формы, что его можно считать состоящим из четырех гармонических колебаний с частотами ν_1, ν_2, $\nu_1 - \nu_2$ и $\nu_1 + \nu_2$. Два последних колебания носят название *комбинационных колебаний* — разностного и суммарного. Комбинационные колебания могут возникать в нашем слуховом аппарате (вследствие отклонения от пропорциональности между смещением стремечка и упругими силами тканей). Обычно отчетливо слышны разностные комбинационные тоны, что же касается суммарных комбинационных тонов, то они едва заметны.

Для музыкальных целей более важна не абсолютная, а *относительная высота* звуков. При построении музыкальной последовательности звуков — при построении мелодии, а также и при музыкальном одновременном сочетании звуков — в гармонии звуков — пользуются преимущественно такими интервалами частот, при которых отношения частот звуков $\frac{\nu_1}{\nu_2}$, $\frac{\nu_2}{\nu_3}$ и т. д. выражаются дробями $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ и т. д. Каждому такому *музыкальному интервалу*, определяемому отношением частот звуков присвоено особое название:

Название созвучий	Отношение частот	Название созвучий	Отношение частот
Унисон (прима)	1:1	Терция большая . . .	4:5
Октава	1:2	Терция малая	5:6
Квинта	2:3	Дуодецима	1:3
Кварта	3:4	Секста большая	3:5

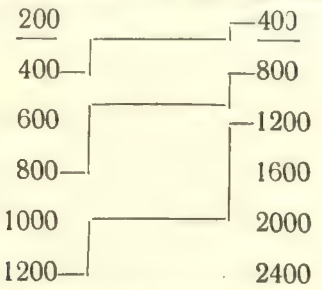
Перечисленные наиболее благозвучные интервалы носят общее название *консонансов* [1]). Применяются и менее благозвучные интервалы — *диссонансы* [2]):

Название созвучий	Отношение частот	Название созвучий	Отношение частот
Секунда большая (тон большой)	8:9	Септима большая . . .	8:15
Секунда малая (тон малый)	9:10	Септима малая	5: 9
		Полутон большой . . .	15:16
		Полутон малый	24:25

Всякий интервал, меньший малого полутона, называют *коммою*, но обычно под коммою подразумевают интервал 80 : 81.

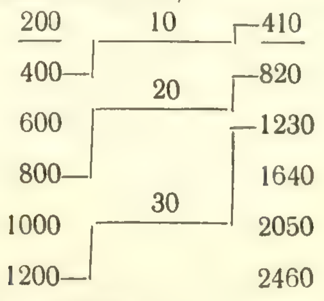
Обращает на себя внимание тот факт, что в музыке не применяются интервалы, определяемые дробями, содержащими число 7. Это число как бы отделяет консонансы от диссонансов (дроби, определяющие консонансы, имеют в числителе и в знаменателе числа, меньшие 7).

Совершенство консонанса, по-видимому, стоит в связи с числом тонов, общих у обоих звуков. Возьмем, например, два звука с частотами 200 и 400 *гц*, составляющими октаву, и выпишем частоты их пяти низших обертонов:



Мы видим, что у двух звуков, составляющих октаву, из пяти низших обертонов два обертона являются общими, и, помимо того, основной тон высшего звука совпадает с первым обертоном низшего звука.

Диссонанс производит тем менее благозвучное впечатление, чем больше биений (имеющих частоту порядка 10—50 *гц*) возникает от сочетания обертонов и комбинационных тонов звуков. Например, возьмем несколько «расстроенную» октаву: два звука с частотами 200 и 410 *гц*:



[1]) От латинского слова consonare — согласоваться.
[2]) От латинского слова dissonare — не согласоваться.

Мы видим, что в этом случае возникают биения с частотами 10, 20 и 30 *гц*. Помимо того, основные тоны указанных звуков дают комбинационный разностный тон с частотой 210, от сочетания которого с основным тоном низшего звука также возникает биение с частотой 10 *гц*.

С. Н. Ржевкин обнаружил, что при раздельном слушании двух звуков различными ушами ощущение диссонанса и консонанса полностью исчезает; стало быть, восприятия консонанса и диссонанса создаются в периферических органах слуха, а не в центральной нервной системе.

Сочетания трех или большего числа звуков называют *аккордом*. Наиболее благозвучный аккорд — *мажорное трезвучие* — получается, когда частоты основных тонов удовлетворяют отношению 4 : 5 : 6. На повторении этого аккорда построена *натуральная мажорная гамма*.



Действительно, нетрудно видеть, что при указанных интервалах частоты звуков: do — mi — sol, а также sol — si — re и fa — la — do_1 относятся, как числа 4 : 5 : 6 $\left(\text{например, } \frac{\nu_{do}}{\nu_{mi}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\right)$.

Мажорное трезвучие представляет собой сочетание звука (какой-либо частоты ν) с его большой терцией $\left(\frac{5}{4}\nu\right)$ и квинтой $\left(\frac{3}{2}\nu\right)$, что соответствует соотношению частот $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 4 : 5 : 6$. Весьма благозвучным является также *минорное трезвучие*, которое представляет собой сочетание звука (какой-либо частоты ν) с его малой терцией $\left(\frac{6}{5}\nu\right)$ и квинтой $\left(\frac{3}{2}\nu\right)$; это соответствует отношению частот $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2} = 10 : 12 : 15$. На повторении минорного созвучия построена *натуральная минорная гамма*:



(знак ♭ носит название *бемоль* и означает понижение высоты звука на полутон, т. е. на $\frac{16}{15}$. Повышение звука на полутон обозначается знаком ♯ — *диез*). При указанных интервалах между звуками гаммы получаются минорные трезвучия: do — mi♭ — sol, а также sol — si♭ — re_1 и fa — la♭ — do_1 $\left(\text{например, } \frac{\nu_{do}}{\nu_{mi\flat}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} = \frac{10}{12}\right)$. Наряду с указанной минорной гаммой, которой пользуются в музыке при составлении мелодий как «нисходящей» гаммой, применяют также «восходящую» минорную гамму, которая отличается от мажорной гаммы только заменой звука mi на mi♭. В гармонии применяется минорная гамма, отличаю-

щаяся от мажорной заменой звуков: mi на $mi^{\flat}$ и la на $la^{\flat}$ (но si берется без бемоля).

Как видно из вышеприведенных схем мажорной и минорных гамм, интервалы между смежными звуками в этих натуральных гаммах неодинаковы. Это приводит к существенным неудобствам, во избежание которых сделано соглашение: жертвуя абсолютной музыкальной чистотой, применять так называемую *темперированную гамму*, содержащую в октаве 12 равных между собой интервалов, так что частота каждого смежного звука в $\sqrt[12]{2}=1{,}05946$ раза превосходит частоту предыдущего звука. Схема темперированной гаммы представлена на рис. 173. Важнейшие консонансы в темперированной гамме почти не нарушаются: унисон и октава, понятно, остаются неизменными; кварта и квинта в темперированной гамме выражаются отношениями единицы к $2^{\frac{5}{12}}=1{,}3348$ и к $2^{\frac{7}{12}}=$ $=1{,}4983$, тогда как в натуральных гаммах кварта и квинта выражаются отношениями $\frac{4}{3}=1{,}3333$ и $\frac{3}{2}=1{,}5000$.
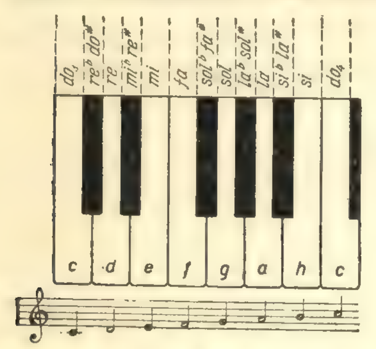


Рис. 173. Гамма на рояле (обозначения нот).

Согласно международному соглашению (1936г.) частота звука la_3 (la — второй струны скрипки) принята равной 440 *гц*. В таблице приведены частоты других звуков темперированной гаммы.

Обозначение звука (название нот)	Частота в темперированной гамме	Длина волны (в *см*) в воздухе при 15° С ($c\sim340$ *м/сек*)
do_3	261,6	130
re_3	293,7	115,7
mi_3	329,6	103,2
fa_3	349,2	97,4
sol_3	392	86,7
la_3	440	77,3
si_3	493,9	68,8
do_4	523,2	65,0

Как уже было упомянуто выше (§ 68), тембр звука зависит от числа и относительной силы обертонов. Относительная сила обертонов у одного и того же музыкального инструмента зависит от способа возбуждения звука. Например, тембр звука, издаваемого струной, можно изменять в широких пределах, выделяя те или другие обертоны (для чего, возбуждая звук, нужно проводить смычком там, где находится пучность стоячих волн данного обертона).

Вследствие резонансного выделения тех или иных обертонов тембр звука струнных инструментов сильно зависит от устройства и качества различных (в частности, деревянных) деталей инструмента.

Тембр звука определяется не только числом и относительной силой обертонов, но также характерными *процессами нарастания и изменчивости звука*. Опытами

Штумфа (1926) и других исследователей было установлено, что если исключить начальную стадию установления звука (начинать слушание, когда звучание какого-либо звука делается стационарным), то тембр звука кажется иным, причем в этом случае звуки, издаваемые различными музыкальными инструментами, оказываются настолько сходными в отношении тембра, что даже опытные музыканты часто ошибаются, определяя инструмент по тембру звука.

В смычковых инструментах нарастание каждого извлекаемого звука продолжается примерно 1/10 сек. В течение этой начальной стадии звучания звук является нестационарным не только в отношении амплитуды, но происходит также характерное изменение частотного состава звука В первый момент нарастания звука преобладают высокие обертоны (с частотами от 3000 до 5000 *гц*), и только к концу указанной стадии нарастания звука обертоны уступают по относительной силе основному тону. Мы воспринимаем процесс нарастания звука слитно с последующим стационарным звучанием и впечатление, вызванное начальной стадией, сохраняем как некоторый оттенок звука. У хороших инструментов стадия нарастания звука дает ощущение приятного тембра; строго стационарный звук, прослушанный без начальной стадии нарастания, производит монотонное впечатление и менее приятен. Тембр звуков, издаваемых роялем, заметно изменяется в зависимости от скорости, с которой опускают клавишу (что в известной мере зависит от силы удара).

У большинства духовых инструментов стадия нарастания звука меньше влияет на тембр звука, чем у струнных инструментов. Это отчасти объясняется тем, что у многих духовых инструментов стадия нарастания звука является весьма короткой: у гобоя $\frac{1}{100}$ сек., у кларнета $\frac{1}{20}$ сек. Однако у флейты процесс нарастания звука является относительно продолжительным ($\frac{2}{10} \div \frac{3}{10}$ сек.), и это заметно обогащает тембр звуков флейты.

Для оценки музыкальных качеств голоса хороший тембр голоса, несомненно, является не менее важным, чем сила голоса. Звук хорошего певческого голоса нестационарен: в быстро следующие друг за другом моменты времени (около шести раз в секунду) акустический спектр изменяется так, что сначала подчеркиваются одни обертоны, потом другие. У хороших певцов эта вибрация, обогащающая тембр (вибрато), мало сказывается на громкости, которая остается равномерной.

§ 72. Ультразвуки

Звуковые колебания и волны, характеризующиеся очень большими частотами (не воспринимаемые ухом) порядка нескольких десятков и сотен тысяч герц, вплоть до сотен миллионов герц, называют *ультразвуковыми*.

Ультразвуки относительно небольшой частоты можно получить с помощью *свистка Гальтона*, представляющего собой миниатюрную трубу, возбуждаемую продуванием воздушной струи. Уменьшая с помощью поршенька длину звучащего столба воздуха, можно добиться того, что звук свистка, постепенно повышаясь, наконец, перестанет быть слышен; излучаемая свистком волна переходит в область ультразвуковых частот. С помощью свистка Гальтона и других подобных ему устройств не удается, однако, получить сколько-нибудь интенсивных ультразвуков; помимо малой мощности таких излучателей, очень существенную роль играет здесь еще и то обстоятельство, что в воздухе колебания высокой частоты очень быстро затухают.

С открытием пьезоэлектрических явлений и с разработкой мощных генераторов электрических колебаний высокой частоты оказалось возможным получить ультразвуковые колебания очень большой интенсивности.

Если из кристалла кварца (SiO_2) в некотором определенном направлении к граням кристалла вырезать пластинку, то, прилагая к широким сторонам пластинки через посредство металлических обкладок переменное электрическое напряжение, можно заставить пластинку колебаться. Это происходит благодаря тому, что при сообщении противолежащим сторонам пластинки кварца электрических зарядов противоположного знака пластинка испытывает сжатие или расширение (*пьезоэлектрический эффект*). Колебания кварцевой пластинки, зажатой между металлическими обкладками, становятся особенно интенсивными в том случае, когда частота приложенного переменного напряжения совпадает с собственной частотой колебаний пластинки (резонансные колебания). Кварцевую пластинку с металлическими обкладками погружают в масло, затем, подводя к обкладкам переменное электрическое напряжение, заставляют ее колебаться. При этом в масле распространяются мощные ультразвуковые волны.

Акустическое сопротивление (ρu) масла и воды примерно в 3000 раз больше акустического сопротивления воздуха; поэтому если ту же кварцевую пластинку заставить колебаться в воздухе с той же амплитудой смещения и частотой, то излучаемая энергия будет в 3000 раз меньше.

Посредством пьезокварцевых ультразвуковых генераторов получают колебания с частотами от нескольких десятков тысяч герц до нескольких десятков миллионов герц. Применяя вместо кварца пластинки турмалина (турмалин также обладает пьезоэлектрическими свойствами) и возбуждая колебания пластинки не на основной частоте ее собственных колебаний, а на обертонах, можно получить ультразвуки с частотой порядка 300 млн. *гц*.

Энергия ультразвуковых волн, излучаемая мощными пьезокварцевыми генераторами, весьма велика; интенсивность потока энергии ультразвука в масле или в воде может достигать 10 *вт/см*^{2}, что в 10 000 раз больше силы звука в воздухе от большого оркестра при его максимальном звучании (10^{-3} *вт/см*^{2}).

Следует отметить, что при указанной чрезвычайно большой интенсивности ультразвука порядка 10 *вт/см*^{2} амплитуды смещения частиц и амплитуды их скоростей относительно невелики, но чрезвычайно велика амплитуда ускорений. Амплитуда ускорений может в десятки тысяч и в сотни тысяч раз превосходить ускорение силы тяжести. Амплитуда давлений может иметь величину нескольких атмосфер.

Ультразвуковые волны характеризуются интересными физическими и физиологическими явлениями. Так, например, смеси

несмешивающихся жидкостей, подвергнутые в течение нескольких минут воздействию ультразвука высокой частоты, превращаются в эмульсии. Этот метод эмульгирования жидкостей был разработан С. Н. Ржевкиным (в 1935 г.) и др. Погружая в масло с распространяющимися в нем ультразвуковыми волнами пробирку с водой и ртутью, можно наблюдать, как вода постепенно темнеет благодаря раздроблению ртути на мельчайшие капельки, взвешенные в воде. К погруженному в масло термометру нельзя прикоснуться рукой: вследствие ультразвуковых колебаний стекла рука испытывает ожог, несмотря на то, что термометр показывает небольшую температуру. Живые существа (рыбы, лягушки), подвергнутые интенсивному облучению ультразвуком, погибают в течение нескольких минут. Само масло, в котором возбуждаются ультразвуки, как бы вскипает, разбрызгиваясь над пластинкой кварца фонтаном.

Любопытно отметить, что ультразвуки используются летучими мышами для ориентации при полете в темноте. Способность летучих мышей ориентироваться в темноте всегда вызывала изумление естествоиспытателей. В 1945 г. было обнаружено, что летучие мыши для ориентации в темноте применяют способ, который аналогичен радиолокации и который можно назвать *ультразвуковой локацией*, а именно: летучие мыши в полете издают короткие, в одну сотую секунды, импульсы ультразвука частотой 35—70 *кгц*. Уши летучей мыши воспринимают («слышат») ультразвуки частотой до 100 *кгц*. По времени, которое проходит от изданного летучей мышью ультразвукового «крика» до восприятия его отражения от препятствия, т. е. его эха, летучая мышь безошибочно определяет расстояние до препятствия.

Ультразвуки имеют в настоящее время многообразные применения.

Еще в 1918 г. П. Ланжевен воспользовался ультразвуком для акустического измерения глубины моря (*эхолот*). Это положило начало конструированию многочисленных точных приборов подводной *акустической сигнализации* и *ультразвуковой гидролокации*. Выгодность применения для этих целей ультразвуков связана с тем, что при очень малых длинах волн можно излучать энергию узким направленным пучком. Использование с той же целью коротких и ультракоротких электромагнитных волн, позже примененных в радиолокации, практически является невозможным из-за их интенсивного поглощения в морской воде.

Ультразвуки, применяемые для подводной сигнализации, поглощаются воздухом в 1000 раз сильнее, чем водой.

Установлено, что «прозрачность» газа для ультразвуков различных частот весьма неодинакова: поглощение данным газом ультразвуков определенной области частот иногда в сотни раз превышает поглощение тем же газом ультразвуков других частот. Здесь сказывается совпадение периода ультразвука со временем (весьма

малым) осуществления некоторых межмолекулярных процессов, изучение которых привело к созданию особого отдела акустики — *квантовой акустики*.

Измерения скоростей распространения и коэффициентов поглощения ультразвука служат для изучения важнейших молекулярных свойств жидкостей, паров и газов.

Обнаружено, что ультразвуки большой интенсивности оказывают заметное влияние на характер кристаллизации тел и вызывают ускорение некоторых химических реакций.

Среди биологических явлений, вызываемых ультразвуками, привлекает внимание увеличение урожайности некоторых растений, семена которых были подвергнуты облучению ультразвуком.

В интенсивном потоке ультразвуков многие одноклеточные организмы, стафилококки, красные кровяные шарики погибают, по-видимому, от механических разрывов. На этом свойстве основана *ультразвуковая стерилизация* пищевых продуктов и воды.

В настоящее время широко применяют на практике *ультразвуковое эмульгирование* некоторых лекарственных веществ типа сульфидина. Камфара, которая играет большую роль при лечении сердечных болезней, нерастворима в воде, и поэтому ее нельзя было вводить непосредственно в кровеносные сосуды больного; это, однако, стало возможным благодаря разработанному советскими учеными способу ультразвукового тончайшего эмульгирования камфары. В виде тончайшей эмульсии камфару можно вводить не подкожно, а непосредственно в кровь больного, в результате чего она быстрее достигает сердца, что в некоторых случаях может спасти жизнь больного.

В текстильной промышленности ультразвук применяют для повышения прочности и глубины окраски тканей (с 1927 г.).

Проф. С. Я. Соколов разработал методы применения ультразвуков для обнаружения дефектов в металлических изделиях (раковин и неоднородностей строения). Если покрыть металлическое изделие слоем масла и поставить его на пути распространения ультразвуковых волн, то наличие повреждений и трещин в толще металла вызовет частичное отражение и рассеяние ультразвуковых волн, что́ может быть замечено по степени колебания слоя масла, покрывающего поверхность металла. Это использовано в простейших приборах *ультразвуковой дефектоскопии*.

В более удобных импульсных дефектоскопах С. Я. Соколова исследуемое изделие «просвечивается» ультразвуком (с частотой от одного до нескольких мегагерц), причем отраженные (от трещин, раковин) ультразвуковые импульсы воспринимаются приемной пластинкой и после усиления регистрируются катодным осциллографом (рис. 174).

В одном из сконструированных С. Я. Соколовым приборов (в *ультразвуковом микроскопе*) ультразвуковые лучи, отраженные

небольшим предметом, помещенным в «просвечиваемую» жидкость, собираются акустической линзой из плексигласа на пьезокварцевую пластинку, что́ создает на ней скрытое изображение предмета в виде некоторого распределения зарядов. Чтобы сделать это скрытое изображение видимым, использованы способы, аналогичные принципам телевидения (упомянутую кварцевую пластинку последовательно облучают электронным пучком, выбивающим из нее вторичные электроны, число которых различно в зависимости от заряда

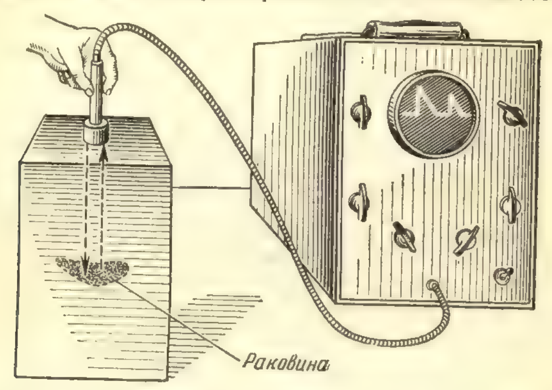


Рис. 174. Ультразвуковой дефектоскоп С. Я. Соколова.

пластинки в данном месте; изменения импульсов тока, вызываемые вторичными электронами, усиливаются и подводятся к электроннолучевой трубке телевизора).

При распространении достаточно мощного ультразвука в жидкости изменения плотности жидкости вдоль волны столь значительны, что сказываются на оптических свойствах жидкости, которая для пучка света, пронизывающего жидкость перпендикулярно к распространению ультразвуковых волн, делается неоднородной. Это явление, открытое Дебаем и Сирсом в 30-х годах нашего столетия, Г. С Ландсберг и Л. И. Мандельштам применили для устройства весьма интересных и полезных приборов: *ультразвуковых модуляторов света* — световых реле. (Подробнее об этом рассказано в третьем томе)

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

ГЛАВА XIII

МОЛЕКУЛЯРНО-ТЕПЛОВОЕ ДВИЖЕНИЕ И ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 73. Исторические сведения. Картина молекулярного движения

Развитие промышленности в XVIII в. поставило перед техникой задачу создания машин-двигателей. Уже применявшиеся водяные и ветряные колеса трудно было использовать на фабриках в городах, да и мощность их была недостаточной. Поэтому в это время стали появляться попытки создать двигатель, обладающий достаточной мощностью, удобный и экономичный в эксплуатации. Многих изобретателей увлекала мечта построить вечный и даровой двигатель — «перпетуум мобиле». Было предложено много фантастических проектов. Придумывались самые хитроумные сочетания рычагов, блоков, грузов, колес и т. п. Однако устройства такого рода, к неизменному разочарованию изобретателей, не только не порождали желаемой двигательной силы, но для приведения в движение сами нуждались (по вине трения) в действии извне. На почве этих многочисленных неудачных попыток начало складываться понимание того, что для реализации двигателя, не связанного с использованием механического действия ветра или потоков воды, нужно вообще выйти за пределы механического движения, нужно обратиться к другим, не механическим явлениям — к тепловым явлениям, к «двигательной силе огня».

Возможность получения работы за счет сжигания топлива была известна еще в древние времена. Герон Александрийский еще 2000 лет назад описал прибор, в котором шар, установленный на трубчатых стойках, приводился в быстрое вращательное движение благодаря реакции, оказываемой струями выходящего наружу пара, поступавшего в шар по трубчатым стойкам из небольшого котла с кипящей водой.

Рабочее движение поршня действием пара впервые было осуществлено ассистентом Гюйгенса Папином (в 1690 г.).

В 1711 г. английский кузнец Ньюкомен сделал машину Папина пригодной для эксплуатации, введя вместо заливки воды под поршень (как было у Папина) периодическое вбрызгивание воды. Однако машина Ньюкомена была маломощна и неэкономична, вследствие чего она не могла получить широкого применения на фабриках.

Первая универсальная паровая машина с автоматическим парораспределением и двумя цилиндрами, работавшими поочередно и непрерывно, была построена в 1763 г. уральским механиком Иваном Ивановичем Ползуновым. Однако из-за косности чиновников это изобретение было заброшено и забыто.

В 1769—1784 гг. английский инженер Уатт в сконструированных им паровых машинах применил отсечку пара на некоторой части хода поршня (чтобы использовать не только работу наполнения цилиндра паром, но и работу расширения пара), холодильник для конденсации отработавшего пара, паровую рубашку для обогрева рабочего цилиндра и автоматический регулятор числа оборотов.

Уатт вносил свои усовершенствования, изучая работу паровой машины посредством изобретенного им прибора (индикатора), измерявшего давление в цилиндре работающей машины при разных положениях поршня. Для теплотехники индикатор имел такое же значение, как весы в химии или телескоп в астрономии.

В первые десятилетия XIX в. двигатели Уатта начали занимать господствующее положение не только на фабриках, но и на транспорте.

Англичанин Фич в 1775 г. построил первую паровую лодку; Фультон (в 1807 г.) построил пароход с лопаточными колесами и Вессель (в 1829 г.) — винтовой пароход. Число и мощность паровых машин, применяемых на судах, росли из года в год с чрезвычайной быстротой. С такой же быстротой распространялось применение паровых машин на железных дорогах после того, как Стефенсон (в 1829 г.) построил локомотив с дымогарными трубами (коренным образом усовершенствовав локомотив, построенный Треветиком в 1804 г.).

В те же годы благодаря паровому двигателю начало развиваться строительство разнообразных обрабатывающих машин и станков, что в совокупности с развитием железных дорог и речного и морского транспорта привело к коренному преобразованию промышленности.

Все это сказалось на направлении научных исследований, где, естественно, начал главенствовать интерес к тепловым процессам.

Представление о теплоте как о роде движения высказывалось отдельными учеными давно: в начале XVII в. философом Бэконом, в конце того же века Гюйгенсом и Ньютоном, в первой половине XVIII в. Вольтером, Даниилом Бернулли и Ломоносовым. Однако никто из предшественников гениального русского ученого Михаила Васильевича Ломоносова не защищал правильного понимания

тепла с такой энергией и последовательностью, как это делал Ломоносов. В своей диссертации «О причинах тепла и холода» (1744 г.) Ломоносов опровергал господствовавшую тогда теорию теплорода и утверждал, что «теплота тел состоит во внутреннем их движении». Рядом примеров он убедительно доказывал, что видимое движение тел переходит в невидимое движение его частиц, например при трении. «Когда холодное железо расковывается молотом...,— писал Ломоносов,— трение между возбуждаемыми частицами железной массы увеличивается, растет вращательное движение частичек и доходит до того, что железо иногда накаливается докрасна». За полстолетие до Лавуазье, доказавшего экспериментально закон сохранения вещества в химических реакциях, Ломоносов дал правильное понимание этого закона и применил его к объяснению химических процессов. Понятия о химических элементах, о молекулах и атомах в трудах Ломоносова сходны с теми представлениями, которые были установлены в XIX в.

Современники Ломоносова — Даниил Бернулли и философ Вольтер — пришли к молекулярно-кинетическому пониманию упругости газов. Ломоносов развил эти воззрения и правильно объяснил обнаруженные опытами Бернулли отклонения сильно сжатых газов от закона Бойля.

Замечательно, что в эпоху господства метафизических теорий (флогистона, теплорода и т. п.) Ломоносов прозорливо предвидел во многих проблемах строго научные решения, свободные от метафизических представлений. Его работы были проникнуты мыслью, что «движение без материи быть не может», что «нельзя отрицать движение там, где глаз его не видит».

Казалось бы, что на основе картины молекулярно-теплового движения, обоснованной в трудах Ломоносова, физика во второй половине XVIII в. должна была бы достигнуть больших успехов в развитии учения о теплоте. Однако этого не случилось. Еще целое столетие продолжала господствовать теория теплорода.

Основатель термодинамики Сади Карно еще придерживался теории теплорода; только в последние годы своей жизни (он умер в 1832 г.) Карно убедился в ошибочности этой теории и дал ясную формулировку принципа эквивалентности тепла и работы; но эти записки его были опубликованы лишь спустя несколько десятилетий после его смерти. Клапейрон, впервые применивший в термодинамике графический метод, продолжал (1834 г.) придерживаться теории теплорода.

Только в 1850—1860 гг. (после того как Роберт Майер обосновал эквивалентность тепла и работы [1])) молекулярно-кинетическая

---

[1]) Соображения Р. Майера о взаимопревращаемости тепла и работы были опубликованы в 1842 г. Но Майер (по профессии врач) не нашел аргументов, которые убедили бы современных ему физиков. Философские рассуждения, биоло-

теория была вновь обоснована Джоулем и Кренигом и развита Клаузиусом и Максвеллом[1]).

Опытными основами молекулярно-кинетической теории в первые годы ее развития служили:

1) явления диффузии и растворения, наглядно указывающие на взаимопроникновение веществ;

2) упругость газов, вязкость жидкостей и газов, теплопроводность, превращения агрегатных состояний;

3) хаотическое движение мельчайших взвешенных в жидкости частиц — *броуново движение*, названное так по имени английского ботаника Броуна, открывшего это явление в 1827 г.

Чтобы обнаружить броуново движение, к воде (или к какой-либо другой жидкости) примешивают микроскопические твердые частицы или мельчайшие капельки какого-нибудь жира (например, прибавляют к воде немного молока) и каплю такой смеси помещают между предметным и покровным стеклышками микроскопа, увеличивающего в несколько сот раз. Тогда наблюдается следующее характерное явление: каждая из взвешенных в жидкости частиц или капелек испытывает непрерывные броски из стороны в сторону, как бы повинуясь каким-то толчкам или как бы отскакивая от каких-то невидимых препятствий (рис. 175). Чем меньше размеры взвешенной частицы, тем оживленнее эти броски. Сопоставляя движения соседних частиц, можно убедиться, что движения частиц совершенно хаотичны как по своему направлению, так и по величине бросков.

Причина броунова движения заключается в том, что микроскопическая капелька или твердая частица, взвешенная в жидкости, в каждый момент получает множество ударов от окружающих ее молекул жидкости. Эти удары дают некоторую равнодействующую, в направлении которой и происходят наблюдаемые броски. Чем крупнее взвешенная частица, тем больше имеется шансов, что

гические наблюдения и гипотезы, преобладавшие в статьях Майера, были встречены с пренебрежением.

В 1847 г. появилось исследование Гельмгольца, где из эквивалентности тепла и работы был развит закон сохранения энергии в привычной для физиков математической форме и на основе фактов, против которых трудно было спорить. Однако, в отличие от Майера, который правильно видел основной смысл нового принципа во взаимопревращаемости качественно различных форм движения (механической, тепловой и др.), Гельмгольц сузил трактовку нового закона, осветив только его чисто количественную сторону — сохранение величины суммарной энергии.

[1]) Сочинение Кренига «Основы теории газов» было напечатано в 1856 г. В 1857 г. появилась классическая работа Клаузиуса по теории газов, где многие вопросы молекулярно-кинетической теории были решены правильно, несмотря на упрощающее предположение, что все молекулы газа при определенной температуре движутся с некоторой одинаковой скоростью. В 1860 г. Максвеллом был опубликован его замечательный труд, положивший начало физической статистике,— «Пояснения к динамической теории газов».

молекулярные удары противоположного направления приблизительно уравновесятся, и поэтому тем менее оживленно движение такой частицы.

Броуново движение как бы воспроизводит в грубой форме картину теплового движения молекул, диаметр которых в тысячи раз меньше диаметра броуновых частиц и скорости которых соответственно больше.

Хаотичность молекулярно-теплового движения в газах сказывается в том, что скорости отдельных молекул не одинаковы по величине и направлению. В неподвижном газе ни одно из направлений молекулярных движений не имеет предпочтения перед другими направлениями.

Рис. 175. Картина броунова движения. Черными кружками отмечены местонахождения броуновой частицы через каждые 30 *сек.*

Некоторое представление о величине скорости поступательного движения молекул в газах дают скорость распространения звука в газах и начальная скорость артиллерийских снарядов и ружейных пуль. Так как молекулы газа почти не связаны друг с другом, то распространение звука в газе, очевидно, непосредственно зависит от молекулярных движений, а значит, скорость этих движений должна приблизительно соответствовать скорости звука в газах, т. е. должна составлять несколько сот метров в секунду. Вылет снаряда из орудия или пули из винтовки происходит под напором молекул газа, образовавшегося от взрыва пороха; ядро или пуля получают свою скорость от газовых молекул, и так как скорость ядра или пули составляет несколько сот метров в секунду, то и молекулярная поступательная скорость примерно такого же порядка.

Вследствие молекулярно-теплового движения всякое тело обладает запасом молекулярно-кинетической энергии. В газах это — энергия поступательного движения молекул и энергия их собственного вращательного движения. В твердых телах частицы (атомы, ионы или молекулы) совершают колебательное движение относительно некоторых положений равновесия (а именно, относительно «узлов кристаллической решетки»). Наряду с энергией движения частиц при тепловых процессах в сильно сжатых газах, жидкостях и твердых телах существенную роль играет потенциальная энергия взаимодействия молекул. При химических процессах проявляется энергия внутримолекулярного взаимодействия между атомами или

ионами; в атомных и ядерных процессах обнаруживается энергия внутриатомных и внутриядерных движений и взаимодействий частиц, образующих атомы. Наконец, способность атомов излучать приводит к тому, что пространство внутри тела является заполненным электромагнитным излучением. Количество излучения весьма невелико, но все же оно играет очень важную роль, обеспечивая внутри тела «тепловое равновесие» между отдельными участками тела. Совокупность кинетической и потенциальной энергии частиц (молекул, атомов, а также частей атома — электронов, атомных ядер) вместе с энергией излучения составляет *внутреннюю энергию* тела.

Для примерной характеристики молекулярных движений в газе приведем ряд данных, относящихся к воздуху при 0° С и атмосферном давлении.

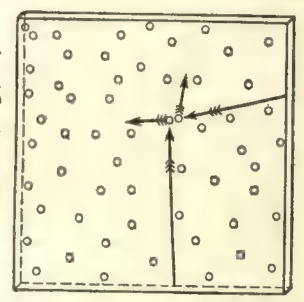


Рис. 176. Картина молекул тонкого слоя газа нормальной плотности (при увеличении примерно в 1 млн. раз).

В каждом кубическом сантиметре воздуха (а также всякого другого газа) при этих «нормальных» условиях содержится $2{,}7\cdot 10^{19}$ молекул. Если бы все эти молекулы были размещены в объеме 1 *см*³ равномерно, то на каждую из них пришелся бы кубик, имеющий ребро, несколько большее, чем $3\cdot 10^{-7}$ *см*. Средняя поступательная скорость молекул воздуха при нормальных условиях — около 450 *м/сек*. Диаметр молекулы имеет порядок двух-трех стомиллионных долей сантиметра ($3\cdot 10^{-8}$ *см*). В течение секунды каждая молекула воздуха при нормальных условиях испытывает около 7,5 млрд. столкновений с другими молекулами, поэтому ее *пробег*, т. е. средняя величина пути, проходимого молекулой между двумя столкновениями, крайне мал; он, очевидно, будет равен частному

$$\frac{450}{7{,}5\cdot 10^{9}} = 6\cdot 10^{-6}\ см = \frac{1}{16}\ \text{микрона.}$$

Ничтожностью свободного пробега, или, что то же, огромной частотой столкновений молекул объясняется тот факт, что скорость диффузии [1]) (взаимопроникновения) газов весьма мала в сравнении со средней скоростью поступательного движения молекул газа.

На рис. 176 дан как бы моментальный снимок молекул, заключающихся в крошечном газовом слое, имеющем форму тонкого параллелепипеда; линейные размеры картины увеличены против действительности примерно в миллион раз. На рисунке показано столкновение двух молекул; стрелки указывают направление скоростей молекул до и после их столкновения.

---

[1]) Латинское diffusio — распространение.

Чтобы отдать себе отчет, насколько малы молекулы и насколько велико их число в каждом кубическом сантиметре воздуха, Вильям Крукс советовал вообразить себе такой опыт. Возьмем ампулку (небольшой стеклянный герметически запаянный сосудик) емкостью как раз 1 *см*^{3}. Допустим, что эта ампулка вполне пуста; следовательно, совершенно не содержит в себе воздуха. Каким-либо способом (например, посредством электрической искры) пробьем в стенке ампулки чрезвычайно тонкое отверстие, а именно такое, чтобы через него в 1 сек. проникало внутрь ампулки по 100 млн. молекул воздуха. Спрашивается, через сколько времени ампулка наполнится воздухом до нормальной плотности воздуха ($2{,}7 \cdot 10^{19}$ молекул в 1 *см*^{3}), если наполнение ее все время будет продолжаться указанным темпом? Подсчет показывает, что ждать этого момента придется 9000 лет[1]). В продолжение этого громадного срока давление воздуха в ампулке будет (согласно сделанному допущению) равномерно возрастать, увеличиваясь на 1 *мм* рт. ст. по прошествии каждых 12 лет.

Эдсер указывал, что если взять число кирпичей, равное числу молекул в 1 *см*^{3} воздуха при нормальных условиях, то, будучи плотно уложены, эти кирпичи покрыли бы поверхность всей суши земного шара слоем высотой в 120 *м*, т. е. высотой, превосходящей в четыре раза высоту семиэтажного дома.

О. Д. Хвольсон писал: «Если расположить рядом молекулы, содержащиеся в одном кубическом сантиметре воздуха, то получилась бы нить, длина которой в 375 раз превысила бы длину земного экватора. Величина молекулы относится к величине обыкновенной крупной дробинки примерно, как кубический сантиметр относится к величине земного шара». Хвольсон советовал также обратить внимание, что, несмотря на столь ничтожно малые размеры молекул, благодаря их громадному числу общая площадь поперечного сечения молекул, содержащихся в 1 *см*^{3} газа нормальной плотности, превосходит $1\frac{1}{2}$ *м*^{2}.

Приведем еще одну иллюстрацию того же самого числа. Возьмем малую каплю воды объемом $^1/_{12}$ *мм*^{3} (число молекул воды в такой капле примерно равно числу молекул в 1 *см*^{3} воздуха при нормальных условиях). Вообразим, что нам удалось как-либо отметить все молекулы воды, содержащиеся в этой капле. Представим себе теперь, что эта капля упала в Черное море, и выждем время, когда она равномерно смешается со всей водой этого глубочайшего моря (средняя глубина около 1 *км*, площадь примерно 400 тыс. *км*^{2}). Если теперь зачерпнуть ведро воды в любом месте и на любой глубине Черного моря, то окажется, что в каждом ведре воды содержится сотня отмеченных нами молекул.

---

[1]) Год содержит $3{,}15 \cdot 10^7$ секунд; $\frac{2{,}7 \cdot 10^{19}}{100 \cdot 10^6 \cdot 3{,}15 \cdot 10^7} \approx 9000$ лет.

§ 74. Статистический метод в физике

Поскольку физические тела состоят из огромного множества чрезвычайно мелких частиц, которые притом находятся в чрезвычайно быстром движении, лишь в редких случаях, при помощи особых приспособлений, физик имеет возможность следить за движением какой-нибудь одной определенной частицы. Помимо этих случаев, вопросы о движении мельчайших частиц в физических телах (молекул, атомов, электронов) приходится разрешать на основании особого математического метода — так называемого *статистического метода*. Статистический метод применяется вообще к изучению «массовых» явлений, т. е. таких явлений, которые представляют собой совокупность множества более простых «индивидуальных» явлений, причем эти индивидуальные явления сходны по своим качествам и (хотя бы до некоторой степени) независимы друг от друга. Примером массового явления может служить состояние газа: мы знаем, что газ состоит из огромного числа молекул, движущихся независимо друг от друга; движение каждой отдельной молекулы может рассматриваться как индивидуальное явление.

Если индивидуальное явление до некоторой степени обследовано, то, применяя статистический метод и являющуюся его развитием общую математическую теорию массовых явлений (так называемую теорию вероятностей), мы можем установить и законы массового явления. В теории газов индивидуальное явление, т. е. полет отдельной молекулы, изучается на основе законов механики; отсюда при помощи теории вероятностей получают законы газового состояния и законы различных явлений (вязкости, теплопроводности, диффузии) в газообразных телах.

Обычный подход теории вероятностей к изучаемым ею физическим явлениям состоит в подсчете так называемой *вероятности* какого-нибудь события или, другими словами, числа тех способов, какими данное событие может осуществиться.

Когда газ находится в равновесии и нет воздействия внешних сил, то плотность газа всюду одинакова; это значит, что если мы мысленно разобьем пространство, занятое газом, на малые (но не чрезмерно малые) элементы или ячейки, то в каждой из таких ячеек найдется одинаковое число молекул.

Однако из этого правила могут наблюдаться исключения. В самом деле, молекулы «идеального» газа не связаны друг с другом, движение их вполне хаотично; поэтому не могло ли бы, например, случиться, что некоторая часть сосуда, заключающего газ, окажется на несколько мгновений пустой, в то время как все молекулы газа соберутся в другой части? Исчерпывающее разъяснение этого вопроса дается теорией вероятностей.

Подсчет числа возможных распределений молекул газа по мысленно выделенным ячейкам пространства, занятого газом, показывает,

что, *чем равномернее* распределяются молекулы по ячейкам, *тем больше делается число возможных распределений*. Самое большое число возможных распределений получится тогда, когда числа молекул в каждой из ячеек будут возможно ближе к равенству, и подсчет показывает, что в этом случае число возможных распределений будет огромно по сравнению с числом всех других распределений, вместе взятых. А так как все индивидуальные распределения равноправны, то имеется огромная вероятность в пользу того, что фактически в каждый момент будет осуществляться *распределение, соответствующее одинаковой плотности газа во всех местах*. Мы можем сказать, что вероятность такого распределения плотностей «близка к достоверности». Однако возможны и распределения, уклоняющиеся от условий равномерной плотности; но чем больше такие уклонения, тем менее вероятно их осуществление. Больцман отмечал, что газ, заключенный в оболочку и предоставленный самому себе, может сосредоточиться весь в одной половине этой оболочки, причем другая половина останется пустой; но вероятность такого события во много раз меньше, чем вероятность того, что в один и тот же день независимо возникнут пожары во всех домах большого города.

С решением вопроса о распределении молекул газа в пространстве обычно связывается воедино решение более сложного вопроса о распределении молекулярных скоростей в газе (находящемся в равновесии). И здесь возможны такие типы распределений, которые имеют весьма малую вероятность осуществиться вследствие того, что их осуществление возможно лишь сравнительно умеренным числом способов.

Примерами могут служить: 1) такой тип распределения, когда в рассматриваемый момент скорость каждой молекулы направлена вдоль одной из осей прямоугольных координат; 2) такой тип распределения, когда в рассматриваемый момент все молекулы имеют одинаковую величину скорости; 3) такой тип распределения, когда в рассматриваемый момент в одной части пространства, занятого газом, группируются молекулы, обладающие бóльшими скоростями, тогда как в остальной части того же пространства оказываются молекулы, обладающие меньшими скоростями. С другой стороны, статистическая теория показывает, что есть один тип распределения молекулярных скоростей, *вероятность которого подавляюще велика* по сравнению с вероятностями всех других типов и который поэтому *осуществляется в действительности как правило*; это — тот тип, при котором число молекул, имеющих ту или другую величину скорости, определяется законом Максвелла, который пояснен в § 82; кроме того, молекулы, обладающие какой-нибудь данной величиной скорости, равномерно распределены по объему газа, и, наконец, в каждой данной ячейке скорости этих молекул равномерно распределены по всем направлениям. Это — так называемое *максвеллово распределение*, характеризующее собой *молекулярный хаос*.

Необходимо подчеркнуть, что указанные здесь выводы относительно распределения как самих молекул, так и их скоростей имеют место лишь в том случае, когда число молекул газа весьма велико, так как только тогда будет иметь силу *закон больших чисел*, служащий основой статистического метода [1]).

Одним из частных приемов, присущих статистическому методу, является вычисление *средних значений* различных величин, подверженных индивидуальным колебаниям (например, средней молекулярной скорости и средней энергии поступательного движения одной молекулы).

§ 75. Термодинамический метод

Направления полета молекул, скорости молекул, их соударения, сцепление их в агрегаты, распад этих агрегатов и другие события микромира случайны. Однако в природе нет явлений, которые не были бы подчинены закономерностям, и случайными событиями управляют свои законы и прежде всего закон больших чисел. В обширных собраниях молекул выравниваются случайные события, и из «хаоса» микромира закономерно рождается упорядоченный ход явлений в макромире [2]) — статистическая закономерность.

Существуют три пути для изучения статистических закономерностей в физике.

Первый путь: представляют себе картину событий, происходящих в микромире, и с помощью точных законов механики и теории вероятностей предугадывают посредством вычислений, к сожалению, сложных, как отразится неупорядоченность микромира на ходе процессов, доступных непосредственному наблюдению. Это — путь *статистической механики*.

Второй путь — постоянное сочетание теории с опытом: на основе физических и химических опытов с помощью догадок нащупывают закономерности, имеющие статистический смысл; придумывают простые «модельные объяснения» этих закономерностей и на

---

[1]) Закон больших чисел формулируется так: при достаточно большом числе независимых испытаний следует с вероятностью, сколь угодно близкой к достоверности, ожидать, что отношение числа появлений события к числу испытаний будет сколь угодно близко к вероятности события.

Вот простой пример для иллюстрации этого закона. Пусть имеется кубик из однородного материала, грани которого отмечены цифрами от 1 до 6. Кубик подкидывают как попало кверху, после чего он падает на стол. Вероятность того, что кубик ляжет определенной гранью кверху (например, той, где цифра 4), выражается отношением 1 : 6. С другой стороны, если много раз бросать кубик подобным образом, то число появлений грани 4 («событие») будет относиться к числу бросаний («испытаний»), как 1 : 6.

[2]) Термин *макро* (греч. macros — большой) противополагается термину *микро*. Макроскопический объем — это объем, содержащий достаточно большое число молекул.

основе созданных таким образом временных и еще далеко не совершенных гипотез планируют новые серии опытов для уточнения ранее найденных закономерностей и для обнаружения новых фактов. Это — путь *молекулярной физики*.

Третий путь своеобразен. Он принадлежит *термодинамике* [1]). Из большого числа добытых опытом истин избираются только две-три, но зато наиболее достоверные, основные по своему значению и общности, а затем методом строго логического вывода следствий из них устанавливают множество частных закономерностей, позволяющих точно предугадать ход различных процессов и свойства разнообразных веществ.

Исторически термодинамика возникла в результате требований, предъявленных к физике со стороны теплотехники. Но она давно переросла эти требования. Теперь понятия «тепло» и «работа» играют в термодинамике хотя и важную роль, но все же они ни в какой мере не определяют предмета термодинамики.

Предметом термодинамики служат все те факты (объекты и явления) физики и химии, которые представляют собой статистически закономерный результат событий, разыгрывающихся в микромире. Типичными примерами фактов, подлежащих термодинамическому исследованию, являются: диффузия и вообще неупорядоченное проникновение молекул одного вещества в гущу молекул другого (растворение, абсорбция); охлаждение и нагревание, сопровождающиеся изменением интенсивности движения отдельных частиц вещества; химические реакции; кристаллизация, плавление, испарение и т. д.

Таким образом, предмет термодинамики, статистической механики и молекулярной физики один и тот же. Эти три науки родственны, развиваются параллельно, но методы их глубоко различны.

Термодинамика черпает свое содержание дедуктивным методом из нескольких законов физики, установленных с полной достоверностью опытным путем. Все ее выводы являются поэтому столь же достоверными, как и законы, положенные в ее основу (конечно, подразумевается условие, что в ходе рассуждений не было допущено какой-либо логической или вычислительной ошибки).

В настоящее время эмпирический базис термодинамики слагается из двух основных и одного дополнительного законов. Термодинамика как самостоятельная наука возникла в середине XIX в., когда были открыты два основных ее закона. Мы будем называть их поэтому *началами* термодинамики. Третий закон (так называемый тепловой закон Нернста) был установлен в начале XX в.; он служил

---

[1]) Слово «термодинамика» происходит от греческих слов therme — теплота и dinamis — сила. Учитывая историю происхождения слова «термодинамика», его надо расшифровывать так: «наука о силах, связанных с теплом» (но вовсе не о движении тепла; изучение явления теплопроводности и законов движения тепла не входит в задачи термодинамики).

фундаментом лишь для некоторых дополнительных глав термодинамики[1]). Первое и второе начало термодинамики могут быть сформулированы так.

Первое начало. *Невозможно возникновение или уничтожение энергии.*

Второе начало. *Невозможен процесс, единственным результатом которого было бы превращение теплоты в работу.*

Сформулируем эти начала иначе, чтобы сразу стало очевидным их значение для техники. С этой целью введем представление о вечном двигателе (перпетуум мобиле) первого и второго родов.

Двигатель, который, повторяя произвольное число раз один и тот же процесс, был бы способен производить работу в количестве, большем по сравнению с тем количеством энергии, которое он поглощает извне,— другими словами, двигатель, который сам бы рождал энергию,— называют *перпетуум мобиле*[2]) *первого рода.*

Под термином *перпетуум мобиле второго рода* подразумевают такой *тепловой двигатель, который, повторяя произвольное число раз один и тот же процесс, был бы способен целиком превращать в работу все тепло, черпаемое им у какого-нибудь тела или тел,* играющих роль источников тепла (не нуждаясь, таким образом, в других телах, служащих для стока теплоты, не превращенной в работу).

Например, если бы можно было изобрести такую паровую машину, которая все тепло, заимствуемое у котла, полностью превращала бы в работу и не нуждалась бы, следовательно, ни в холодильнике, ни в каком-либо теле, заменяющем холодильник[3]), то эта машина была бы перпетуум мобиле второго рода.

Обе эти машины, с точки зрения нужд человека, являются особо заманчивыми. Будь построено перпетуум мобиле первого рода, человечеству уже не надо было бы больше заботиться о топливе, химическая энергия которого преобразуется в двигателях внутреннего сгорания и в паровых машинах в энергию механическую, не надо было бы сооружать плотины на реках для гидросиловых установок.

Будь построено перпетуум мобиле второго рода, мы овладели бы неисчерпаемыми природными источниками тепла. Простой расчет показывает, что при посредстве перпетуум мобиле второго рода мы могли бы, преобразуя получаемую от воды океанов теплоту в работу, приводить в движение машины всех заводов, существующих во всех странах света, и только через 1700 лет заметили бы, что температура воды в океанах понизилась на одну сотую градуса.

---

[1]) Тепловой закон Нернста определяет свойства тел при очень низких температурах.

[2]) От лат. perpetuum mobile — вечно движущееся.

[3]) У паровых машин холодильником служит конденсатор или (в менее экономичных машинах) атмосферный воздух.

Было сделано несчетное количество попыток построить вечный двигатель. Это никому не удалось. Случайность ли это? Не следует ли продолжить и усилить попытки?

Ответ на эти вопросы дают два начала термодинамики:

Первое начало говорит: *перпетуум мобиле первого рода невозможно.*

Второе начало говорит: *перпетуум мобиле второго рода невозможно.*

Двигатели описанного свойства могут существовать лишь в нашей фантазии; в реальном бытии им нет места. Попытки их осуществить обречены на провал. Усилия надо направить не на их осуществление, а прежде всего на то, чтобы понять, почему двигатели описанного свойства оказываются невозможными.

§ 76. Термодинамическая характеристика состояния тел и термодинамические процессы

Понятие «тело» в физике (в особенности в термодинамике) имеет смысл, пожалуй, противоположный тому, который в него вкладывает геометрия. Когда в термодинамике или в статистике говорят «тело», то разумеют предмет, внешний вид которого, форма, цвет нам представляются несущественными; мы этим словом обозначаем *вещество, заполняющее определенный объем*, связываем с ним не зрительное, как в геометрии, а скорее осязательное впечатление.

Под словом «тело» мы подразумеваем воду, воздух, железо, каменную соль, ртуть или какое-либо другое вещество, взятое в определенном объеме и характеризующееся некоторой упругостью, плотностью, степенью нагретости и другими непосредственно или косвенно установленными физическими признаками, имеющими объективную меру. Если все эти признаки во всех частях тела одинаковы, мы говорим про тело, что оно *физически однородно*. Тело может быть физически неоднородно в отношении плотности, в отношении упругости, степени нагретости, степени наэлектризованности, намагниченности и т. д. [1]).

Все признаки, характеризующие тело и имеющие объективную меру, как-то: плотность, упругость, степень нагретости, степень наэлектризованности, процентное соотношение между количествами разных веществ, из которых слагается тело, и т. д., называют *термодинамическими параметрами состояния тела.* Когда изменяется

---

[1]) Если тело представляет собой с м е с ь (именно смесь, а не химическое соединение) нескольких веществ, то, как бы тонка эта смесь ни была, будь то даже раствор или сплав, мы говорим, что это тело *химически неоднородно*. Так, воздух химически неоднороден, так как представляет собой смесь кислорода с азотом, аргоном и другими газами. Вода химически однородна, так как хотя она и состоит из водорода и кислорода, но здесь они находятся в химическом соединении, а не в смеси.

хотя бы один из признаков, хотя бы даже только в одном небольшом участке тела, говорят, что состояние тела меняется. Таким образом, *термодинамическое состояние тела* определяется совокупностью всех признаков (параметров), характеризующих все чем-либо различающиеся друг от друга участки тела. Состояние тела может быть изменено нагреванием, охлаждением, сжатием, изменением формы (если тело сопротивляется изменению формы), воздействием электрических и магнитных сил и т. д. Термодинамическое состояние железного прута изменяется, если закалить его или согнуть, растянуть или намагнитить, или просто опустить один его конец в холодную воду.

Различают равновесные и неравновесные состояния тела. Мы говорим, что тело находится в *равновесном состоянии*, если все характеризующие его признаки (без влияния извне каких-либо процессов) во всех участках тела будут оставаться неизменными сколь угодно долго.

Здесь, следовательно, два требования, которые должны выполняться одновременно: во-первых, параметры, характеризующие состояние тела, должны оставаться неизменными во времени; во-вторых, должны отсутствовать процессы (процессы, а не силы), извне поддерживающие эту неизменность параметров. Если хотя бы одно из указанных требований не выполняется, то говорят, что тело находится в неравновесном состоянии.

Таким образом, мы должны назвать состояние тела *неравновесным*, если параметры изменяются. Мы должны называть его неравновесным и тогда, когда параметры хотя и остаются неизменными, но эта неизменность их поддерживается протеканием какого-либо процесса, который извне воздействует на тело. Например, термодинамическое состояние железного прута, один конец которого нагревают, другой охлаждают, может являться состоянием «стационарным» (неизменным), но оно не является состоянием равновесным.

Физически однородное тело или совокупность нескольких тождественных по составу тел, находящихся в тождественных равновесных состояниях, кратко обозначается словом *фаза* [1]). При этом предполагается, что каждое из тел однородно в отношении всех параметров своего состояния (плотность, упругость, температура и т. д.).

Мы, следовательно, называем тело фазой, если уверены, что, разделив тело любым способом на произвольное число частей (не чрезмерно малых), обнаружим тождественность состояния всех частей.

Возьмем воду, в которой плавает кусок льда. В данном случае мы имеем две фазы. Если в воде плавает несколько кусков льда,

---

[1]) То же слово «фаза» употребляют в учении о колебаниях в совершенно другом смысле.

понятие «твердая фаза» следует относить ко всем кускам в совокупности.

Важнейшими параметрами состояния тел являются: плотность тела (или величина, обратная плотности, — удельный объем), давление и температура [1]). Температура как величина обязана своим существованием управляющему микромиром закону больших чисел (§ 74). Закон этот регулирует ход тепловых явлений и обусловливает особый вид равновесия — *тепловое равновесие* тел.

Разностью температур мы называем меру отклонения тел от состояния теплового равновесия друг с другом. Надо различать температуру эмпирическую t и температуру абсолютную T [2]). Приблизительно [3])

$$T \approx t + 273{,}16^\circ. \qquad (1)$$

На представлении о температурной шкале основано измерение количества теплоты в *калориях* [4]).

Три основных параметра — давление, объем и температура — не независимы. Они связаны уравнением, которое называют

---

[1]) Часто количество вещества измеряют в грамм-молекулах, или, как принято говорить, в *молях*. Тогда вместо удельного объема (т. е. объема, занятого единицей массы) применяют в качестве параметра объем, занятый одним молем, — *мольный объем*.

[2]) Эмпирическая температура измеряет отклонение тела от состояния теплового равновесия с тающим льдом (находящимся под давлением в одну физическую атмосферу), причем точке кипения воды (под давлением в одну атмосферу) приписывается, как известно, температура в 100°, чем и определяется градус Цельсия. Международным соглашением нормальная шкала эмпирической температуры установлена пропорционально приращению давления водорода, объем которого при нагревании (или же при охлаждении) поддерживают строго неизменным, а именно таким, чтобы при 0° С давление водорода было равно 100 *мм* рт. ст.

[3]) При 0 и 100° С формула (1) по условию градуировки является точной. В интервале от 0 до 100° С различие между шкалами T и $t + 273{,}16$ не превышает 0,001°. При 1000° С эти шкалы отличаются примерно на 0,1°.

[4]) Сделано соглашение понимать под *калорией* количество тепла, повышающее температуру 1 *г* воды от 19,5 до 20,5° С.

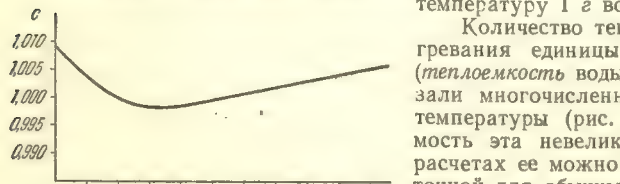


Рис. 177. Зависимость теплоемкости воды от температуры.

Количество тепла, потребное для нагревания единицы массы воды на 1° (*теплоемкость* воды), зависит, как показали многочисленные исследования, от температуры (рис. 177). Однако зависимость эта невелика, и в практических расчетах ее можно не учитывать. С достаточной для обычных целей степенью точности можно считать, что n калорий нагревают 1 *г* воды на n градусов.

В 1934 г. Международная теплотехническая конференция приняла определение килокалории как 860-й доли киловатт-часа:

$$1 \text{ килокалория} = \frac{1}{860} \text{ киловатт-часа} = 4{,}1833 \text{ джоуля}.$$

уравнением состояния:

$$f(p, v, t) = 0.$$

Вид функциональной зависимости между этими параметрами отыскивается для каждого данного вещества опытным путем. Только для разреженных газов, где молекулы движутся прямолинейно, точное уравнение состояния удается вывести теоретически (получается уравнение Клапейрона, § 77). При уплотнении газа, а тем более при конденсации его в жидкость, силы взаимодействия молекул искривляют траектории молекул; в связи с этим теоретический вывод уравнения состояния крайне усложняется и возникает необходимость в различных упрощающих предположениях, которые приводят к неточным результатам.

При использовании термодинамического метода для исследования свойств веществ чаще всего рассматривают такие термодинамические процессы, при которых состояние тела изменяется бесконечно малыми ступенями, так что тело проходит *непрерывный ряд равновесных состояний*. Чтобы пояснить представление о *равновесном термодинамическом процессе*, рассмотрим простейший пример — равновесное расширение какого-либо тела, например газа. Вообразим, что изучаемое тело (газ) заключено в цилиндр, непроницаемый для тепла, но имеющий теплопроводное дно, которое может быть, однако, закрыто заслонкой, также непроницаемой для тепла (рис. 178). Когда тело находится в равновесном состоянии, нагрузка на поршень должна быть равна произведению давления газа p на площадь поршня s. Увеличивая нагрузку на поршень, можно заставить газ сжиматься; если уменьшить нагрузку на поршень, газ будет расширяться.

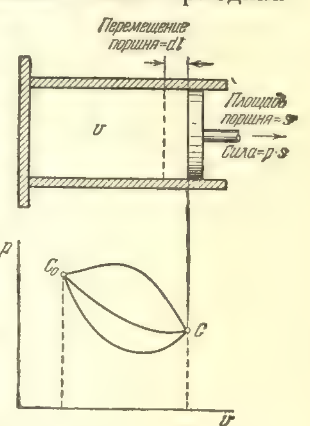


Рис. 178. Элементарная работа расширения равна pdv.

Так как дно цилиндра перемещением заслонки может быть сделано теплопроводным или непроницаемым для тепла, то при желании можно осуществлять либо одни механические воздействия на газ (с затратой или выигрышем работы), либо одни термические воздействия (с сообщением или отнятием тепла), либо и те и другие одновременно. Условимся производить процесс очень медленно, постепенно изменяя давление и температуру. Тогда взятое нами тело (скажем, газ) будет проходить через ряд бесконечно близких друг к другу равновесных состояний, из которых каждое изображается точкой на диаграмме (p, v). Весь процесс изображается линией, соединяющей начальное состояние C_0 с конечным состоянием C.

Различным способам осуществления этого процесса (различным комбинациям и чередованиям механических и термических воздействий) будут соответствовать различные по форме линии, проведенные между точками C_0 и C.

Элементарная работа, производимая телом (скажем, газом) при расширении, равна произведению силы, действующей на поршень, т. е. величины $p \cdot s$, на бесконечно малое перемещение поршня dl. Но произведение sdl есть не что иное, как приращение объема, занятого газом: $sdl = dv$. Следовательно, элементарная работа δA равна произведению давления p на приращение объема:

$$\delta A = p\,dv. \tag{1}$$

Рис. 179. Графическое изображение работы, осуществляемой телом при равновесном расширении.

На диаграмме (p, v) давление p изображается ординатой, приращение объема dv изображается приращением абсциссы, и, значит, элементарная работа, выполняемая телом при расширении, изображается площадью бесконечно узкой вертикальной полоски (рис. 179).

Вся работа, осуществляемая телом при расширении от объема, соответствующего начальному состоянию C_1, до объема заданного состояния C_2, аналитически выражается определенным интегралом

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv, \tag{2}$$

где p есть функция v, вид которой зависит от «пути перехода», т. е. от порядка чередования механических и термических воздействий.

Графически эта работа определяется величиной площади, ограниченной сверху линией, изображающей путь перехода тела из начального состояния в заданное, с боков — двумя ординатами p_1 и p_2, а снизу — отрезком оси абсцисс. Указанную площадь можно рассматривать как величину алгебраическую, если на линии, изображающей путь перехода, различать два направления: положительное направление в сторону возрастающих объемов (площадь под линией положительна, тело расширяется и производит работу) и отрицательное направление в сторону убывающих объемов (в этом случае площадь под линией считается отрицательной, работа затрачивается на сжатие тела).

После сделанных разъяснений достаточно взглянуть на рис. 180, чтобы видеть, в сколь высокой мере работа ($-A$), затрачиваемая

на осуществление перехода тела из начального состояния C_0 в заданное C, *зависит от пути перехода.*

Посредством калориметрических измерений нетрудно убедиться, что и количество тепла, которое может быть отдано телом, в сильной степени зависит от пути охлаждения.

Рис. 180. Различные «пути перехода» тела из состояния C_0 в состояние C. Площадь под кривыми a, $в$, c, d неодинакова и соответственно неодинакова работа, затрачиваемая на осуществление перехода $C_0 \to C$.

Допустим, что посредством ряда механических и термических воздействий мы принудили тело совершить некий *круговой процесс* (термодинамический цикл), который слагается из двух процессов, а именно: из процесса расширения (мы обозначим его символом $C_0 \to (a) \to C$) и из процесса сжатия, возвращающего тело в начальное состояние (этот второй процесс обозначим символом $C_0 \leftarrow (b) \leftarrow C$).

Допустим, что линия (a), изображающая процесс расширения, расположена *над* линией (b), изображающей процесс сжатия (рис. 181). Это означает, что работа, производимая телом при расширении, больше работы, поглощаемой телом при сжатии. Разность площадей, изображающих эти количества работы, равна, очевидно, площади, ограниченной контуром цикла.

Может оказаться, что линия (a), изображающая процесс расширения, расположена *под* линией (b), изображающей процесс сжатия

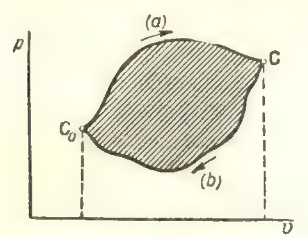


Рис. 181. «Прямой» цикл.

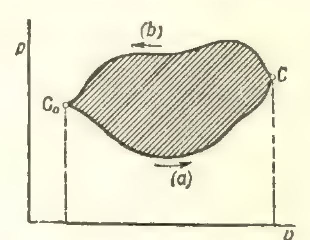


Рис. 182. «Обратный» цикл.

(рис. 182). В таком случае площадь, ограниченная циклом, изображает работу, затраченную на осуществление цикла.

Циклы, осуществляемые «рабочим веществом» (паром или газом) в тепловых машинах, принадлежат к первому типу — линия расширения лежит выше линии сжатия — и носят название *прямых* циклов. Циклы, осуществляемые «рабочим веществом» в холодильных машинах, принадлежат ко второму типу — линия расширения лежит ниже линии сжатия — и носят название *обратных* циклов.

Простейшими термодинамическими процессами являются процессы, протекающие при неизменности одного какого-либо параметра. Такие процессы носят название *изопроцессов*. Процесс, протекающий при неизменном объеме, называют *изохорным*; процесс, протекающий при неизменном давлении, называют *изобарным*; процесс, протекающий при неизменной температуре, называют *изотермическим*.

К числу важнейших термодинамических процессов относятся также процессы, осуществляемые в обстановке полной термической изолированности тела, т. е. без притока и отдачи тепла. Эти процессы носят название *адиабатных* процессов. Особо важную роль играет в термодинамике процесс равновесного адиабатного расширения или сжатия тела. Линию, изображающую этот процесс, называют *адиабатой* (рис. 183).



Рис. 183. Графическое изображение изопроцессов.

В последующем, анализируя содержание второго начала термодинамики, мы увидим, что каждому телу присуща некая величина, которая подобно температуре существует благодаря неупорядоченности молекулярных и внутримолекулярных движений. Эта величина носит название *энтропии*. При равновесных адиабатных процессах она остается неизменной. Поэтому равновесные адиабатные процессы носят также название *изоэнтропийных* процессов, а адиабату иначе называют *изоэнтропой*.

§ 77. Уравнение Клапейрона

Известно, что разреженные газы подчинены законам Бойля и Гей-Люссака. Закон Бойля гласит, что при изотермическом сжатии газа давление изменяется обратно пропорционально объему. Следовательно, при $t=\text{const}$

$$pv=\text{const}.$$

Согласно закону Гей-Люссака[1]) нагревание газа на 1° С при постоянном давлении влечет за собой его расширение на $\frac{1}{273,16}$ того объема, который он занимает при 0° С и при том же неизменном давлении.

Следовательно, если v_0' есть объем, занимаемый газом при 0° С и при давлении p, а v есть объем, занимаемый этим газом при t° С

[1]) Этот закон, установленный экспериментально в 1802 г. французским физиком Гей-Люссаком, за несколько лет до того был высказан в качестве догадки тоже французским ученым Шарлем. Поэтому указанный закон часто называют законом Шарля.

и при том же давлении p, то

$$v - v'_0 = \frac{v'_0}{273,16} t.$$

Будем изображать состояние газа точкой на диаграмме p, v (координаты какой-либо точки в этой диаграмме указывают численные значения давления p и объема 1 *г* или 1 моля газа; на рис. 184 нанесены линии, для каждой из которых pv=const,— это изотермы газа) [1]).

Представим себе, что газ был взят в некотором выбранном произвольно состоянии C, при котором его температура есть t, давление

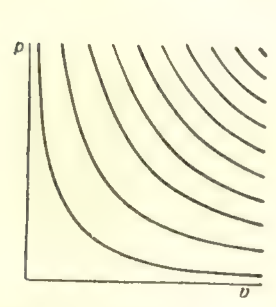


Рис. 184. Изотермы газа по закону Бойля.

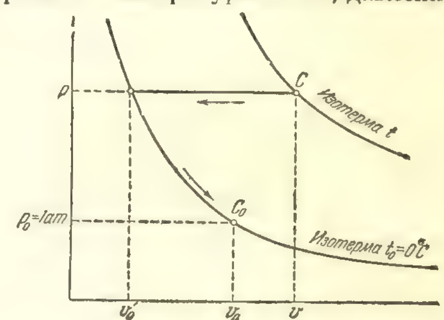


Рис. 185. Диаграмма, поясняющая вывод уравнения Клапейрона из законов Бойля и Ге-Люссака.

p и занятый им объем v. Охладим его до 0°C, не изменяя давления p (рис. 185). На основании закона Ге-Люссака можно написать, что

$$v = \frac{v'_0}{273,16}(t + 273,16).$$

Теперь, поддерживая температуру 0° C, будем сжимать газ или, если требуется, предоставим ему возможность расширяться до тех пор, пока его давление не сделается равным одной физической атмосфере. Это давление обозначим через p_0, а объем, который в результате окажется занятым газом (при p_0=1 *ат* и 0°C), через v_0 (точка C_0 на рис. 185). На основании закона Бойля

$$pv'_0 = p_0 v_0.$$

Умножая почленно первое равенство на второе и сокращая на v'_0, получим:

$$pv = \frac{p_0 v_0}{273,16}(t + 273,16). \qquad (3)$$

[1]) Эти линии представляют собой гиперболы. Чем выше температура, тем большее значение имеет произведение pv и тем дальше от начала координат расположена соответствующая изотерма.

Это уравнение впервые было выведено Б. П. Клапейроном, выдающимся французским инженером, работавшим в России профессором Института путей сообщения с 1820 по 1830 г. Постоянную величину $\frac{p_0 v_0}{273,16}$ называют *газовой постоянной*.

По закону, открытому в 1811 г. итальянским ученым Авогадро, все газы независимо от их химической природы при одинаковом давлении занимают одинаковый объем, если они взяты в количествах, пропорциональных их молекулярному весу. Пользуясь в качестве единицы массы молем (или, что то же, грамм-молекулой, грамм-молем), закон Авогадро можно сформулировать так: при определенной температуре и определенном давлении *моль любого газа будет занимать один и тот же объем*. Так, например, при 0° С и при давлении 760 *мм* 1 *г-моль* любого газа занимает 22,421 *л*.

Законы Бойля, Ге-Люссака и Авогадро, найденные экспериментально, позже были выведены теоретически из молекулярно-кинетических представлений (Крёнигом в 1856 г., Клаузиусом в 1857 г. и Максвеллом в 1860 г.). С молекулярно-кинетической точки зрения закон Авогадро (который, подобно другим газовым законам, является точным для идеальных газов и приближенным для реальных) означает, что *в равных объемах двух газов содержится одинаковое число молекул, если эти газы находятся при одинаковой температуре и одинаковом давлении*.

Пусть m_0 есть масса (в граммах) атома кислорода, а m — масса молекулы какого-либо вещества, M — молекулярный вес этого вещества: $M = \frac{m}{\frac{1}{16} m_0}$. Очевидно, что число N молекул, содержащихся в моле какого-либо вещества, равно:

$$N = \frac{M \cdot 1\ г}{m} = \frac{16\ г}{m_0},$$

т. е. *моль любого вещества содержит одно и то же число молекул*. Это число равно $6,0247 \cdot 10^{23}$; оно называется *числом Авогадро*.

Д. И. Менделеев в 1874 г. указал, что благодаря закону Авогадро уравнение Клапейрона, синтезирующее законы Бойля и Ге-Люссака, приобретает наибольшую общность, когда оно отнесено не к обычной весовой единице (грамм или килограмм), а к молю газов. Действительно, поскольку моль любого газа при 0° С и $p = 1$ *ат* занимает объем, равный 22,421 *л*, численное значение газовой постоянной $\frac{p_0 v_0}{273,16}$ для всех газов, взятых в количестве 1 грамм-молекулы, должно быть одинаково независимо от их химической природы.

Газовую постоянную для 1 моля газа обычно обозначают буквой R и называют *универсальной газовой постоянной*:

$$R=\frac{p_0 v_0}{273{,}16}, \quad \text{где} \quad p_0=1\ \text{ат} \quad \text{и} \quad v_0=22{,}421\ \text{л}. \tag{4}$$

Если в объеме v (а значит, и v_0) содержится не 1 моль газа, а ν молей, то, очевидно,

$$pv=\nu RT. \tag{5}$$

Численное значение универсальной газовой постоянной зависит от того, в каких единицах измерены стоящие в левой части уравнения Клапейрона величины p и v. Например, если давление измерять в *кГ/см*^{2} и объем в *см*^{3}, то $p_0=1{,}033$ *кГ/см*^{2} и $v_0=22\,421$ *см*^{3}; отсюда

$$R=\frac{1{,}033\cdot 22\,421}{273{,}16}=84{,}80\,\frac{\text{кГ}\cdot\text{см}}{\text{градус}\cdot\text{моль}}.$$

В таблице (стр. 316) даны значения газовой постоянной, выраженной в различных часто применяемых единицах.

Когда газовая постоянная входит в формулу, все члены которой выражены в калорических единицах энергии, то и газовая постоянная должна быть выражена в калориях; приближенно, $R\approx 2\,\frac{\text{кал}}{\text{градус}\cdot\text{моль}}$, точнее

$$R=1{,}987\,\frac{\text{кал}}{\text{градус}\cdot\text{моль}}.$$

Вычисление универсальной газовой постоянной основано, как мы видели, на законе Авогадро, согласно которому все газы независимо от их химической природы занимают при 0° C и $p=1$ *ат* объем

$$v_0=22{,}421\ \text{л}. \tag{6}$$

В действительности объем v_0, занимаемый 1 молем газа при нормальных условиях, для большинства газов не вполне точно равен 22,421 *л* (например, для кислорода и азота он немного меньше, для водорода — немного больше). Если это учесть при вычислении R, то обнаружится некоторое расхождение в численном значении R для различных по химической природе газов. Так, для кислорода вместо $8{,}317\cdot 10^7$ *эрг/градус·моль* получается $8{,}312\cdot 10^7$, для азота $8{,}314\cdot 10^7$. Это несовпадение находится в связи с тем, что все вообще газы при обычной плотности не вполне точно следуют законам Бойля и Гей-Люссака.

В технических расчетах вместо измерения массы газа в молях обычно измеряют массу газа в килограммах. Пусть объем v содержит n *кг* газа. Коэффициент ν в уравнении Клапейрона означает число молей, содержащихся в объеме v, т. е. в данном случае

Численные значения газовой постоянной $R = \frac{p_0 v_0}{273,16}$, выраженной в различных единицах

Единицы, в которых измерено давление	Единицы, в которых измерен объем газа	«Нормальное» давление p_0, выраженное в единицах, указанных в первом столбце	Объем v_0 1 *г-моля* газа при нормальных условиях, выраженный в единицах, указанных во втором столбце	R
дин/см^2	*см*^{3}	1 013 250	22 421	$8,3166 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{градус} \cdot \text{моль}}$
кГ/см^2	*см*^{3}	1,0333	22 421	$84,80 \frac{\text{кГ} \cdot \text{см}}{\text{градус} \cdot \text{моль}}$
кГ/м^2	*м*^{3}	10,333	0,02242	$0,848 \frac{\text{кГ} \cdot \text{м}}{\text{градус} \cdot \text{моль}}$
ат	*см*^{3}	1	22 421	$82,06 \frac{\text{атмосфера} \cdot \text{см}^3}{\text{градус} \cdot \text{моль}}$
ат	*л*	1	22,421	$0,08206 \frac{\text{атмосфера} \cdot \text{литр}}{\text{градус} \cdot \text{моль}}$
мм рт. ст.	*см*^{3}	760	22 421	$6,237 \cdot 10^4 \frac{\text{мм рт. ст.} \cdot \text{см}^3}{\text{градус} \cdot \text{моль}}$

в n *кг* газа. Так как моль составляет M *г* (где M—молекулярный вес газа), то, очевидно, в 1 *г* газа содержится $\frac{1}{M}$ долей моля и, следовательно, в n *кг* газа содержится

$$\nu = n \cdot \frac{1000}{M} \text{ молей.}$$

Стало быть, для технических расчетов в килограммах уравнение Клапейрона можно записать так:

$$pv = n \cdot BT, \tag{7}$$

где $B = \frac{1000}{M} R$.

Постоянную величину B называют *удельной* (или *характеристической*) *газовой постоянной.*

Нередко уравнение Клапейрона пишут также в следующей форме:

$$p = B \cdot \rho T, \tag{8}$$

где $\rho = \frac{n}{v}$ есть плотность, измеренная числом килограммов газа в 1 *м*^{3} (нетрудно сообразить, что числовые значения плотности, выраженной в *кг/м*^{3}, будут в 1000 раз больше числовых значений той же плотности, выраженной в *г/см*^{3}).

Поскольку все реальные газы в той или иной мере (и притом неодинаково) отступают от закона Авогадро и в противоречии с этим законом имеют не вполне тождественные объемы для 1 моля при нормальных условиях, то при более точных расчетах пользуются характеристическими газовыми постоянными, полученными не из универсальной газовой постоянной, а вычисленными непосредственно из плотностей газов при нормальных условиях по формуле

$$B = \frac{p_0 v_0}{273{,}16}, \qquad (9)$$

где $p_0 = 1$ *ат* и v_0 — объем 1 *кг* газа при 1 *ат* и 0° С. Для газов, которые даже при небольших степенях сжатия показывают заметное отклонение от уравнения Клапейрона, вычисление характеристической постоянной проводят методом графической экстраполяции.

В таблице даны значения характеристических газовых постоянных B для случая, когда давление в уравнении Клапейрона выражено в килограммах на 1 $м^2$, а объем выражен в куб. метрах.

Вещество	Химическая формула	B	Вещество	Химическая формула	B
Воздух	—	29,27	Углекислота (угольный ангидрид)	CO_2	19,14
Водород	H_2	422,6	Сернистый ангидрид	SO_2	13,15
Кислород	O_2	26,47	Метан (болотный газ)	CH_4	52,95
Азот	N_2	30,13	Этилен	C_2H_4	30,26
Окись азота	NO	28,19	Пары воды	H_2O	47,06
Закись азота	N_2O	19,20	» спирта	C_2H_6O	18,42
Окись углерода	CO	39,26	» бензола	C_6H_6	10,86

Уравнение Клапейрона является приближенно справедливым не только для химически однородных газов, но также и для смеси газов [1]).

[1]) В случае смеси нескольких газов можно говорить лишь о среднем молекулярном весе; это понятие в сущности является чуждым для химии, но небесполезным в физике.

Средним молекулярным весом химически неоднородного вещества (смеси газов, раствора, сплава и т. д.) называют молекулярный вес, который был бы присущ этому веществу, если бы оно было химически однородно и состояло из молекул, имеющих массу такую же, какова средняя масса молекул, фактически содержащихся в смеси.

Пусть 1 *г* смеси состоит из q_1 долей грамма некоторого первого вещества с молекулярным весом M_1, q_2 долей грамма второго вещества с молекулярным весом M_2 и т. д. Так как грамм-молекула состоит из авогадрова числа молекул, то 1 *г* первого вещества содержит $\frac{N}{M_1}$ молекул; значит, q_1 долей грамма этого вещества содержит $\frac{q_1}{M_1} N$ молекул, q_2 долей грамма второго вещества содер-

§ 78. Внутренняя энергия. Теплота и работа. Уравнение первого начала

Как уже было пояснено выше (§ 73), под внутренней энергией тела мы понимаем энергию движения и взаимодействия всех частиц тела, а также лучистую энергию, которая обеспечивает внутри тела состояние теплового равновесия. Применяя методы термодинамики, изменение внутренней энергии тела при переходе из одного состояния в другое *измеряют суммой работы, которую необходимо затратить, и тепла, которое необходимо сообщить телу, чтобы перевести это тело из начального состояния C_0 в заданное состояние C.*

Понятно, что при суммировании работа и тепло должны быть выражены в одинаковых единицах: либо в единицах механических (эрг, джоуль, килограмметр и т. д.), либо в калориях.

Если тело неизменно продолжает пребывать в одном и том же равновесном состоянии, то само собой очевидно, что в это время никакой затраты энергии на него не производится. Но возьмем какое-либо тело и подвергнем его ряду каких угодно механических и термических воздействий. Спрашивается, примет ли внутренняя энергия этого тела первоначальное значение, когда мы вернем тело в исходное состояние. Спрашивается, иными словами, не может ли механическая и термическая обработка оставить такой «след» в теле, который заключался бы в изменении внутренней энергии тела

жиг $\frac{q_2}{M_2} N$ молекул и т. д. Следовательно, в 1 *г* заданной смеси находится

$$\left(\frac{q_1}{M_1} + \frac{q_2}{M_2} + \ldots\right) N \text{ молекул.}$$

Пусть M есть средний молекулярный вес смеси. В 1 грамм-молекуле смеси содержится авогадрово число молекул, значит, число молекул в 1 *г* смеси равно $\frac{N}{M}$. Следовательно,

$$\frac{N}{M} = \left(\frac{q_1}{M_1} + \frac{q_2}{M_2} + \ldots\right) N,$$

или

$$M = \frac{1}{\frac{q_1}{M_1} + \frac{q_2}{M_2} + \ldots}, \tag{10}$$

где $q_1 + q_2 + \ldots = 1$.

Например, для воздуха (состоящего по весу из 76% азота, 23% кислорода и 1% аргона):

$$M_{\text{возд}} = \frac{1}{\frac{0,76}{28} + \frac{0,23}{32} + \frac{0,01}{40}} = 28,9.$$

Полезно заметить, что согласно формуле (10) средний молекулярный вес химически неоднородного тела есть величина среднегармоническая, а не среднеарифметическая по отношению к молекулярным весам составляющих веществ (конечно, вычисляемая с учетом их количественного участия в составе смеси).

и больше не проявлялся бы ни в чем, т. е. не был бы связан с изменением численного значения всех остальных параметров, характеризующих термодинамическое состояние тела.

Если бы затрата энергии на осуществление цикла оказалась не равной нулю, то мы вынуждены были бы, очевидно, сказать, что энергия затрачена «ни на что», так как состояние тела в конечном результате не изменилось. Иными словами, мы должны были бы признать, что энергия исчезла, или, если бы сумма затрат работы и тепла на выполнение цикла оказалась отрицательной, то должны были бы признать, что энергия возникла. Но ни то, ни другое, как гласит первое начало термодинамики, невозможно. Значит, *в сумме затрата тепла и работы на выполнение любого термодинамического цикла равна нулю.* Следовательно, внутренняя энергия тела в конце цикла приобретает первоначальное значение. Иначе говоря, *внутренняя энергия является однозначной функцией термодинамического состояния.*

Итак, если U есть внутренняя энергия тела и x, y, z, ...— параметры, которые в совокупности однозначно характеризуют состояние тела, то $U=f(x, y, z, \ldots)$. Здесь f есть символ однозначной функции. Вид функции f не может быть установлен с помощью одних лишь законов термодинамики. Он должен быть установлен опытным путем или посредством изучения молекулярной структуры тела.

Три величины — энергия, теплота и работа — имеют одинаковую размерность (могут быть измерены в одинаковых единицах), но понятия, которые скрываются за этими величинами, далеко не равнозначны.

Надо прежде всего провести грань раздела между понятием «энергия», с одной стороны, и более родственными друг другу понятиями «теплота» и «работа» — с другой.

Когда мы говорим о работе, мы имеем в виду или самый процесс работы (т. е. процесс перемещения точек приложения некоторых сил), или же меру работы, т. е. количество энергии, передаваемой в форме работы от одного тела, совершающего работу, к другому телу, на изменение состояния которого эта работа расходуется. А когда мы говорим об энергии, то представляем себе запас возможной, но еще не осуществляющейся работы. Спрашивается, с чем должно быть связано представление о теплоте: с представлением о процессе передачи энергии, или с представлением о запасе энергии?

На этот вопрос надлежит дать ответ: о теплоте может идти речь только в том случае, когда имеется в виду процесс передачи энергии, и ни в коем случае под теплотой нельзя понимать какой-то запас энергии. Однако, как и в случае работы, термин «тепло» используется не только как основа для обозначения определенных процессов передачи энергии (теплоотдача, теплопоглощение, теплопередача, теплоизлучение и т. д.); термином «тепло» обозначают также

меру эффективности указанных процессов, т. е. количество энергии, переданной в форме тепла.

Встречающееся иногда неправильное сочетание понятия теплоты с «запасами» чего-то отражает влияние некогда господствовавшей теории теплорода, которая сохранившимися в физике образными, но малоудачными терминами («теплоемкость», «теплопроводность») направляет мысль по неверному пути.

К сожалению, в некоторых книгах можно встретить заявление, что теплота будто бы есть молекулярно-кинетическая энергия тела. В отождествлении теплоты с молекулярно-кинетической энергией скрыта невысказанная до конца, совершенно ошибочная мысль, что наибольшее количество тепла, которое может быть отдано телом при охлаждении, якобы равно энергии хаотического движения частиц тела. В действительности количество тепла, которое тело отдает при охлаждении, зависит в высокой мере от условий, в которых происходит охлаждение. Например, при конденсации газа отдача тепла происходит главным образом за счет убыли молекулярно-потенциальной энергии тела, а не за счет уменьшения запаса молекулярно-кинетической энергии.

В природе не существует никаких «запасов тепла». О теплоте не может быть и речи, когда нет процесса теплопередачи, подобно тому как в механике нельзя говорить о работе, когда нет процесса, заключающегося в перемещении точек приложения действующих сил. Следует помнить, что любой вид энергии является однозначной функцией состояния тела. Энергия не зависит от пути перехода тела из одного состояния в другое. Работа и теплота не являются видами энергии. *Процесс работы и «теплопроцесс» представляют собой две единственно возможные* формы передачи энергии *от одного тела к другому, а количество работы и количество тепла представляют собой* меру энергии, *переданной в двух различных, единственно возможных формах — в формах работы и тепла.*

Всегда, когда выполняется работа, имеется по меньшей мере два тела: одно, которое развивает силы, совершающие работу, и другое, к которому эти силы приложены. Первое тело, производящее работу, отдает энергию; второе тело, на которое работа направлена, получает энергию.

Точно так же всегда, когда проявляется теплота, имеется тоже по меньшей мере два тела: одно, которое отдает энергию, и другое, которое получает энергию.

Мерой энергии, переданной от одного тела к другому, служит в зависимости от формы перехода одна из двух эквивалентных друг другу величин: количество работы или количество тепла.

В чем состоит качественное различие понятий «теплота» и «работа»? В том, что *под количеством тепла понимают энергию, переданную совокупностью микрофизических процессов, которые регулируются законами статистики* (обмен энергии при соударении

молекул, излучение света и т. п.), тогда как *под количеством работы понимают энергию, передаваемую в макрофизическом процессе, где перемещение точек приложения сил доступно нашему непосредственному контролю.*

Для примера рассмотрим с указанной точки зрения конвекцию, т. е. перенос веществом любого вида энергии. Если конвекция каких-либо видов энергии (но только не внутренней энергии) производится перемещением тел достаточно крупных, чтобы имелась возможность регулировать их движение, то этот процесс попадает под понятие работы, например перемещение наэлектризованного тела из одной системы наэлектризованных тел в другую, аналогичное перемещение намагниченного тела и т. д. Но если конвекция при отсутствии внешних сил протекает стихийно, как, например, в случае диффузии заряженных или намагниченных коллоидных частиц, то это есть перенос тепла. Внутренняя энергия тела является единственным видом энергии, имеющим статистическую основу, поэтому конвекция внутренней энергии всегда должна рассматриваться как перенос тепла.

Радиоволны представляют собой пример передачи энергии в форме работы, производимой отправительной станцией и направленной на возбуждение электрических токов в антенне приемной станции. Волны (или кванты) света представляют собой пример передачи энергии в форме тепла.

Применяя установленные выше понятия, нетрудно придать первому началу термодинамики вид уравнения. Для этого представим себе, что некоторое интересующее нас тело посредством каких-либо воздействий (безразлично каких) переводится из термодинамического состояния C_1, в котором его энергия была равна U_1, в новое состояние C_2, в котором его энергия делается равной U_2.

Энергия может быть сообщена телу или системе тел в двух единственно возможных формах: в форме работы и тепла. Значит, каковы бы ни были конкретные особенности процесса, можно утверждать, что *приращение полной энергии системы* ($U_2—U_1$) заведомо должно быть *равно сумме затраченной работы и сообщенного системе тепла.*

Взамен величины затрачиваемой работы введем величину, обратную по знаку, т. е. работу, выполняемую системой. Приведенное выше утверждение можно перефразировать следующим образом: *теплота, сообщаемая системе, расходуется на приращение энергии системы и на работу, выполняемую системой.*

Условимся, как обычно, приращение обозначать в целях сокращения письма символом Δ:

$$\Delta U = U_2 - U_1.$$

Количество тепла, сообщенного системе в процессе перехода ее из состояния C_1 в состояние C_2, обозначим буквой Q; выполняемую

при этом системой работу обозначим буквой A. Тогда

$$Q = \Delta U + A. \qquad (11)$$

Понятно, что все величины, входящие в уравнение (11), должны быть выражены в одних и тех же единицах энергии. Если бы мы имели в виду измерять теплоту Q и энергию U в калориях, тогда как A — в единицах работы, то в уравнении (11) мы должны были бы перед A поставить в виде множителя термический эквивалент единицы работы; такое начертание принято многими. Однако на практике такое начертание уравнений не имеет никаких преимуществ, так как нельзя заранее сказать, потребуется ли по существу задачи вести выкладки в калориях или, скажем, в джоулях.

Чтобы не обременять формулы лишними обозначениями, мы нигде не пишем символов термического эквивалента единицы работы и механического эквивалента единицы тепла, оставляя, таким образом, открытым вопрос, в каких именно единицах выражены Q, U и A — в калориях или в единицах работы. Требуется только помнить, что для всех членов уравнения единица энергии при числовых выкладках должна быть взята одна и та же (если Q и U измерены в калориях, то и A должно быть выражено в калориях; если A измерено в джоулях, то и Q и U должны быть выражены в джоулях, и т. д.).

§ 79. Изобарная и изотермическая работа газа

Как было показано в § 76, в общем случае, когда при расширении тела давление изменяется, работу, производимую телом вследствие расширения, надо вычислять по формуле

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv.$$

Эта формула приобретает весьма простой вид, когда нагревание и связанное с ним расширение тела происходит изобарно, т. е. при неизменном давлении. В этом случае p как величину постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$A_p = p(v_2 - v_1). \qquad (12)$$

Работа, производимая телом при изобарном расширении, равна произведению давления на приращение объема.

Эту формулу чаще всего приходится применять для расчета работы, производимой телом при изменении агрегатного состояния — при кипении жидкостей, при плавлении; давление в этих случаях остается неизменным до тех пор, пока вся жидкость не выкипит или пока все твердое тело не расплавится.

В качестве примера на применение формулы изобарной работы рассчитаем мощность паровой машины, работающей одним наполнением (т. е. работающей без прекращения впуска пара в цилиндр на какой-либо части хода поршня или, как говорят, без «отсечки пара»). Пусть давление пара в котле на 3 *ат* превышает давление наружного воздуха; объем цилиндра 10 *л*, вал делает 200 об/мин, потери на трение 10%.

Чтобы получить работу в килограммметрах, выразим давление в $\kappa\Gamma/\text{м}^2$ и объем в кубических метрах. Легко видеть, что 3 *ат* $=30\,000\ \kappa\Gamma/\text{м}^2$ и 10 *л* $=\frac{1}{100}\ \text{м}^3$. По формуле $A_p=p(v_2-v_1)$, где в данном случае v_2-v_1 есть объем цилиндра, а p — рабочее давление пара, находим, что при каждом ходе поршня машина производит работу $30\,000\cdot\frac{1}{100}\ \kappa\Gamma\text{м}=300\ \kappa\Gamma\text{м}$. Работа, производимая машиной в 1 сек. с учетом потери на трение, равна $A_p=0{,}9\cdot 300\cdot\frac{200}{60}\ \kappa\Gamma\text{м}=900\ \kappa\Gamma\text{м}$. Но работа в 1 сек. есть мощность: $W=\frac{A}{t}=900\ \kappa\Gamma\text{м/сек}$.

Чтобы получить мощность машины в лошадиных силах, надо разделить полученное число на 75; таким образом находим, что машина имеет мощность 12 *л.с.*

Для вычисления работы изотермического расширения тела по общей формуле работы расширения

$$A=\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

надо знать, как при постоянстве температуры изменяется давление в зависимости от объема.

Для идеального газа, взятого в количестве ν молей, $p=\nu\frac{RT}{v}$. Подставим это выражение в приведенную выше формулу и, учитывая, что вследствие изотермичности процесса T есть величина постоянная, вынесем νRT за знак интеграла. Тогда под знаком интеграла мы будем иметь дифференциал натурального логарифма: $\frac{dv}{v}=d\ln v$. Следовательно, изотермическая работа идеального газа равна:

$$A_t=\nu RT\ln\frac{v_2}{v_1}. \qquad (13)$$

Эта формула имеет широчайшее применение в приближенных термодинамических расчетах и поэтому является одной из важнейших формул термодинамики. Заметим, что отношение объемов $\frac{v_2}{v_1}$ в этой формуле можно заменить обратным отношением давлений $\frac{p_1}{p_2}$, так как на изотерме $pv=\text{const}$:

$$A_t=\nu RT\ln\frac{p_1}{p_2}. \qquad (14)$$

Понятно, что, желая получить работу расширения выраженной в килограммметрах, мы должны газовую постоянную R подставить

в формулу (13) или (14), выразив ее тоже в килограмметрах ($R=0{,}848$ *кГм*); если R выражено в калориях или в эргах, то соответственно и A_t будет выражено в калориях или эргах.

Согласно закону Джоуля внутренняя энергия идеального газа не изменяется при изотермическом расширении или сжатии газа. Это означает, что *вся сообщаемая газу при изотермическом расширении теплота идет на производство работы; вся работа, затрачиваемая на изотермическое сжатие газа, отдается газом в форме тепла*; для идеального газа при $t=\text{const}$

$$Q_t = A_t. \tag{15}$$

Следовательно, приведенные выше формулы могут в равной мере служить как для расчета производимой газом изотермической работы, так и для расчета теплоты Q_t, потребной для изотермического расширения газа, иначе говоря, «скрытой теплоты» изотермического расширения.

§ 80. Термохимические уравнения

Применим первое начало термодинамики к химическим процессам. Химические процессы обычно сопровождаются либо выделением тепла, либо поглощением тепла. Те процессы, при которых система выделяет тепло, называют *экзотермическими* [1]), а те, при которых система поглощает подводимое извне тепло, называют *эндотермическими* [2]).

В зависимости от условий, при которых происходит химическая реакция, наряду с выделением или поглощением тепла система может в одних случаях производить работу, в других случаях может оказаться, что для поддержания химического процесса требуется затрата работы. Значительную работу система способна произвести в тех случаях, когда образуются газообразные продукты реакции. Примером может служить взрыв пороха. Многие реакции могут быть «электрифицированы» посредством гальванических элементов; химические процессы, протекающие в гальваническом элементе, сопровождаются производством работы, идущей на образование электрического тока. Обратный пример представляют собой реакции, протекающие при электролизе; здесь химический процесс требует затраты работы.

В термохимии убыль внутренней энергии системы называют условно тепловым эффектом реакции. В действительности убыль внутренней энергии может быть отдана частично в форме тепла, частично в форме работы. Какая именно часть убыли внутренней энергии будет отдана в форме тепла и какая в форме работы, это

---

[1]) От греческого слова exō — в н е.
[2]) От греческого слова endon — в н у т р ь.

в значительной мере зависит от тех условий, в которые поставлена химическая система. Надо помнить, что величина, которую в термохимии принято называть тепловым эффектом реакции, соединяет в себе обе эти части: и теплоту, отдаваемую системой, и работу, производимую системой (измеренную, понятно, в тех же единицах, что и теплота; обычно — в калориях).

Мы обозначали приращение внутренней энергии символом ΔU:

$$\Delta U = U_2 - U_1.$$

Величина, противоположная по знаку, будет представлять собой убыль внутренней энергии, следовательно, тепловой эффект реакции есть $-\Delta U$. Термохимические уравнения принято писать по следующей схеме: слева ставят внутреннюю энергию исходных веществ U_1, справа — внутренюю энергию продуктов реакции U_2 и тепловой эффект реакции $(-\Delta U)$:

$$U_1 = U_2 + (-\Delta U). \qquad (16)$$

Внутреннюю энергию 1 моля какого-либо вещества при той температуре и том давлении, для которого написано термохимическое уравнение, принято выражать химической формулой вещества. Так, например, O_2 в термохимических уравнениях означает внутреннюю энергию 32 *г* кислорода, CO_2 означает внутреннюю энергию 44 *г* углекислоты и т. д. (Нередко термохимические уравнения пишут не для грамм-молекул, а для килограмм-молекул; в этом случае O_2 будет означать внутреннюю энергию 32 *кг* кислорода.) Например, уравнение

$$C_{(\text{тв})} + O_{2(\text{газ})} = CO_{2(\text{газ})} + 94\,050 \text{ кал}$$

означает, что когда в процессе горения 1 *г-атом* (12 *г*) твердого углерода соединяется с 1 молем газообразного кислорода (32 *г*), то получается 1 моль (44 *г*) углекислоты и выделяются в форме тепла и работы 94 050 *кал*.

Во многих случаях посредством термохимических уравнений вычисляют тепловой эффект таких реакций, для которых непосредственное измерение теплового эффекта опытным путем почему-либо является невозможным. Например, опытным путем нельзя определить теплоту сгорания твердого углерода в окись углерода CO, потому что при горении углерода всегда образуется некоторое количество углекислоты CO_2, но измерена теплота сгорания окиси углерода в углекислоту:

$$CO_{(\text{газ})} + \frac{1}{2} O_{2(\text{газ})} = CO_{2(\text{газ})} + 67\,634 \text{ кал.}$$

Нетрудно видеть, что если это уравнение вычесть из написанного выше уравнения, то получается как раз искомая теплота сгорания

углерода в окись углерода:

$$C_{(тв)} + \frac{1}{2} O_{2(газ)} = CO_{(газ)} + 26\,416 \text{ кал.}$$

Для реакций, протекающих при неизменности объема, тепловой эффект Q_v в точности равен убыли внутренней энергии. Для реакций, протекающих при неизменности давления, тепловой эффект Q_p равен убыли так называемого «теплосодержания» [1]).

Поскольку изменение внутренней энергии (так же как и «теплосодержания») определяется конечным и начальным состояниями системы и не зависит от промежуточных стадий процесса, то очевидно, что и *тепловой эффект реакции не зависит от того, на какие промежуточные стадии разделена реакция.* Этот основной закон термохимии был установлен петербургским академиком Гессом в 1840 г. за несколько лет до того, как Роберт Майер и Гельмгольц сформулировали закон сохранения энергии.

В термохимии чаще всего поступают следующим образом: опытным путем определяют *теплоты сгорания различных элементов и их соединений.* Теплоту сгорания соединения вычитают из суммы теплот сгорания элементов, из которых состоит это соединение; таким образом находят *тепловой эффект образования этого соединения из элементов* [2]).

---

[1]) Теплосодержанием называют величину $U+pv$.

[2]) Например, допустим, нас интересует тепловой эффект образования сернистого углерода из твердого углерода и серы:

$$C_{(тв)} + 2S_{(тв)} = CS_{2(газ)} + x \text{ кал.}$$

Чтобы определить x, берем из термохимических опытных определений теплоты сгорания: 1 моля сернистого углерода, 1 *г-атома* твердого углерода и 2 *г-атомов* твердой серы:

$$CS_{2(газ)} + 3O_{2(газ)} = CO_{2(газ)} + 2SO_{2(газ)} + 263\,560 \text{ кал.}$$
$$C_{(тв)} + O_{2(газ)} = CO_{2(газ)} + 94\,050 \text{ кал.}$$
$$2S_{(тв)} + 2O_{2(газ)} = 2SO_{2(газ)} + 141\,930 \text{ кал.}$$

Вычитая первое уравнение из суммы двух последующих, или, иначе говоря, вычитая теплоту сгорания сернистого углерода из суммы теплот сгорания C и 2S, находим искомый тепловой эффект реакции соединения углерода и серы:

$$C_{(тв)} + 2S_{(тв)} = CS_{2(газ)} - 27\,580 \text{ кал.}$$

Мы видим, что эта реакция эндотермическая: тепловой эффект ее отрицателен.

ГЛАВА XIV

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

§ 81. Схематизация явлений («модели» в молекулярной физике)

Молекулы большинства газов состоят из нескольких атомов, а каждый атом состоит из положительно заряженного ядра и отрицательных электронов, вращающихся вокруг ядра, причем один и тот же электрон может находиться то на той, то на другой орбите. При соединении атомов в молекулу составные части атомов подвергаются некоторой перестановке, характер которой мы еще не во всех случаях знаем. Однако несомненно, что наружной частью всех молекул является электронная оболочка.

Всякий раз, как две молекулы приходят в близкое соприкосновение, начинают проявляться отталкивающие силы, вызываемые взаимодействием электронных оболочек, и силы молекулярного притяжения.

Законы этих взаимодействий даже в настоящее время известны не в полной мере. Между тем, для применения статистического метода хотя бы к газам, где силами молекулярного притяжения иногда можно пренебречь, важно знать, по какому закону отталкиваются сблизившиеся молекулы. К счастью, оказалось, что здесь можно сделать две гипотезы, несомненно грубые, но тем не менее давшие удовлетворительное решение множества вопросов. Обе эти гипотезы были разработаны, когда еще не было никаких сведений о сложности строения молекул. Первая из них, выдвинутая более 200 лет назад Даниилом Бернулли и имеющая до сих пор широкое применение, заключается в том, что сблизившиеся молекулы отталкиваются так, как если бы они были идеально упругими шариками. По второй гипотезе, развитой в 1860 г. Максвеллом и позже усовершенствованной Чепменом, молекулы отталкиваются силами, обратно пропорциональными некоторой (у Максвелла — пятой) степени расстояния между молекулами.

Таким образом, вместо сложного явления природы, еще не вполне доступного для научного анализа, создается тот или иной конкретный образ (*модель*), взятый с таким расчетом, чтобы его свойства и его проявления в широкой области давали приблизительное

совпадение с фактами, наблюдаемыми экспериментально. Обходиться без таких конкретных образов в физике невозможно: если бы мы захотели отказаться от представления о молекулах как об упругих тельцах или как о центрах сил, обратно пропорциональных n-й степени расстояния, то нам пришлось бы отказаться и от всей кинетической теории газов. Эти гипотезы приблизительно правильно отражают объективную реальность; критерием их правильности является практика, эксперимент.

Применение подобных моделей имеет, однако, и некоторые минусы. Модель всегда несовершенна, и поэтому результаты, вытекающие из ее применения, являются не вполне точными; чтобы их улучшить, приходится усложнять модель, которая в результате теряет первоначальную простоту. Пример: кинетическая энергия двух сталкивающихся молекул затрачивается на их деформацию; когда эта деформация достигает наибольшей величины, центры масс обеих молекул находятся на самом близком расстоянии друг от друга, и понятно, что деформация будет тем больше, наименьшее расстояние центров будет тем меньше, чем больше поступательная скорость молекул, т. е. чем выше температура газа. Выходит, что, принимая гипотезу упругих шарообразных молекул, мы должны будем приписать этим шарикам своеобразную особенность: их диаметр должен уменьшаться при повышении температуры газа (так как наименьшее расстояние центров сталкивающихся молекул — это и есть, применительно к нашей модели, диаметр молекулы). Указанная новая усложненная модель дает большее согласие с опытом.

Употребление моделей приносит еще и ту пользу, что теория делается более простой в математическом отношении. Например, если бы мы вполне точно знали, как изменяется расположение составных частей двух молекул при столкновении последних, то учесть математически все эти изменения было бы, конечно, делом весьма трудным; гипотеза упругих шариков избавляет нас от этой трудности. Подобно этому мы нередко (особенно в ориентировочных подсчетах) сознательно вводим в теорию фактически неверные допущения, чтобы выиграть в простоте рассуждений, приводящих нас к приближенному (иногда даже грубо приближенному), но все же ценному результату.

В отношении гипотезы, что соударение молекул происходит по законам удара идеально упругих шаров, следует заметить еще следующее: для применения достаточно, чтобы эта гипотеза оправдывалась *в среднем*. Что же касается соударения *отдельных* молекул, то установлено, что наряду с идеально упругими ударами, когда одинаковые молекулы обмениваются скоростями, имеются случаи не вполне упругого удара, когда кинетическая энергия молекул частично превращается во внутриатомную энергию и в связи с этим происходит переброс электронов с одних

орбит на другие; такие удары называют неупругими *ударами первого рода*. В других случаях удар «более чем упруг», т. е. энергия движения молекул при ударе возрастает за счет некоторого уменьшения внутриатомной энергии — *удар второго рода*. Обнаружено, что неупругие удары с превращением энергии движения молекул во внутриатомную или внутриатомной энергии в энергию движения молекул постоянно происходят в действительности.

Газ, заключенный в какой-либо «теплоизолированный» сосуд и предоставленный самому себе, не испытывает ни самопроизвольного охлаждения, ни самопроизвольного нагревания. Отсюда можно заключить, что в ударах первого и второго рода превращение молекулярно-кинетической энергии во внутриатомную и обратное превращение энергии в среднем взаимно компенсируют друг друга. Поэтому во многих случаях неупругие удары можно не принимать во внимание; гипотеза, что все соударения молекул подчинены законам удара идеально упругих шаров, хотя и не верна, но тем не менее эта гипотеза является законной (не вносит никаких ошибок) при вычислении средних значений различных величин, характеризующих молекулярно-тепловое движение газа.

§ 82. Максвеллов закон распределения молекулярных скоростей в газе

В предыдущем не раз подчеркивалась беспорядочность, или хаотичность, молекулярных движений. Однако английский физик Максвелл в 1860 г. нашел точный закон, которому подчинены скорости молекул данного газообразного тела (причем предполагается, что все молекулы этого газа одинаковы и что температура во всех частях газа одна и та же). Этот закон представлен на рис. 186. Здесь по оси абсцисс откладываются различные значения скорости, возможные для отдельной газовой молекулы, от нуля до некоторой максимальной величины, а по оси ординат откладывается количество молекул, обладающих значением скорости, соответствующим данной абсциссе [1]). Это количество остается неизменным, но состав его все время меняется благодаря столкновениям молекул между собой (так как при каждом столкновении скорость сталкивающихся молекул претерпевает резкое изменение).

График (рис. 186) и приведенная ниже таблица показывают следующее:

1) число молекул, имеющих малые скорости, очень мало́ по отношению ко всему числу молекул газа;

---

[1]) Если u и $u+du$ — два весьма близких друг к другу значения абсциссы, а $\frac{dN}{du}$ — соответствующее среднее значение ординаты, то $\frac{dN}{du}\cdot du = dN$ (площадь элементарной полоски графика) есть число молекул, обладающих скоростями, заключенными в пределах от u до $u+du$.

2) очень мало́ также число́ молекул, имеющих очень большие скорости;

3) есть одно значение скорости, которое встречается чаще всех других значений, так называемая *наивероятнейшая скорость* ρ; этому значению соответствует максимум кривой распределения;

4) большой процент всех молекул имеет скорости, не очень сильно отличающиеся от наивероятнейшей скорости (см. таблицу на стр. 331), поэтому в некоторых упрощенных ориентировочных расчетах можно принимать, что все молекулы обладают примерно одной и той же скоростью.

Аналитически максвеллов закон распределения молекулярных скоростей выражается нижеследующей формулой:

$$dN = N\cdot\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{u}{\rho}\right)^2\cdot e^{-\left(\frac{u}{\rho}\right)^2}\cdot d\left(\frac{u}{\rho}\right); \qquad (1)$$

здесь N — общее число молекул в заданной массе газа; dN — число молекул, скорости которых заключены в пределах u и $u \pm du$; ρ — наивероятнейшая скорость молекул.

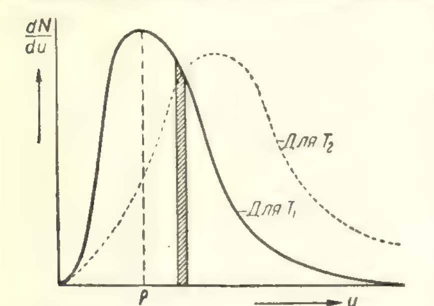


Рис. 186. Максвеллов закон распределения молекулярных скоростей для двух температур; $T_2 > T_1$.

На рис. 186 вторая, более пологая, кривая, изображенная пунктиром, показывает распределение скоростей по закону Максвелла при температуре более высокой, чем температура, к которой относится первая кривая. Сопоставление этих двух кривых наглядно выявляет свойства уравнения Максвелла (1). Мы видим, что при повышении температуры растет наивероятнейшая скорость (максимум кривой распределения сдвигается направо); это соответствует тому обстоятельству, что при повышении температуры скорости молекул вообще возрастают. Кривая Максвелла при повышении температуры становится более пологой: это означает, что при повышении температуры распределение молекул по скоростям становится несколько более равномерным. Чем выше температура, тем выше идет правая ветвь кривой и тем ниже опущена левая ветвь; это означает, что с повышением температуры все более увеличивается доля молекул, скорости которых превышают наивероятнейшую скорость, и убывает доля молекул с малыми скоростями.

Закон распределения молекулярных скоростей представляет типичный пример *статистических законов*, в которых делаются утверждения, имеющие чрезвычайно большую вероятность, но не могущие рассматриваться как вполне достоверные (см. § 74).

Распределение скоростей между молекулами азота при комнатной температуре по закону Максвелла

Область скоростей в *м/сек*	Процент общего числа молекул, имеющих скорости, заключенные в указанных пределах
$0<u<100$. . .	1
$100<u<300$. . .	25
$300<u<500$. . .	42
$500<u<700$. . .	24
$700<u<900$. . .	7
$900<u$ . . .	1

Важно подчеркнуть, что закон Максвелла соблюдается вполне строго лишь для того случая, когда газ находится в покое.

Было осуществлено много опытов, доказавших непосредственными наблюдениями справедливость закона Максвелла. На рис. 187 показана схема одного из таких опытов, произведенного Штерном (в 1920 г.). Здесь V — сосуд, внутренность которого доведена до наибольшей возможной степени разрежения. Внутри сосуда находится источник молекул A (посеребренная платиновая проволока, накаливаемая электрическим током). Частицы пара серебра со средней скоростью, соответствующей температуре проволоки, вылетают по прямым траекториям в окружающее пространство. При помощи одной или нескольких перегородок B с отверстиями выделяется расширяющийся молекулярный пучок, который дает серебряный налет на стеклянной пластинке P (частицы серебра уже при комнатной температуре имеют свойство, попадая на стекло, приставать к нему). Отверстиям в перегородках придана такая форма, чтобы получающееся пятно имело вид прямой черты. Если привести весь прибор во вращение около оси, перпендикулярной к направлению молекулярного пучка (и перпендикулярной также к плоскости чертежа) и проходящей через A, то серебряное пятно на пластинке P несколько сместится в направлении, противоположном направлению вращения. В самом деле, пока молекулы серебра летят от A до пластинки P, эта последняя успевает сдвинуться на некоторое расстояние s, так что и след, оставляемый молекулами, будет лежать на таком же расстоянии s от прежнего следа.

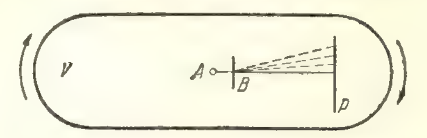


Рис. 187. Схема опытов Штерна.

Пусть l — расстояние от A до P; время, в течение которого пролетит от A до P молекула, имеющая скорость u, будет $t=\frac{l}{u}$. При

ν оборотах прибора в 1 сек. путь, пройденный пластинкой за время t, будет:

$$s = 2\pi l \cdot \nu t = 2\pi \frac{l^2 \nu}{u}.$$

При $\nu = 50$ сек.$^{-1}$, $l = 10$ *см*, $u = 500$ *м/сек* было бы $s = 6$ *мм*.

Так как скорости молекул распределяются по закону Максвелла, то и значения s будут иметь известное «распределение», в результате чего пятно будет несколько размытым. Можно, обратно, из распределения густоты налета вывести закон распределения молекулярных скоростей.

Теоретическое обоснование закона распределения молекулярных скоростей было глубоко проанализировано русским физиком Н. Н. Пироговым в ряде работ, опубликованных в 1886—1891 гг. Пирогов показал, что в противоположность соударению молекул (соударения приводят к распределению скоростей по закону Максвелла) ограничение пространства, занятого газом, оказывает на молекулярные скорости выравнивающее влияние — стремится привести скорости молекул газа к одинаковой для всех молекул величине.

Весомость газов с точки зрения молекулярно-кинетической теории. В каждый данный момент только незначительная часть молекул газа соприкасается со стенками и дном сосуда. Тяжесть остальных молекул в этот момент не может передаться дну сосуда, так как нет сил взаимодействия. Возникает вопрос: каким же образом оказывается, что хотя бóльшая часть молекул в каждый данный момент непосредственно и не влияет на равновесие весов, но все же вес газа равен суммарному весу всех его молекул?

Весом газа мы называем избыточную силу давления его на дно сосуда в сравнении с давлением, которое газ оказывает на верхние стенки сосуда. Это избыточное давление возникает в результате ускорения, которое приобретают молекулы газа при движении в поле тяжести. Для простоты рассуждения представим себе, что внутри кубического ящика, два основания которого горизонтальны, движется одна молекула газа. Мысленно разложим векториально скорость молекулы на три взаимно перпендикулярные составляющие: на одну вертикальную, обозначив ее через u, и на две расположенные в горизонтальной плоскости. Эти последние для нас неинтересны: они обусловливают давление молекулы на боковые стенки сосуда, и поле тяжести на них не влияет. Когда молекула ударяется о верхнюю или нижнюю стенку, ее вертикальная составляющая скорости изменяет знак на обратный, и, следовательно, импульс каждого удара, равный геометрическому изменению количества движения, равен $mu - (-mu) = 2mu$. Обозначим вертикальную составляющую скорости молекулы близ верхней стенки сосуда через u_1 и близ нижней стенки через u_2. Тогда в результа-

те каждого пробега молекулы от верхней стенки до нижней возникает разность давлений на эти стенки, равная $2mu_2 - 2mu_1$.

Пусть t есть время пробега молекулы от верхней стенки до нижней и n — число ударов молекулы в каждую из этих стенок в 1 сек. Так как удар в каждую из этих стенок, например в верхнюю, происходит через промежуток времени, равный $2t$, то, очевидно, $n = \frac{1}{2t}$.

Давление, которое испытывает нижняя стенка, равно $2mu_2n$, давление на верхнюю стенку равно $2mu_1n$, разность их

$$p_2 - p_1 = 2m(u_2 - u_1)n = m\frac{u_2 - u_1}{t}.$$

Но если g есть ускорение силы тяжести, то очевидно, что

$$u_2 = u_1 + gt,$$

откуда

$$p_2 - p_1 = mg.$$

Следовательно, каждая молекула газа производит избыточное давление на дно сосуда в сравнении с давлением на верхнюю стенку сосуда, равное весу этой молекулы.

Приведенные рассуждения побуждают поставить вопрос: если каждая молекула газа при своем движении сверху вниз приобретает некоторое ускорение, то не означает ли это, что температурное равновесие газа в поле тяжести будет характеризоваться неодинаковым значением средней скорости молекул в верхних и нижних слоях газа? На первый взгляд может показаться, что средняя скорость внизу будет больше, чем в верхних слоях. Это, однако, не так. Дело в том, что поле тяжести влияет не только на вертикальную составляющую скорости молекул, но также и на распределение плотности молекул. При температурном равновесии у газа, находящегося в поле тяжести, плотность изменяется с высотой по барометрическому закону (§ 98). Число молекул в единице объема, обладающих какой-либо скоростью u, в нижних слоях газа больше, чем в верхних. Поэтому, как показывает точный расчет, среднее значение скорости в верхних и в нижних слоях одинаково. Так, если в каком-либо городе число жителей определенного возраста в два раза больше числа жителей того же возраста в другом городе и это соотношение имеет место для всех возрастов, то средний возраст жителей в обоих городах все же одинаков.

Для правильного понимания затронутой выше проблемы, которая впервые была рассмотрена Максвеллом (и известна под названием *парадокса Максвелла*), важно понять, что барометрическое изменение давления и производимое полем изменение вертикальной составляющей скорости молекул идеального газа — это два способа выражения одного и того же факта. Разность давлений, производимая полем тяжести в двух расположенных друг над другом

горизонтальных слоях газа, вызывается изменением вертикальной составляющей скорости молекул, движущихся из верхнего слоя в нижний и из нижнего в верхний. По той же причине происходит уплотнение нижних слоев газа, чем и обеспечивается равенство средних скоростей.

Мы видим, таким образом, что с равным правом весомость газов можно рассматривать или как следствие ускорения молекул при их движении вниз, или как проявление барометрической разности давлений.

§ 83. Основное уравнение кинетической теории газов

Выведем весьма важное уравнение, устанавливающее связь между давлением p газа, его объемом v и кинетической энергией E поступательного движения его молекул.

Для простоты вывода примем, что оболочка, в которую заключен газ, имеет форму шара радиуса R; однако окончательное уравнение будет справедливо независимо от того, какую форму имеет оболочка, и даже от того, существует ли она вообще.

Мы сделаем следующее предположение: рассматриваемый газ настолько разрежен или же молекулы его настолько малы, что столкновения молекул происходят не слишком часто, так что каждая молекула может несколько раз удариться о стенки оболочки, раньше чем она столкнется с другой молекулой. (Мы делаем это предположение тоже только в целях простоты рассуждений; его можно было бы и не делать, причем мы пришли бы в итоге к тем же самым выводам, но путем более сложных расчетов.)

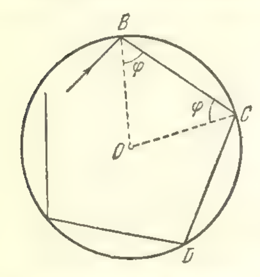


Рис. 188. К выводу основного уравнения кинетической теории газов.

Что касается самих столкновений, то мы допустим, что они происходят по законам удара вполне упругих шаров.

Рассмотрим движение одной из молекул внутри сосуда. Пусть масса молекулы будет m, скорость ее u. Пусть она в точке B ударилась о стенку. Рис. 188 изображает сечение шарообразного сосуда, проведенное через центр его O и через линию движения молекулы. Легко сообразить, что рассматриваемая молекула будет двигаться в плоскости этого сечения все время, пока не столкнется с другой молекулой, что путь ее будет состоять из равных хорд BC, CD и т. д. и что углы ее удара о стенки и отражения от стенок всякий раз будут иметь одну и ту же величину φ.

Наша задача — подсчитать давление p газа, т. е. ту силу, с какой молекулы действуют на единицу поверхности оболочки посредством ударов. Для этого сначала определим импульс, передаваемый

оболочкой молекуле при каждом столкновении. Этот импульс равен приращению количества движения молекулы, а так как при ударе о стенку изменяется только нормальная составляющая количества движения молекулы, то указанный импульс равен, следовательно, разности $mu\cos\varphi - (-mu\cos\varphi) = 2\,mu\cos\varphi$. На основании третьего закона Ньютона такую же величину импульса молекула передает оболочке при каждом ударе. Так как путь, проходимый молекулой в 1 сек., есть u и так как от одного удара об оболочку до другого молекула проходит путь $2R\cos\varphi$ (равный хорде), то число ударов данной молекулы в 1 сек. будет $\frac{u}{2R\cos\varphi}$; поэтому суммарный импульс, передаваемый оболочке рассматриваемой молекулой в секунду, будет:

$$2mu\cos\varphi\frac{u}{2R\cos\varphi} = \frac{mu^2}{R}.$$

Суммарный же импульс, передаваемый оболочке за 1 сек. в с е м и молекулами, будет $\frac{1}{R}\Sigma mu^2$, где суммирование распространяется на все молекулы (различные молекулы имеют различную скорость, они могут иметь также различную массу: наш газ может представлять собой смесь газов).

Теперь уже легко найти давление газа. Это будет не что иное, как суммарный импульс, получаемый в 1 сек. единицей поверхности оболочки, а именно:

$$p = \frac{\sum mu^2}{R\cdot 4\pi R^2} = \frac{\sum mu^2}{4\pi R^3} = \frac{\frac{1}{3}\sum mu^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{2}{3}\sum\frac{mu^2}{2}}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Но $\sum\frac{mu^2}{2}$ есть поступательная кинетическая энергия E молекул газа, а $\frac{4}{3}\pi R^3$ есть объем v газа, поэтому последняя формула перепишется:

$$p = \frac{\frac{2}{3}E}{v}, \qquad (2)$$

что значит: *давление газа численно равняется двум третям поступательной энергии движения молекул, заключающихся в единице объема газа.* Найденное уравнение и есть основное уравнение кинетической теории газов. Его можно переписать еще и так:

$$pv = \frac{2}{3}E, \qquad (3)$$

т. е. *произведение давления на объем газа равняется двум третям энергии поступательного движения молекул газа.*

При помощи этого уравнения легко сделать вывод о величине скорости поступательного движения молекул. Преобразуем это уравнение так:

$$pv = \frac{1}{3}\sum mu^2 = \frac{1}{3}\, mN\cdot\frac{1}{N}\sum u^2 = \frac{1}{3}\, Mc^2,$$

где M — масса газа, а c — средняя квадратичная скорость, которая, как легко видеть, определяется формулой

$$c = \sqrt{\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots}{N}}. \qquad (4)$$

Следует иметь в виду, что средняя квадратичная скорость c не равна *средней скорости* $\bar{u}$:

$$\bar{u} = \frac{|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots}{N}. \qquad (5)$$

Средняя скорость есть среднее значение арифметических величин скоростей молекул газа, тогда как средняя квадратичная скорость представляет собой величину, квадрат которой равен среднему значению квадратов скоростей молекул газа.

Вышеприведенное уравнение показывает, что, зная давление, объем и массу газа, можно вычислить среднюю квадратичную скорость по формуле

$$c = \sqrt{3\frac{pv}{M}}. \qquad (6)$$

На основании максвеллова закона распределения скоростей можно показать, что средняя скорость пропорциональна средней квадратичной скорости, а именно

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\cdot c; \qquad (7)$$

наивероятнейшая скорость ρ тоже пропорциональна средней квадратичной скорости:

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot c. \qquad (8)$$

Так как $3\pi > 8$, то мы видим, что средняя квадратичная скорость c несколько превышает (примерно на 8%) среднюю скорость $\bar{u}$, а эта последняя в свою очередь больше (в 1,22 раза), чем наивероятнейшая скорость ρ:

$$c > \bar{u} > \rho.$$

Основное уравнение кинетической теории газов было впервые выведено петербургским академиком Даниилом Бернулли в 1738 г. (т. е. за 110 лет до того, как в науку было введено понятие об

энергии; Бернулли получил правильную зависимость между давлением газа, его плотностью и квадратом скорости движения молекул).

Что давление газа слагается из импульсов, оказываемых отдельными молекулами газа при изменении их направления движения, это с полной достоверностью доказано совпадением разнообразных следствий уравнения (2) с опытными фактами. Кроме того, некоторые эксперименты непосредственно показывают, как возникает давление газа. Из числа таких экспериментов простотой замысла и тщательностью выполнения отличаются опыты, поставленные в 1928 г. проф. А. С. Предводителевым. А. С. Предводителев наносил на одну сторону легкой пластинки, подвешенной на нити в вакууме, гидраты солей. Кристаллизационная вода испарялась из соли. При каждом акте испарения молекула воды, покидая поверхность пластинки, оказывала на пластинку импульс mu подобно явлению отдачи при выстреле. Вследствие этого пластинка отклонялась на некоторый угол, который измерялся и сопоставлялся с вычисленным.

§ 84. Молекулярно-кинетическое понимание абсолютной температуры

Как было показано выше, идеальный газ подчиняется основному уравнению кинетической теории. Напишем это уравнение для 1 моля:

$$pv = \frac{2}{3} E.$$

Здесь

$$E = \frac{1}{2} \sum mu^2$$

есть поступательная энергия молекул, заключающихся в моле газа.

С другой стороны, идеальный газ подчиняется уравнению Клапейрона

$$pv = RT.$$

Сопоставление обоих уравнений дает:

$$E = \frac{3}{2} RT.$$

Разделим обе части этого равенства на число молекул в 1 моле, т. е. на $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$; при этом в левой части получится средняя поступательная энергия одной молекулы:

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2} kT, \tag{9}$$

где

$$k=\frac{R}{N}=1{,}3804\cdot 10^{-16}\ \textit{эрг/градус}\cdot\textit{моль}.$$

Коэффициент пропорциональности k, представляющий собой универсальную газовую постоянную, отнесенную к одной молекуле, носит название *постоянной Больцмана*.

Мы видим, что абсолютная температура T лишь постоянным множителем $^3/_2\,k$ отличается от средней поступательной энергии одной молекулы *идеального газа Максвелла*. По смыслу вывода очевидно, что коэффициент пропорциональности k остается одним и тем же для одноатомных и для многоатомных газов. Можно сказать, что мерой абсолютной температуры является средняя поступательная энергия молекулы идеального газа Максвелла.



Людвиг Больцман (1844—1906).

Из сказанного вытекает наглядное представление об абсолютном нуле температуры. Абсолютный нуль (соответствующий —273,16°C) есть та температура, при которой поступательные движения молекул в идеальном газе Максвелла замирают.

Для вычисления *средней квадратичной скорости* c поступательного движения молекул различных газов обратимся к формуле (9):

$$\frac{mc^2}{2}=\frac{3}{2}kT; \qquad (10)$$

здесь m — масса молекулы, k — константа Больцмана. Умножим обе части этой формулы на число Авогадро N. Учитывая, что произведение mN представляет собой молекулярный вес газа, а произведение kN равно универсальной газовой постоянной R, находим, что

$$c=\sqrt{3\frac{RT}{M}}. \qquad (11)$$

Для атомарного водорода при 0°C получаем ($M=1$, $R=8{,}315\cdot 10^7$ *эрг/моль·градус*, $T=273{,}16$):

$$c=\sqrt{3\cdot 8{,}315\cdot 10^7\cdot 273{,}16}=2{,}6\cdot 10^5\ \textit{см/сек}=2600\ \textit{м/сек}.$$

Итак, при 0° С средняя квадратичная скорость поступательного движения частиц атомарного водорода равна 2600 *м/сек*. При той же температуре средняя квадратичная скорость молекул любого другого газа будет в $\sqrt{M}$ раз меньше (M — молекулярный вес); так, для обычного молекулярного водорода ($M=2$)

$$c=\frac{2600}{\sqrt{2}}=1840 \text{ м/сек};$$

для кислорода ($M=32$) получается $c=461$ *м/сек*.

Средняя арифметическая скорость $\bar{u}$, как было упомянуто в § 83, меньше среднеквадратичной скорости примерно на 8%:

$$\bar{u}\approx 0{,}92\,c;$$

наивероятнейшая скорость ρ еще меньше:

$$\rho=\sqrt{\frac{2}{3}}\,c\approx 0{,}815\,c,$$

следовательно,

$$\frac{m\rho^2}{2}=kT. \qquad (12)$$

Пусть в объеме v имеется смесь газов 1, 2, 3 и т. д. Так как давление p газовой смеси есть суммарный результат ударных действий всех молекул смеси, то можем написать:

$$p=p_1+p_2+p_3+\ldots, \qquad (13)$$

где p_1, p_2, p_3 и т. д. суть давления, производимые молекулами каждого *компонента*[1]) в отдельности. Это уравнение выражает закон, найденный экспериментально в 1802 г. английским ученым Дальтоном: *давление каждого компонента имеет такую величину, как будто бы рассматриваемый компонент заполнял объем один, т. е. как будто других компонентов не было.*

Давления p_1, p_2, p_3 и т. д. называют *парциальными*[2]) давлениями.

Закон Дальтона вытекает из основного уравнения кинетической теории газов. Действительно, энергия поступательного движения молекул смеси газов (поскольку предполагается, что между молекулами нет заметных сил взаимодействия) равна сумме энергий газов, составляющих смесь:

$$E=E_1+E_2+E_3+\ldots$$

Для смеси в целом справедливо уравнение

$$pv=\frac{2}{3}E.$$

---

[1]) Компонентом (от латинского compono — складываю) называют химически индивидуальную составную часть смеси.

[2]) Парциальный (от латинского pars — часть) — частный, частичный.

То же самое уравнение справедливо, конечно, и для каждого газа, взятого в отдельности; если каждый из этих газов мы возьмем в том количестве, в котором этот газ входит в состав смеси, при том же присущем ему значении энергии E_1 или E_2 и т. д. и предоставим ему занимать объем v, то мы вправе будем записать такую систему уравнений:

$$p_1 v = \frac{2}{3} E_1,$$

$$p_2 v = \frac{2}{3} E_2$$

и т. д.

Просуммировав эти уравнения, воспользовавшись написанным выше равенством для суммы энергий газов, составляющих смесь, и сократив получаемое таким образом уравнение на v, приходим к закону Дальтона:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$$

§ 85. Об уточненном (термодинамическом) понимании абсолютной температуры

Недостаточно разреженные газы не вполне строго следуют законам Бойля и Ге-Люссака; для сильно сжатых газов уравнение Клапейрона становится непригодным. Неточность уравнения Клапейрона объясняется тем, что между молекулами газа существуют силы взаимодействия; силы взаимодействия нарушают равномерность и прямолинейность движения молекул; объем, занятый самими молекулами, уменьшает свободное пространство, в котором движение молекул может происходить беспрепятственно.

Воображаемый газ, между молекулами которого вовсе не существует сил притяжения, а отталкивающие силы проявляются так, как если бы атомы были бесконечно малыми упругими шариками, называют *идеальным газом*.

Быстрое и успешное развитие статистической механики показало, что представление об идеальном газе является довольно точной моделью реальных разреженных газов. Однако оказалось, что представление об идеальном газе нуждается в некотором принципиально важном усовершенствовании. Дело в том, что свойства газа зависят от того, по какому закону распределены скорости молекул газа, когда газ находится в равновесном состоянии. Мы будем называть *идеальным газом Максвелла* такой идеальный газ, для которого максвеллов закон распределения скоростей является справедливым при всех температурах (сколь угодно низких и сколь угодно высоких) и при всех плотностях газа. Имеются основания считать, что у реальных не чрезмерно разреженных газов при температурах, близких к абсолютному нулю, скорости молекул распределены не по закону Максвелла, а по другим законам: у одних газов — по закону, выведенному Бозе, у других — по закону, выведенному Ферми. В зависимости от строения атомных ядер может иметь место закон Бозе или же закон Ферми; что же касается закона Максвелла, то при температурах, близких к абсолютному нулю, он не должен оправдываться. Соответственно трем законам распределения скоростей молекул идеального газа мы будем различать три разновидности идеального газа: *идеальный газ Максвелла*, *идеальный газ Бозе* и *идеальный газ Ферми*.

Распределение скоростей молекул по законам Бозе и Ферми только при крайне низких температурах отличается от максвеллова распределения; при обычных, а также и при высоких температурах все три закона распределения скоростей

молекул практически совпадают. Следовательно, при обычных и высоких температурах идеальные газы трех упомянутых разновидностей должны обладать одинаковыми свойствами, но при крайне низких температурах их свойства неодинаковы.

В статистической механике доказывается, что уравнение Клапейрона является точным уравнением состояния идеального газа Максвелла. Однако, чтобы уравнение Клапейрона было совершенно точным уравнением состояния идеального газа, нужно измерять температуру не по водородному термометру, а по термометру, в котором должен был бы содержаться идеальный газ Максвелла. Хотя такой термометр и не может быть построен, тем не менее термодинамика позволяет вычислить, каковы были бы показания этого термометра, если бы такой термометр существовал. Температуру, вычисляемую термодинамически так, чтобы она совпадала с отсчетом температуры от абсолютного нуля по воображаемому термометру, содержащему идеальный газ Максвелла, называют *абсолютной температурой* и обозначают через T. Под абсолютным нулем, как уже было сказано выше, понимают предел низких температур; при абсолютном нуле давление идеального газа Максвелла, охлаждаемого при любом неизменном объеме, становится равным нулю.

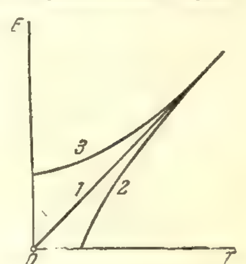


Рис. 189. Зависимость энергии поступательного движения молекул идеального газа от абсолютной температуры: *1* — по Максвеллу, *2* — по Бозе, *3* — по Ферми.

При выводе основного уравнения кинетической теории газов нам не приходилось делать предположений о том, по какому закону распределены скорости молекул. Поэтому уравнение $pv = {}^2/_3 E$ справедливо для всех трех упомянутых выше разновидностей идеального газа: Максвелла, Бозе и Ферми. Для идеальных газов уравнение $pv = {}^2/_3 E$ является справедливым для сколь угодно низких температур, вплоть до абсолютного нуля. Что же касается уравнения Клапейрона, то оно близ абсолютного нуля справедливо только для идеального газа Максвелла, но не для идеальных газов Бозе и Ферми. В статистической механике доказывается, что при распределении скоростей по закону Бозе близ абсолютного нуля (если газ охлаждать при неизменном объеме) давление идеального газа убывает быстрее, чем понижается температура газа, и делается равным нулю при температуре, отличной от абсолютного нуля ($pv < RT$). Идеальный газ Ферми обладает противоположным свойством: близ абсолютного нуля (если газ охлаждать при неизменном объеме) давление убывает медленнее, чем понижается температура ($pv > RT$), и при абсолютном нуле газ сохраняет некоторое давление, отличное от нуля, обратно пропорциональное удельному объему в степени ${}^5/_3$. Область состояний, где сказываются различные свойства идеальных газов Максвелла, Бозе и Ферми, называют *областью вырождения газа.*

Поскольку в области вырождения газы Бозе и Ферми не подчиняются уравнению Клапейрона (уравнение Клапейрона здесь заменяется весьма сложным уравнением состояния), тогда как основное уравнение кинетической теории $pv = {}^2/_3 E$ остается справедливым, то очевидно, что в области вырождения средняя энергия поступательного движения молекул газов Бозе и Ферми не является пропорциональной абсолютной температуре (рис. 189). Поступательное движение молекул идеального газа Бозе замирает раньше, чем температура сделается равной абсолютному нулю; напротив, молекулы газа Ферми сохраняют некоторую энергию поступательного движения и при абсолютном нуле (эту энергию называют *нулевой энергией*; она обратно пропорциональна удельному объему в степени ${}^2/_3$).

Молекулярно-кинетическое понимание абсолютной температуры как величины, измеряющей среднюю энергию поступательного движения молекул, являлось в свое время весьма продуктивным и сыграло исторически большую роль в развитии теоретической физики. Однако из сказанного выше ясно, что даже в

случае разреженных газов упомянутое молекулярно-кинетическое понимание абсолютной температуры в настоящее время является допустимым только со многими оговорками; в жидких и в твердых телах дело обстоит, как мы увидим, еще сложнее.

Абсолютная температура представляет собой столь важную величину, что, конечно, нельзя примириться с какой бы то ни было неточностью в трактовке этой величины.

До возникновения теории квантов вопрос о физической сущности абсолютной температуры казался наиболее простым, теперь этот вопрос является одним из наиболее сложных. Когда обнаружилось, что классическая молекулярно-кинетическая теория содержит в себе некоторые противоречия с фактами (об этих противоречиях, касающихся в особенности теплоемкостей, будет сказано в § 86), и когда на этой почве возникли новые квантово-статистические теории (в частности, теории Бозе и Ферми, упомянутые выше), убеждение в правильности простейшего молекулярно-кинетического понимания абсолютной температуры оказалось подорванным.

Вместе с тем никакое новое «наглядно-молекулярное» представление об абсолютной температуре до сих пор не установлено. Возможно, что новое наглядное и более полное представление об абсолютной температуре мы получим тогда, когда лучше изучим механизм взаимодействия вещества и излучения (ниже мы рассмотрим один из основных законов излучения, закон Стефана — Больцмана, согласно которому энергия, излучаемая так называемым абсолютно черным телом, строго пропорциональна четвертой степени T).

Поскольку в данное время молекулярно-кинетическое понимание абсолютной температуры поколеблено, особое значение приобретает безупречно правильная, но, к сожалению, лишенная наглядности термодинамическая трактовка абсолютной температуры.

Ясно, что сама постановка вопроса о разыскании соотношения между абсолютной температурой и энергией движения молекул идеального газа (рис. 189) показывает, что *под абсолютной температурой следует понимать величину, которая установлена независимо от наших представлений об идеальном газе.*

Впервые Вильям Томсон (Кельвин) в 1848 г. *на втором начале термодинамики* обосновал понятие абсолютной температуры и указал, как именно эта величина может быть измерена без применения газового термометра. Этот метод был развит Клаузиусом. Не вдаваясь в подробности, излагать которые здесь нет возможности, заметим, что для правильного понимания абсолютной температуры надо преодолеть большие трудности. Дело в том, что понятие абсолютной температуры тесно связано с другим, не менее важным, но, к сожалению, тоже трудным для усвоения понятием «энтропия» (§ 102). Строго научный путь состоит в следующем: сначала надо разъяснить сущность второго начала и на его основе, не пользуясь газовыми законами и понятием абсолютной температуры, установить понятие об энтропии; потом надо показать, как *понятие об энтропии влечет за собой представление об абсолютной температуре*, и разъяснить, как эта величина может быть измеряема без применения газового термометра и почему приближенно, при не слишком низких температурах, она равна газовой температуре, отсчитанной от абсолютного нуля; при этом представление об абсолютном нуле надо дать, не прибегая к молекулярно-кинетической картине газа

В указанном направлении должная научная строгость и общность были приданы методу Кельвина и Клаузиуса позднейшими авторами. Один способ обоснования понятий энтропии и абсолютной температуры был указан в 1909 г. Каратеодори, который развил идеи, высказанные в 1896 г. проф. Н. Н. Шиллером, и другой способ был развит в 1937 г. К. А. Путиловым.

§ 86. Тепловое равновесие и распределение энергии по степеням свободы

Поскольку разность температур двух каких-либо тел представляет собой меру отклонения этих тел от состояния теплового равновесия друг с другом, то очевидно, что наглядное молекулярно-кинетическое понимание теплового равновесия тесно связано с молекулярно-кинетическим пониманием температуры. Если исключить область весьма низких температур, где классическая теория неприменима (и если оставить в стороне некоторые принципиальные трудности в статистической механике), то, как показал Максвелл, *тепловое равновесие тел есть то состояние, когда у этих тел равны энергии, приходящиеся в среднем на одну степень свободы движения молекулы.*

Напомним, что под числом степеней свободы подразумевают число независимых движений (или, что то же, число координат, которые определяют положение тела или частицы в пространстве). У одноатомных газов, т. е. таких, молекула которых содержит лишь один атом (таковы аргон, гелий, пары металлов), каждая молекула может иметь три независимых движения вдоль трех взаимно перпендикулярных координатных осей; таким образом, она обладает тремя степенями свободы. Молекула двухатомного газа (сюда относятся: водород H_2, азот N_2, кислород O_2, окись углерода CO и др.) имеет пять степеней свободы, так как кроме трех поступательных движений она может иметь еще два вращательных движения вокруг двух взаимно перпендикулярных осей, составляющих прямой угол с линией, соединяющей оба атома. Вращение двухатомной молекулы вокруг этой последней линии не должно приниматься в расчет. Формально оно не должно приниматься в расчет потому, что при вращении вокруг этой оси, являющейся осью симметрии, положение молекулы в пространстве, определяемое ее геометрическим очертанием, не изменяется. С физической же точки зрения оно не должно приниматься в расчет потому, что благодаря малому моменту инерции энергия вращательного движения молекулы вокруг этой оси мала. По тем же причинам при определении числа степеней свободы молекулы одноатомного газа не принимаются в расчет ее вращательные движения. (Современные теоретические представления позволяют дать более полное и строгое объяснение, почему не должны учитываться вращения молекул вокруг их осей симметрии; это пояснено в т. III).

Молекулы трехатомного газа (если центры трех атомов не расположены на одной прямой) имеют шесть степеней свободы: из них три степени поступательного движения и три степени вращательного движения. Эти же шесть степеней свободы присущи всякой молекуле, содержащей более трех атомов.

Если двухатомная или вообще многоатомная молекула летит с особенно большой скоростью, то при столкновении она имеет шанс

испытать сильный удар, в результате чего атомы, ее составляющие, приходят в колебание около своих средних положений. Этим создаются новые степени свободы. Понятно, что с повышением температуры число молекул, получивших такие добавочные степени свободы, будет увеличиваться.

Закон, установленный Максвеллом (закон равномерного распределения энергии по степеням свободы), гласит: *на каждую степень свободы (независимо от характера движения и химической природы вещества) приходится в среднем вполне определенная энергия* ε, *которая пропорциональна абсолютной температуре тела.* Коэффициентом пропорциональности служит половина больцмановской постоянной. Таким образом,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} kT. \qquad (14)$$

Так как молекула любого газа имеет три поступательные степени свободы, то из закона Максвелла вытекает, что средняя поступательная энергия молекулы любого газа равна $\frac{3}{2}kT$. Этот результат мы нашли в § 84, исходя из основного уравнения кинетической теории газов и из газовых законов.

Обозначим буквой i число степеней свободы одной молекулы. Для одноатомного газа $i=3$, для двухатомного $i=5$ и для трехатомного $i=6$. На основании закона Максвелла легко вывести выражение молекулярно-кинетической энергии E 1 моля газа (с учетом энергии вращения молекул):

$$E = Ni\frac{1}{2}kT = \frac{i}{2}NkT = \frac{i}{2}RT;$$

здесь R — универсальная газовая постоянная.

Если условимся измерять энергию в калориях, то нужно принять $R \approx 2$, и мы будем иметь:

$$E = iT \text{ кал/моль}. \qquad (15)$$

Внутренняя энергия реального газа слагается в основном из молекулярно-кинетической и молекулярно-потенциальной. Считают, что взаимодействие молекул в газах не отражается на числе степеней свободы движения молекул, и на этом основании применяют формулу (15) не только для разреженного, но и для сжатых газов; при этом молекулярно-потенциальную энергию учитывают по различным приближенным формулам.

По мере повышения температуры газа возникают колебания (вибрации) атомов внутри молекулы. В этом случае, прилагая закон Максвелла, приходится считать, что число степеней свободы увеличивается. Зная строение молекулы и предусматривая возможные колебания атомов внутри молекулы, можно было бы подсчитать до-

полнительно возникающие вибрационные степени свободы. Дело, однако, осложняется тем, что внутримолекулярные колебания атомов возникают не во всех молекулах сразу при какой-либо определенной температуре, но постепенно, сначала в небольшом числе молекул и по мере роста температуры во все большем числе молекул.

Картина молекулярного движения в жидкостях еще недостаточно выяснена, чтобы можно было сделать определенные заключения о числе степеней свободы молекул жидкости. Во всяком случае в жидкостях уже нельзя пренебрегать влиянием взаимодействия молекул на ограничение свободы движения молекул.

В твердых телах молекулы совершают колебательные движения. Для точного описания прямолинейного колебательного движения материальной точки должны быть указаны две координаты: одна из них определяет положение центра колебаний на прямолинейной траектории, другая определяет смещение колеблющейся точки. Поэтому материальная точка, совершающая прямолинейные колебания, имеет две степени свободы. При гармоническом колебательном движении среднее по времени значение кинетической энергии равно среднему значению потенциальной энергии. В связи с этим условно считают, что при гармоническом колебании энергия одной степени свободы — потенциальная, энергия другой степени свободы — кинетическая.

Во многих твердых (кристаллических) телах каждый атом колеблется самостоятельно, причем он совершает одновременно три прямолинейных колебания около трех взаимно перпендикулярных осей. Отсюда следует, что *каждый атом твердого тела обладает шестью степенями свободы* ($i=6$). Применяя закон равномерного распределения энергии, найдем, что энергия атомных колебаний для 1 грамм-атома твердого вещества будет выражаться формулой

$$U = iT \text{ кал/г-атом}. \tag{16}$$

Половина этой энергии представляет собой энергию молекулярно-кинетическую. Однако следует заметить, что в действительности колебания атомов в твердом теле (как и внутриатомные колебания атомов в газовых молекулах) не являются гармоническими колебаниями, и поэтому средняя потенциальная энергия колебаний не равна средней кинетической энергии. В связи с этим вместо формулы (16) правильнее пользоваться формулой

$$E = \frac{i}{2} T \text{ кал/г-атом}, \tag{17}$$

где $i=6$. Что же касается потенциальной энергии колебаний, то она меньше E на величину, которая зависит от того, насколько колебания атомов отступают от гармонических.

Если в узлах кристаллической решетки расположены не отдельные атомы, а молекулы или группы атомов, то при невысоких температурах каждая из этих атомных групп колеблется как целое относительно своего положения равновесия. При повышении температуры возникают колебания атомов внутри атомной группы; число степеней свободы i постепенно возрастает.

Мы видим, таким образом, что максвеллов закон равномерного распределения энергии по степеням свободы имеет тот существенный недостаток, что число молекулярных степеней свободы любого реального тела не остается при нагревании или охлаждении тела неизменным, но изменяется с изменением состояния тела.

Установлено, что если постепенно нагревать газ, который был охлажден до температуры, близкой к абсолютному нулю, то даже вращательные степени свободы проявляются не сразу у всех молекул газа. При крайне низких температурах вращение молекул замирает, и все многоатомные газы ведут себя как одноатомные, т. е. молекулы их имеют только три степени свободы поступательного движения и нуль степеней свободы вращения. Аналогичная картина наблюдается и при постепенном нагревании любого твердого тела, которое было охлаждено до температуры, близкой к абсолютному нулю: нормальное число степеней свободы колебательного движения атомов (относительно положений равновесия в узлах кристаллической решетки) проявляется не сразу; если пользоваться формулой (17), то при низких температурах i не равно 6, а меньше 6, и тем меньше, чем ниже температура тела.

Вместо того чтобы считать число степеней свободы переменной величиной, в настоящее время является общепринятым рассматривать максвеллов закон равномерного распределения энергии по степеням свободы как *предельный* закон, справедливый только для тех степеней свободы, которые, как принято выражаться, являются *полностью возбужденными*. Среднюю энергию, приходящуюся на две степени свободы колебательного движения, вместо закона Максвелла $\varepsilon = kT$ определяют квантовой формулой Планка:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}, \tag{18}$$

где ε_0 — константа, характеризующая данное колебательное движение (величина ε_0 пропорциональна частоте колебаний); k — константа Больцмана.

При достаточно высокой температуре, когда kT значительно превышает ε_0 и когда, следовательно, отношение $\frac{\varepsilon_0}{kT}$ представляет собой величину малую сравнительно с единицей, формула Планка,

как нетрудно сообразить, переходит в закон Максвелла. Действительно, в этом случае

$$e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} \approx 1 + \frac{\varepsilon_0}{kT}$$

и, стало быть,

$$\varepsilon \approx kT.$$

Из формулы Планка видно, что распределение энергии между «недовозбужденными» степенями свободы является неравномерным; на колебания с большой частотой (в этом случае знаменатель формулы Планка велик) приходится в среднем при температуре T меньшая энергия, чем на колебания с малой частотой.

Частота колебания атомов в кристаллическом теле зависит от квазиупругой силы, действующей на атом, отклоненный от положения равновесия. При прочих одинаковых условиях эта квазиупругая сила будет тем более велика, чем меньше расстояние между узлами кристаллической решетки, поэтому сильное сжатие или растяжение кристалла должно влиять на частоту колебаний, а следовательно, и на среднюю энергию колебаний. Стало быть, средняя энергия, приходящаяся по формуле Планка на одно колебание, изменяется не только в зависимости от температуры, но может также изменяться при постоянной температуре в зависимости от давления, если давление весьма велико.

§ 87. Максвеллова теория газовых теплоемкостей

Опыты, проведенные в сороковых годах прошлого столетия Джоулем, Гирном и Томсоном (Кельвином), показали, что внутренняя энергия газов, если газ сжат не слишком сильно, зависит только от температуры, $U=f(T)$. Суть этих опытов (здесь мы не касаемся некоторых усложняющих дело моментов) состояла в том, что теплоизолированному газу предоставляли возможность расширяться в пустоту. При этом газ не производил работы, не получал и не отдавал тепла, поэтому внутренняя энергия его оставалась неизменной; опыты показали, что и температура газа остается в этом случае неизменной.

Теми же опытами Джоуля и Томсона (Кельвина) было обнаружено, что внутренняя энергия сильно сжатых газов зависит не только от температуры, но и от плотности: $U=f(T,v)$. Поэтому при постоянстве внутренней энергии изменение плотности газа — расширение теплоизолированного газа в пустоту — влечет за собой изменение температуры (эффект Джоуля — Томсона).

В технических расчетах часто приписывают реальным газам свойства идеального газа, т. е. в целях упрощения допускают, что между

молекулами газа вовсе не существует сил притяжения, а силы отталкивания проявляются только в моменты соударения молекул. Предполагая, что соударение молекул происходит по законам удара идеально упругих тел, можно считать, что энергия взаимодействия молекул в идеальном газе равна нулю. Тогда внутренняя энергия газа U равна молекулярно-кинетической энергии E, которая, как было показано, выражается простой формулой

$$U = E = \frac{i}{2} RT, \tag{19}$$

где i — число степеней свободы молекулы газа. Напомним, что для одноатомного газа $i=3$, для двухатомного $i=5$, для многоатомного $i=6$, если не учитывать проявляющихся при повышении температуры дополнительных степеней свободы атомных колебаний.

Как известно, *теплоемкость при постоянном объеме* C_v представляет собой количество тепла, которое нужно сообщить телу, чтобы нагреть его на 1°, когда объем тела остается постоянным. Очевидно, что при неизменности объема газа вся энергия, сообщаемая идеальному газу в форме тепла, идет на увеличение внутренней энергии газа. Если температура T газа повысится на 1°, то, как легко видеть из формулы (19), внутренняя энергия 1 моля увеличится на $\frac{i}{2} R \approx i$ калорий. Следовательно, теплоемкость при постоянном объеме C_v моля идеального газа равна:

$$C_v = \frac{i}{2} R \approx i \ \frac{\textit{кал}}{\textit{градус} \cdot \textit{моль}}, \tag{20}$$

т. е. *теплоемкость C_v идеального газа по классической теории должна быть величиной постоянной, не зависящей от химической природы газа и численно равной* (для 1 моля в калориях) *числу степеней свободы молекулы газа*:

для одноатомного газа $C_v \approx 3$ *кал* на 1 моль,
для двухатомного газа $C_v \approx 5$ *кал* на 1 моль,
для многоатомного газа $C_v \approx 6$ *кал* на 1 моль.

Этот вывод теории Максвелла близко соответствует действительности, если его применять к слабо сжатым газам, находящимся при температурах не слишком низких и не чрезмерно высоких. При высоких температурах не только появляются колебательные степени свободы, но наступает диссоциация [1]) газа, т. е. некоторые молекулы распадаются на две или на большее число более мелких молекул. Зависимость теплоемкости от температуры вследствие этого усложняется. При весьма низких температурах, как уже было сказано, закон равномерного распределения энергии по степеням свободы, а стало быть и формула (20) неприменимы.

---

[1]) Латинское dissociatio — разъединение.

Поскольку теплоемкость газа остается неизменной, очевидно, что количество тепла, потребное для нагревания 1 моля газа от абсолютного нуля до температуры T, будет равно C_vT при условии, что объем газа поддерживают постоянным (в этом случае газ не производит работы и на него не затрачивают работы; поэтому внутренняя энергия газа равна всей сообщенной газу теплоте):

$$U = C_vT. \qquad (21)$$

Если делать расчет не на 1 моль, а на 1 *г*, то получится аналогичная формула:

$$U_{1г} = c_vT,$$

где c_v — «граммовая» (удельная) теплоемкость при неизменном объеме.

Уравнение (21) называют обычно законом Джоуля. Применительно к реальным газам закон Джоуля в такой же мере неточен, как и уравнение Клапейрона, но в приближенных расчетах и в особенности в технических расчетах законом Джоуля широко пользуются и часто получают удовлетворительное согласие с данными опыта. Применяя закон Джоуля к области высоких температур, надо иметь в виду, что при высоких температурах происходит возрастание теплоемкости C_v в связи с проявлением атомных колебаний и в связи с частичным распадом молекул на атомы.

Если, нагревая тело, предоставляют ему возможность расширяться, поддерживая давление на тело неизменным, то часть сообщенной телу теплоты идет на производство работы расширения. Поэтому теплоемкость при постоянном давлении C_p больше, чем теплоемкость при постоянном объеме C_v.

Представим себе, что 1 моль газа заключен в цилиндр, закрытый сверху поршнем, который нагружен гирей, уравновешивающей давление газа. При нагревании газ будет расширяться и произведет работу, равную $p(v_2 - v_1)$. По уравнению Клапейрона $p(v_2 - v_1) = R(T_2 - T_1)$. Отсюда видим, что 1 моль газа, нагреваемого при постоянном давлении, каково бы ни было это давление, на 1° ($T_2 - T_1 = 1°$), производит вследствие расширения работу, как раз равную универсальной газовой постоянной. Выраженная в тепловых единицах, эта работа равна 2 *кал*. Она одинакова для одноатомного, двухатомного и многоатомного газов. Приращение внутренней энергии моля газа при нагревании его на 1° равно C_v. Следовательно, теплота, потребная для нагревания 1 моля газа на 1° при постоянном давлении — мольная *теплоемкость газа при постоянном давлении*, — равна:

$$C_p = C_v + R, \qquad (22)$$

или, учитывая, что приближенно R равно 2 *кал*:

$$C_p \approx C_v + 2 \text{ кал/градус} \cdot \text{моль}.$$

Уравнение (22) носит название уравнения Роберта Майера. Посредством этого уравнения Майер, зная R в килограмметрах, а C_p и C_v в килокалориях, впервые (в 1842 г.) установил, какому числу килограмметров эквивалентна 1 *ккал* [1]).

Подставляя в уравнение Роберта Майера значения C_v, мы видим, что грамм-молекулярная теплоемкость при постоянном давлении C_v одноатомного газа равна 5 *кал*, двухатомного 7 *кал* и многоатомного 8 *кал*. Отсюда отношение указанных теплоемкостей $\frac{C_p}{C_v}$, которое обычно обозначают греческой буквой $\varkappa$ (каппа), равно для одноатомных газов $\frac{5}{3} = 1{,}67$, для двухатомных $\frac{7}{5} = 1{,}40$ и для многоатомных $\frac{8}{6} = 1{,}33$. Отношение теплоемкостей $\varkappa = \frac{C_p}{C_v}$ играет важную роль в термодинамической характеристике тел.

Газ	C_v	C_p	$\frac{C_p}{C_v}$
Одноатомный	3	5	1,67
Двухатомный	5	7	1,40
Трехатомный	6	8	1,33

Указанные выводы теории для области нормальных температур (не слишком высоких и не слишком низких) хорошо согласуются с данными опыта. Это можно видеть из сопоставления, приводимого в нижеследующей таблице:

Газ	C_p/C_v		Газ	C_p/C_v	
	по измерению	по вычислению		по измерению	по вычислению
Аргон.	1,67	1,67	Кислород.	1,40	1,40
Водород . . .	1,41	1,40	Пары воды	1,31	1,33
Азот	1,41	1,40	Метан	1,30	1,33

[1]) Следует предостеречь против грубо ошибочного обобщения на конденсированные состояния уравнения (22) в форме

$$C_p = C_v + p\frac{dv}{dT}.$$

Пишут $dQ = dU + p\,dv$, откуда $\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$, и заменяют $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p$ через $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v$, т. е. C_v, что для жидкостей и твердых тел, да и для сжатых газов, понятно, совершенно недопустимо, а законно только для разреженных газов, когда U почти не зависит от давления и плотности и определяется одной температурой.

Для газов, молекулы которых состоят из большого числа атомов, выводы максвелловой теории теплоемкости расходятся с данными опыта; в этом случае уже при нормальной температуре сильно сказываются внутримолекулярные колебания атомов, распад ассоциированных молекул и другие явления. Так, пары этилового спирта C_2H_6O имеют теплоемкость при постоянном объеме $C_v=18{,}9$ вместо 6; для них $\varkappa=1{,}1$ вместо 1,33. Для паров хлороформа $C_v=15{,}2$. Для метилового спирта $C_v=13$.

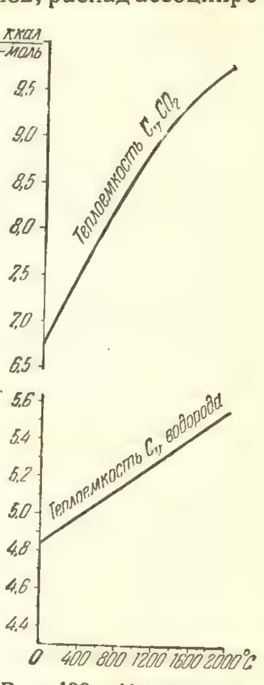


Рис. 190. Изменение теплоемкости водорода и газообразной углекислоты в зависимости от температуры.

Случаи расхождения между данными опыта и выводами максвелловой теории теплоемкостей наблюдаются и у некоторых двухатомных газов, у которых внутримолекулярные колебания в значительной мере возбуждены уже при нормальных температурах. Например, двухатомные пары хлора имеют $C_v = 6$ вместо 5, а теплоемкость паров иода при нормальной температуре еще больше: $C_v=6{,}6$.

При значительном повышении температуры теплоемкость всех двухатомных и многоатомных газов значительно возрастает. Это объясняется тем, как уже было пояснено выше, что проявляются внутримолекулярные колебания атомов, а при дальнейшем увеличении температуры происходит частичный распад — термическая диссоциация — молекул. На рис. 190 показан характерный ход изменения теплоемкости газов (водорода и углекислоты).

В температурных пределах от 0 до 2000° С изменение теплоемкости удовлетворительно (с точностью до 1—2%) определяется параболической зависимостью:

$$C_v = C_v^0 + \alpha t + \beta t^2. \qquad (23)$$

Для водорода

$C_v^0 = 4{,}85$
$\alpha = 0{,}0007$
$\beta = 0$

Для кислорода, азота и воздуха

$C_v^0 = 4{,}97$
$\alpha = 0{,}00017$
$\beta = 0{,}00000031$

Для углекислоты

$C_v^0 = 6{,}70$
$\alpha = 0{,}0045$
$\beta = 0{,}00000102$

Для аммиака

$C_v^0 = 6{,}65$
$\alpha = 0{,}00465$
$\beta = 0{,}00000135$

Термическая диссоциация. По закону равномерного распределения энергии на каждую степень свободы в газе приходится в среднем количество энергии, равное $\frac{1}{2}kT$. В газах с многоатомными молекулами, где, кроме поступательных и вращательных движений молекулы, имеются еще и колебательные движения атомов в молекуле, энергия этих колебаний при повышении температуры возрастает пропорционально температуре. Поэтому при достаточном повышении температуры многоатомного газа некоторая часть его молекул оказывается разрушенной, разбившейся на более простые молекулы. Так, например, молекула азотноватого ангидрида N_2O_4 при повышении температуры распадается на две молекулы двуокиси азота NO_2; увеличение числа молекул в газе немедленно сказывается изменением его плотности по отношению к стандартному газу (воздуху или водороду).

Изменение химического состава вещества, являющееся результатом распада его молекул на более простые, называется *диссоциацией*. Поскольку диссоциация происходит вследствие повышения температуры (как в случае N_2O_4), она называется *термической*. Характерным случаем термической диссоциации является диссоциация паров серы; в парах серы при температуре ниже 800° С находятся молекулы S_6, при температурах же более высоких молекула S_6 распадается на три молекулы S_2. При помощи электрической дуги удалось разбить двухатомные молекулы водорода H_2 на одноатомные H (так называемый «атомный водород»).

Нет сомнения, что вообще всякий многоатомный газ при достаточном повышении температуры диссоциирует; одним из последствий этой диссоциации является сильное изменение теплоемкости газа C_v.

Для осуществления диссоциации требуется приток тепла, что сказывается в увеличении теплоемкости. С другой стороны, при распаде сложной молекулы на более простые резко изменяется число степеней свободы, что также вызывает изменение теплоемкости.

Если, повысив температуру газа и таким образом добившись его диссоциации, мы затем медленно понизим температуру до исходной точки, то разбитые части первоначальных молекул постепенно вновь соединятся, т. е. газ вернется к первоначальному состоянию. Это значит, что процесс диссоциации есть процесс «обратимый».

Для хода некоторых металлургических реакций и для режима сгорания высокосортных топлив в карбюраторных двигателях немаловажное значение имеет термическая диссоциация углекислоты на кислород и окись углерода, а также диссоциация водяного пара на кислород и водород. В обоих случаях *степень диссоциации* α, т. е. отношение числа распавшихся молекул к первоначальному числу молекул, зависит от давления. При давлениях порядка 0,1 *ат* число распавшихся молекул примерно в два раза больше, чем для той же температуры при давлении в 1 *ат*.

Диссоциация CO_2 и H_2O становится заметной только при очень высоких температурах. Для нормального давления (1 *ат*) степень диссоциации указанных газов достигает примерно 1% при температуре около 1800°C. Дальнейшее повышение температуры вызывает у CO_2 быстрое увеличение степени диссоциации; при температуре около 2700°C примерно половина углекислоты диссоциирована на кислород и окись углерода (рис. 191). Степень диссоциации водяного пара растет медленнее. При температуре 3000°C диссоциирована, по-видимому, $^1/_5$ молекул водяного пара.

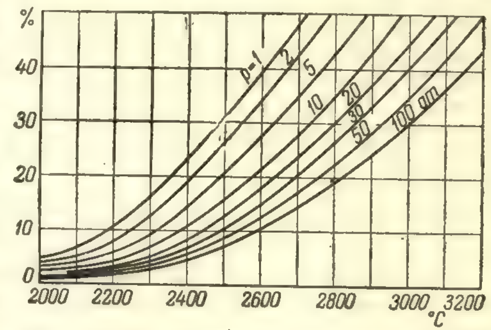


Рис. 191. Степень диссоциации CO_2 (в процентах) при различных температурах и давлениях.

Следует отметить, что числовые значения степени диссоциации при высоких температурах трудно измерить или вычислить с удовлетворительной точностью; поэтому данные разных авторов существенно различаются.

Вследствие диссоциации продуктов сгорания при взрыве паров бензина в двигателях внутреннего сгорания максимальная температура взрыва оказывается примерно на 200° ниже, чем она была бы при отсутствии диссоциации.

§ 88. Молекулярно-кинетическое пояснение работы расширения газа

С молекулярно-кинетической точки зрения работа, производимая газом при расширении, осуществляется за счет того, что *удар молекул газа об отступающий от них поршень уносит часть кинетической энергии молекул.* При сжатии газа, наоборот, молекулы газа, ударяясь о движущийся им навстречу поршень, приобретают дополнительную энергию.

Пусть при расширении газа поршень движется со скоростью w. Какая-либо молекула газа, которая относительно неподвижных стенок перемещалась в направлении отступающего поршня со скоростью u, налетит на поршень со скоростью $u-w$ и с такой же по величине, но обратной по направлению скоростью отразится от него, т. е. после отражения будет иметь относительно неподвижных стенок скорость $u-2w$. Стало быть, при каждом ударе об отступающий со скоростью w поршень молекула газа, двигавшаяся со скоростью u (где $u \gg w$), утрачивает часть своей

кинетической энергии, равную

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{m(u-2w)^2}{2} \approx 2muw.$$

Если бы все молекулы имели одинаковую по величине скорость u, а по направлению движения делились на шесть равных потоков (по два встречных вдоль каждой координатной оси), то за время Δt о каждую единицу площади стенок и поршня ударялось бы $^1/_6 nu\,\Delta t$ молекул, где n — число молекул в единице объема газа. При такой наиболее упрощенной схеме давление газа на неподвижные стенки было бы равно от каждого удара молекулы $2mu$ и от всех молекул за $\Delta t = 1$ сек.:

$$p = \frac{1}{3} nmu^2.$$

Это уравнение совпадает с основным уравнением кинетической теории газов, если под u понимать среднеквадратичную скорость молекул.

Как было указано выше, каждая молекула, налетая на поршень, который отступает со скоростью w, толкает поршень и отдает ему при этом энергию $2muw$. За время dt о поршень площадью s ударится число молекул $\frac{s}{6} nu\,dt$, и поршень получит от них энергию, равную

$$2muw \cdot \frac{s}{6} nu\,dt = \frac{1}{3} nmu^2 \cdot sw\,dt.$$

Принимая во внимание предыдущую формулу для p и учитывая, что за время dt поршень перемещается на расстояние $dl = w\,dt$, находим, что энергия, отдаваемая молекулами газа поршню, равна:

$$p \cdot s \cdot w \cdot dt = ps\,dl = p\,dv.$$

Мы видим, таким образом, что работа, производимая газом при его расширении, совершается действительно за счет кинетической энергии, отдаваемой молекулами газа, налетающими на поршень.

Энергия, теряемая совокупностью молекул газа вследствие удара о поршень, не зависит от скорости перемещения поршня (если скорость поршня не чрезмерно велика). Действительно, если поршень перемещается со скоростью, в k раз меньшей, чем w, то энергия, отдаваемая каждой молекулой при ударе о поршень, будет также в k раз меньше, но зато для перемещения поршня на расстояние dl потребуется в k раз большее время, а за это время о поршень ударится в k раз большее число молекул. В итоге энергия, потерянная молекулами газа, опять окажется равной $p\,dv$, т. е. равной работе расширения.

Описанный процесс осуществления работы газа должен, очевидно, сопровождаться непрерывным охлаждением слоя газа, прилегаю-

щего к поршню. Но молекулярное движение и столкновения молекул выравнивают температуру газа по всей его массе. Чтобы температура газа оставалась при рабочем расширении газа неизменной, очевидно, необходимо пополнять энергию газа, обеспечив приток тепла к газу. В этом случае работа расширения газа будет производиться в итоге за счет сообщаемой газу теплоты.

При изотермическом расширении идеального газа кинетическая энергия молекул газа поддерживается неизменной, и вся подводимая к газу теплота преобразуется описанным выше путем в работу расширения.

При изобарном расширении газа, чтобы поддержать неизменным давление газа, необходимо нагреванием повышать температуру газа, так как в противном случае, в связи с уменьшением плотности газа, давление упадет. Стало быть, в этом случае приток тепла извне должен не только компенсировать убыль кинетической энергии молекул газа, равную работе расширения газа

$$A = p(v_2 - v_1) = R(T_2 - T_1) = Q_1,$$

но сверх этого приток тепла должен еще обеспечить увеличение молекулярно-кинетической энергии, которое соответствует нагреванию газа от T_1 до T_2:

$$\Delta E = C_v(T_2 - T_1) = Q_2.$$

Стало быть, при изобарном расширении из сообщаемой газу теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_p(T_2 - T_1)$$

только часть тепла, составляющая долю $\frac{R}{C_p}$, преобразуется в работу расширения газа.

Рассмотрим еще расширение газа в пустоту. Допустим, что газ, заключенный в сосуде, перетекает в другой сосуд, где была пустота. В этом случае никакой внешней работы газ не производит, и если оба сосуда в тепловом отношении изолированы от окружающей среды, а газ по своим свойствам близок к идеальному, то, как известно из опытов Джоуля (§ 87), температура газа в конце процесса, когда установится равновесие, будет такой же, какой была вначале.

Однако, пока происходит перетекание газа, под действием разности давлений газ с ускорением устремляется в вакуумный сосуд; эту кинетическую энергию газ получает за счет работы, производимой на его выталкивание тем газом, который остается в первом сосуде. В итоге к моменту, когда давление газа в обоих сосудах более или менее сравняется, температура газа в первом сосуде окажется несколько понизившейся, а во втором сосуде, где был вакуум, температура газа окажется больше начальной температуры газа.

Эти температурные эффекты невелики, так как кинетическая энергия, приобретаемая газом при перетекании, мала в сравнении с его общей молекулярно-кинетической энергией. Поскольку обеспечена неизменность суммарной энергии газа, в заключительной стадии процесса постепенно произойдет выравнивание температур газа в обоих сосудах до уровня начальной температуры.

§ 89. Средний свободный пробег газовых молекул

Для характеристики теплового движения в газах во многих случаях весьма важно знать величину *свободного пробега*, т. е. *среднюю длину пути* молекулы между двумя соударениями, и *среднее число соударений*, испытываемых одной молекулой в 1 сек.

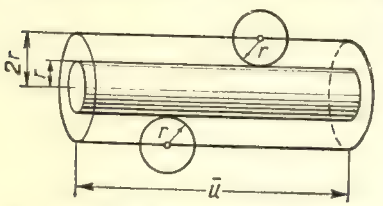


Рис. 192. К вычислению средней длины пути молекулы газа.

Чтобы вычислить среднюю длину пути, рассуждаем следующим образом. Движущаяся молекула столкнется в течение 1 сек. со всеми теми молекулами газа, центры которых расположены внутри цилиндрического объема, описанного по пути движения молекулы и имеющего радиус, в два раза превышающий радиус молекулы (рис. 192); объем этот равен $\pi(2r)^2 \cdot \bar{u}$; число молекул, центры которых должны находиться в указанном объеме, равно $n\pi(2r)^2 \cdot \bar{u}$, где n — среднее число молекул газа в 1 $см^3$. Таким образом, если бы все остальные молекулы, кроме рассматриваемой, были неподвижны, то среднее число соударений ν, испытываемых молекулой в 1 сек., было бы равно:

$$\nu = n\pi(2r)^2 \cdot \bar{u}.$$

В действительности среднее число соударений должно быть больше полученной нами величины, так как вследствие движения окружающих молекул рассматриваемая молекула испытала бы некоторое число соударений даже в том случае, если бы сама она оставалась в течение данной секунды неподвижной. Точный подсчет показывает, что полученный нами результат должен быть увеличен в $\sqrt{2}$ раз. Итак,

$$\nu = 4\sqrt{2}\pi r^2 n\bar{u}.$$

Если свободный пробег мы обозначим через λ, то очевидно, что

$$\nu = \frac{\bar{u}}{\lambda}.$$

Сопоставляя эту формулу с предыдущей формулой, находим, что

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n}. \qquad (24)$$

Если N есть число молекул газа, содержащихся в объеме v, то очевидно, что $n = \frac{N}{v}$. Подставляя это выражение для n в предыдущую формулу и обозначая собственный объем молекул через b'

$$\left(b' = \frac{4}{3}\pi r^3 N\right),$$

получаем:

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{v}{b'} \approx 0{,}24\frac{v}{b'} \approx \frac{v}{4b'}. \qquad (25)$$

Мы видим, таким образом, что *отношение свободного пробега λ к радиусу молекулы r равно отношению всего объема, занимаемого газом, к учетверенному собственному объему его молекул.*

Приводимая таблица содержит некоторые числовые данные для ряда газов, взятых при нормальных условиях.

Некоторые молекулярные характеристики для ряда газов при 0° С и $p = 1$ *ат*

Название газа и химическая формула	Средняя скорость $\bar{u}$ в *м/сек*	Средняя квадратичная скорость c в *м/сек*	Средний свободный пробег λ в *см*	Среднее число соударений одной молекулы в секунду в миллиардах (10^9)	Продолжительность свободного пробега в секундах	Диаметр молекулы в *см*
Водород H_2	1692	1840	$11{,}2\cdot10^{-6}$	15,1	$0{,}66\cdot10^{-10}$	$2{,}3\cdot10^{-8}$
Кислород O_2	425	461	6,5	6,55	1,52	2,9
Азот N_2	454	493	6,0	7,55	1,32	3,1
Аргон Ar	381	414	6,35	6,02	1,66	2,8
Гелий He	1204	1305	18	6,9	1,45	1,9
Окись углерода CO .	454	493	5,8	7,8	1,28	3,2
Углекислый газ CO_2 .	362	393	4	9,05	1,10	3,2
Пары воды H_2O . . .	566	615	4	14,1	0,71	2,6

При нормальном давлении и 0°С свободный пробег молекул водорода составляет примерно одну десятитысячную долю миллиметра. По формуле (25) свободный пробег возрастает пропорционально удельному объему, т. е. в случае неизменной температуры обратно пропорционально давлению. Стало быть, при давлении в 0,0001 *ат*, т. е. 0,76 *мм* рт. ст., свободный пробег молекул водорода равен 1 *мм*, а при давлениях порядка 0,001 *мм* рт. ст. свободный пробег достигает величины нескольких сантиметров. Приводим средние

величины свободных пробегов молекул воздуха при нормальной температуре и различных давлениях:

Давление в *мм* рт. ст.	Свободный пробег λ в *см*
760	$6,5\cdot 10^{-6}$
1	$5\cdot 10^{-3}$
0,01	0,5
10^{-4}	50
10^{-6}	5000

Если сопоставлять средние свободные пробеги молекул какого-либо газа при одинаковых давлениях, но разных температурах, то по формуле (25) свободный пробег должен бы возрастать пропорционально температуре (поскольку при $p=\text{const}$ пропорционально температуре возрастает удельный объем).

Здесь следует, однако, вспомнить сказанное на стр. 328 о некоторой условности величины радиуса молекул: чем интенсивнее происходит соударение молекул, тем больше сближаются молекулы в момент удара, т. е. тем меньше их «эффективный радиус». Проявление молекулярных сил притяжения сказывается при соударении молекул в искривлении траекторий молекул (подобно движению кометы, которая, приблизившись к Солнцу по одной ветви гиперболы и обогнув Солнце, удаляется по другой ветви гиперболы). Уподобляя молекулы маленьким упругим шарикам и заменяя этим весьма упрощенным представлением действительную сложную картину притяжения и отталкивания молекул при их соударениях, мы должны считать эффективный радиус молекул несколько убывающим при повышении температуры.

Указанное влияние температуры газа на эффективный радиус молекул, как показал Сезерленд в 1893 г., можно определить формулой

$$r=r_0\sqrt{1+\frac{C}{T}}. \tag{26}$$

Здесь C — некоторая характерная для газа константа. Для воздуха $C=119$, для кислорода $C=138$, для водорода $C=83$, для углекислоты $C=240$.

В соответствии с формулой Сезерленда, если через λ_0 обозначить свободный пробег, вычисленный по формуле (25) при наибольшем значении эффективного радиуса молекул $r=r_0=\text{const}$, величина свободного пробега при температуре T будет:

$$\lambda=\lambda_0\frac{T}{C+T} \tag{27}$$

(при $v=\text{const}$, т. е. при неизменной плотности газа).

Таким образом, свободный пробег молекул зависит от температуры двояко: через удельный объем и, как было только что пояснено, через эффективный радиус молекул. В итоге свободный пробег молекул газа при неизменном давлении и при повышении температуры возрастает быстрее, чем температура; в некоторых интервалах температур он приближенно пропорционален $T^{\frac{3}{2}}$.

Очевидно, что вследствие случайности молекулярных столкновений истинные свободные пробеги молекул газа могут быть весьма различными — и бо́льшими, и меньшими, чем λ. Клаузиус показал, что в среднем число частиц n, которым удается пролететь без столкновения путь x, составляет от общего числа частиц n_0 долю

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{x}{\lambda}}. \qquad (28)$$

При $x = \lambda$ по формуле Клаузиуса $\frac{n}{n_0} = \frac{1}{e}$, т. е. около $^1/_3$. Стало быть, в газе преобладают истинные свободные пробеги меньшие, чем средний пробег λ; только примерно $^1/_3$ молекул проходит без соударений пути, бо́льшие, чем λ.

ГЛАВА XV

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА, ДИФФУЗИЯ И ВЯЗКОСТЬ. ВАКУУМ

§ 90. Тепловое излучение (законы Стефана и Ньютона)

Тепловое равновесие тела наблюдается, когда температура во всех точках тела одинакова. Если это условие не выполнено или если имеется причина, изменяющая температуру хотя бы на поверхности тела, то равновесия не будет, и происходит передача энергии от мест с более высокой температурой к местам более холодным.

Рассмотрим конкретный случай. Пусть железный котел содержит внутри холодную воду, а снаружи омывается пламенными газами топки. Часть внутренней энергии этих газов будет передаваться железным стенкам котла, часть внутренней энергии железных стенок в свою очередь будет передаваться воде; наконец, в воде возникнет интенсивная передача энергии от одних мест к другим, сопровождаемая движением частей самой воды.

Мы встречаемся здесь с несколькими способами передачи энергии: 1) путем «излучения» (так главным образом происходит нагрев стенок котла пламенем); 2) путем «теплопроводности» (так происходит передача энергии через толщу стенок котла); 3) путем конвекции (без конвекции нагревание воды стенками котла протекало бы крайне медленно). Эти три способа передачи энергии объединяют в одном понятии — *передача энергии в форме тепла.*

При высоких температурах атомы всех тел обладают способностью сильно излучать, т. е. испускать в форме так называемых квантов значительное количество энергии — *лучистой энергии.* Каждый *квант* представляет собой систему волн, характеризуемую определенной частотой; однако распространение в пространстве этой системы волн и взаимодействие этой системы волн с атомами происходит так, как если бы квант представлял собой материальную частицу, обладающую известной массой. Такая двойственность (дуализм) природы кванта является его характерной особенностью. Имея в виду те свойства, которые присущи кванту как материальной частице, квант излучения, т. е. световую частицу, называют *фотоном* [1]).

---

[1]) От греческого phos (photos) — с в е т.

Фотоны летят (в пространстве, не содержащем молекул или содержащем лишь малое количество их, например в слабо сжатом газе) по прямым линиям со скоростью $c=3\cdot10^{10}$ *см/сек* («скорость света»); путь фотона есть то, что в оптике называется лучом. Количество энергии одного кванта всегда выражается формулой

$$\varepsilon=h\nu, \qquad (1)$$

где ν — частота, свойственная кванту, h — так называемая *постоянная Планка*. Если ε выражать в эргах, ν — в герцах (т. е. числах колебаний в 1 сек.), то h будет иметь размерность произведения эргов на секунды (величины, имеющие размерность произведения энергии на время, носят название *действия*):

$$h=6{,}625\cdot10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{сек}.$$

Попадая на поверхность какого-нибудь тела, квант может отразиться от нее, но если эта поверхность не является «зеркальной», то вероятнее всего квант будет поглощен каким-нибудь из поверхностных атомов тела, и его энергия пойдет на увеличение запаса внутренней энергии тела. Обычно поглощение телом большого числа квантов вызывает повышение температуры тела.

Всякий раз, когда имеются тела различной температуры, разделенные большим или малым расстоянием, между ними происходит передача энергии путем излучения; более нагретое тело теряет энергию, менее нагретое приобретает ее. Не нужно, однако, думать, что тело более нагретое только теряет энергию, а тело менее нагретое только приобретает ее. Процесс этот на самом деле — взаимный; тело менее нагретое также излучает; излучаемые им кванты, попадая на тело более нагретое, поглощаются им. Но в общем итоге более горячее тело испытывает потерю энергии, тогда как энергия более холодного тела возрастает.

Существует весьма важный закон, выведенный теоретически и подтвержденный экспериментально, который позволяет подсчитывать количество энергии, излучаемой телом. Этот закон выражается формулой

$$\mathcal{E}=\sigma T^4, \qquad (2)$$

где T — абсолютная температура излучающего тела, $\mathcal{E}$ — количество лучистой энергии (в эргах), испускаемое 1 $см^2$ поверхности тела в 1 сек., σ— постоянная величина (*постоянная Стефана*):

$$\sigma=5{,}668\cdot10^{-5}\ \text{эрг}/\text{см}^2\text{сек}\cdot\text{град}^4.$$

Если излученную энергию $\mathcal{E}$ измерять не в эргах, а в калориях, то

$$\sigma=1{,}355\cdot10^{-12}\ \text{кал}/\text{см}^2\text{сек}\cdot\text{град}^4.$$

Согласно формуле (2) *интенсивность излучения пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры*; это — закон Стефана — Больцмана.

Закон Стефана — Больцмана (1884 г.) является точным законом природы лишь в том случае, если причиной излучения является нагретость тела, а не какое-либо иное обстоятельство (например, не электрический разряд), и если излучающее тело — *абсолютно черное* (т. е. если оно обладает способностью поглощать всю лучистую энергию, падающую на него извне, ничего не отражая и ничего не пропуская сквозь себя). Практическим осуществлением абсолютно черного тела является вычерненная полость внутри твердой оболочки, имеющей небольшое отверстие (рис. 193). Луч света, вошедший через небольшое отверстие в вычерненную изнутри полость, раньше чем он выйдет наружу, должен будет многократно отразиться от стенок полости, и так как каждый раз будет отражена только часть энергии луча, а другая часть будет поглощена стенкой, то в результате почти вся энергия луча окажется поглощенной стенками[1]) (вспомним обыденный факт: глядя издали днем через открытое окно внутрь комнаты, имеющей лишь одно это окно, мы видим внутреннее пространство комнаты темным, почти черным).

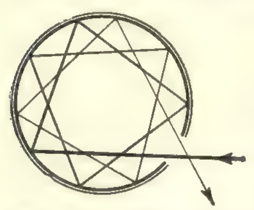


Рис. 193. Модель абсолютно черного тела.

Закон Стефана можно применить также и для вычисления энергии, излучаемой любым (а не абсолютно черным) телом. Однако в этом случае уравнение (2) нужно умножить на так называемый *коэффициент теплопоглощения* A, различный для разных тел и (что важно помнить) *зависящий от температуры*:

$$E = A \cdot \sigma T^4; \tag{3}$$

здесь E — энергия, испускаемая 1 $см^2$ поверхности тела в 1 сек., когда коэффициент теплопоглощения тела равен A (для абсолютно черного тела $A = 1$ и $E = \mathscr{E}$; для всех остальных тел A меньше единицы).

В технике часто пользуются некоторыми средними значениями коэффициента теплопоглощения A. Мы приводим таблицу, в которой даны для некоторых тел приближенные значения коэффициента теплопоглощения, пригодные к применению в области температур от 0 до 200° С. Для металлов коэффициент теплопоглощения мал при свежей поверхности металла (при невысоких температурах —

[1]) Закопченное тело отражает менее 10% света, падающего на него; следовательно, при последовательном пятикратном отражении поглощается более 99,999% энергии луча.

несколько сотых) и значителен при окисленной поверхности; в таблице приведены значения A для окисленных поверхностей металлов, так как на практике только с такими поверхностями и приходится иметь дело.

Металлы при окисленной поверхности	A	Различные вещества	A	Строительные материалы	A
Железо [1] . . .	0,9	Сажа	0,95	Дерево гладкое .	0,8
Сталь	0,8	Стекло	0,90	Камни гладкие .	0,4—0,7
Чугун	0,6	Вода	0,67	Каменная кладка	0,9
Медь [2]	0,5	Лед	0,64		
Цинк	0,2	Бумага	0,80	Песок	0,75
Латунь	0,6	Шерсть, шелк . .	0,76	Штукатурка . . .	0,8
Свинец	0,6	Хлопчатобумажная ткань . . .	0,73	Мел	0,85
Алюминий . . .	0,1				
Никель	0,4				

Представим себе две поверхности, каждая с площадью S, противопоставленные друг другу. Одна из них, более нагретая, имеет абсолютную температуру T; другая, менее нагретая,— абсолютную температуру T_0. По предыдущему первая поверхность за время dt излучит $A\sigma T^4 S\,dt$ *эрг*, но так как от второй поверхности она за то же время получит примерно [3] $A\sigma T_0^4 S dt$ *эрг*, то в итоге расход энергии первой поверхности за время dt составит:

$$\delta Q = A\sigma (T^4 - T_0^4) S\,dt. \quad (4)$$

Той же формулой выразится расход внутренней энергии с поверхности тела, имеющего абсолютную температуру T и окруженного воздушной средой, находящейся при температуре T_0. Эта формула носит название *стефано-больцманова закона охлаждения тел.*

В случае стационарного потока излучаемой энергии (что имеет место при неизменном во времени значении температур T и T_0) формулу (4) можно отнести к конечному промежутку времени t. В технических расчетах выражают обычно расход энергии в *ккал*, площадь S измеряют в $м^2$, а под t подразумевают число часов, а не

[1]) Для железа при блестящей полированной поверхности $A = 0{,}3$.

[2]) Для меди при блестящей полированной поверхности $A = 0{,}13$.

[3]) При более точном расчете надо учесть коэффициент теплопоглощения второй поверхности, так как от него зависит количество излучаемой ею энергии; если расстояние между поверхностями значительно или площади их неодинаковы, то надо учесть еще, какая часть энергии, излученной второй поверхностью, попадет на первую поверхность.

секунд. В этих единицах постоянная Стефана равна:

$$\sigma = \frac{1{,}355 \cdot 10^{-12}}{1000} \cdot 100^2 \cdot 60 \cdot 60 = 4{,}88 \cdot 10^{-8} \text{ ккал/м}^2\text{час} \cdot \text{град}^4.$$

Формулу для вычисления стационарной потери энергии на излучение обычно записывают для удобства так:

$$Q \approx A \cdot 4{,}9 \left[\left(\frac{T}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_0}{100}\right)^4\right] St \text{ ккал} \tag{5}$$

(здесь t — число часов и S выражено в $м^2$).

Стефано-больцманов закон охлаждения может быть упрощен, если разность $T - T_0$ равняется небольшому числу ΔT градусов. Тогда

$$\delta Q = A\sigma[(T_0 + \Delta T)^4 - T_0^4] S\,dt =$$
$$= A\sigma[4T_0^3 \cdot \Delta T + 6T_0^2 \cdot (\Delta T)^2 + 4T_0 \cdot (\Delta T)^3 + (\Delta T)^4] S\,dt.$$

Так как внутри скобок каждый следующий член значительно меньше предыдущего, то приближенно можем записать:

$$\delta Q = A \cdot 4\sigma T_0^3 (T - T_0) S\,dt. \tag{6}$$

Это — *ньютонов закон охлаждения тел.* Он гласит, что при небольшой разности температур между телом и окружающей средой секундный расход энергии тела пропорционален разности температур. Исходя из этого закона, путем интегрирования можно вывести зависимость между температурой тела и временем. Эта зависимость выражается так:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\,e^{-at}, \tag{7}$$

где T_1 — начальная температура тела, t — время, протекшее от начала охлаждения тела, a — постоянная величина.

§ 91. Теплопроводность (закон Фурье)

Рассмотрим процесс передачи внутренней энергии от тела к телу, например от пламенных газов топки к воде парового котла. Внутренняя энергия пламенных газов, омывающих железный котел, передается стенкам котла главным образом посредством лучистой энергии. Но отчасти передача энергии происходит здесь еще иным путем. Обладающие в среднем очень большой кинетической энергией молекулы газов, сталкиваясь с молекулами стенок котла, передают им часть своей энергии. Таким образом, молекулы, лежащие в наружном слое стенок, получают бóльшую против прежнего энергию: с одной стороны, за счет поглощаемых ими квантов, с другой — за счет механической передачи кинетической энергии. Обоими этими способами, и теперь уже преимущественно вторым из них, будет передаваться энергия и дальше, все к более и более глубоким слоям

стенок. В самом деле, атом железа, поглотивший квант, через некоторое (очень короткое) время наверное отдаст его некоторому другому атому. Кроме того, возможны и столкновения одних атомов с другими, в результате чего атомы более быстрые будут вообще терять энергию, а атомы более медленные — приобретать ее. И так как наружная поверхность стенок находится при более высокой температуре, чем внутренняя, то мы все время будем иметь внутри стенок поток энергии, передающейся по тому направлению, вдоль которого имеет место постепенное снижение температуры. В данном случае это направление будет совпадать с направлением нормали к стенкам.

Такой процесс постепенного перемещения энергии благодаря разности температур на двух поверхностях тела может происходить как в твердом веществе, так и в жидком и в газообразном. Описанный процесс принято называть *теплопроводностью*. Точный подсчет явлений теплопроводности делается на основе следующего закона Фурье: *количество энергии* (обычно называемое «количеством тепла») δQ, *проходящее за элемент времени* dt *через взятую внутри тела площадку* dS, *нормальную к той линии* l, *вдоль которой течет поток энергии, пропорционально времени* dt, *площадке* dS *и температурному «градиенту»* $\frac{dT}{dl}$, где T — температура. Если буквой k назовем коэффициент пропорциональности, то закон теплопроводности выразится такой формулой [1]):

$$\delta Q = k\frac{dT}{dl}dS\,dt. \tag{8}$$

Множитель k называют *коэффициентом теплопроводности*. Из приведенной формулы видно, что коэффициент теплопроводности в абсолютной системе единиц измеряется числом калорий, которое «протекает» в рассматриваемом веществе за 1 сек. через площадку площадью в 1 *см*^{2} (нормально к потоку энергии) при температурном градиенте, равном 1° на 1 *см*.

В технических расчетах пользуются обычно другой системой единиц и записывают закон теплопроводности для стационарного потока энергии (при неизменяющемся во времени градиенте температуры) в виде такой формулы:

$$Q = K\frac{T_2 - T_1}{l}St \text{ ккал.} \tag{9}$$

Здесь Q означает количество теплоты (выраженное в *ккал*), протекающее в течение t часов через стену площадью S *м*^{2}

[1]) О понятии градиента см. примечание на стр. 139. Следует обратить внимание на формальную аналогию между законом теплопроводности и законом Ома: $q = k\frac{V}{l}St$, где q — количество электричества, протекшее за время t под действием разности потенциалов V по проводнику, имеющему длину l, поперечное сечение S и электропроводность k.

и толщиной *l м* при разности температур на противоположных поверхностях стены $T_2 - T_1$.

Нетрудно сообразить, что если в формуле (8) δQ выражено в калориях, температурный градиент измерен в градусах на 1 *см*, площадка dS измерена в кв. сантиметрах и время dt — в секундах, то коэффициент k в этой формуле будет связан с коэффициентом K в формуле (9) таким соотношением:

$$k = \frac{K}{360}.$$

Коэффициенты теплопроводности

	K (в *ккал/м·час·град*)	k (в *кал/см·сек·град*)
Железо	40—60	0,11—0,17
Медь	260—340	0,7 —0,95
Кирпич	0,3—0,4	—
Дерево	0,1—0,4	—
Пробка, опилки	0,05	—
Вода стекло	0,5	0,0014
Газы	0,02—0,04	$5\cdot10^{-5}$—10^{-4}

Одним из лучших теплоизоляционных материалов является стеклянный войлок. При одинаковых условиях теплопередача через стеклянный войлок в $3^1/_2$ раза меньше, чем через асбест, и в 20 раз меньше, чем через кирпичную кладку.

В примере, упомянутом в начале параграфа, мы встречаемся еще с одним способом распространения внутренней энергии.

Энергию, переданную сквозь стенки котла, получает вода. Главную роль в передаче теплоты от более нагретых стенок котла к менее нагретой воде играют столкновения молекул. Понятно, что прежде всего увеличится запас внутренней энергии, а следовательно, повысится температура тех слоев воды, которые непосредственно прилегают к стенкам; повышение температуры повлечет за собой расширение этих частей воды и подъем их кверху; их место заполнят пришедшие сверху более холодные части воды. Будет иметь место круговорот воды, содействующий выравниванию ее температуры. В то же время эта температура будет постепенно повышаться. Мы видим, что здесь перенос внутренней энергии происходит вместе с переносом тех частей жидкого вещества, которые обогатились внутренней энергией по сравнению с другими частями. Такой способ распространения внутренней энергии называют *конвекцией*.

Понятно, что конвекция внутренней энергии возможна только в телах жидких и газообразных. Понятно также, что роль конвекции является существенной лишь в том случае, если нагревание происходит снизу, а охлаждение — сверху (исключение — вода ниже 4°С).

В примере воды, нагреваемой в котле, некоторое количество внутренней энергии передается через воду путем теплопроводности воды, но это количество крайне незначительно в сравнении с тем количеством энергии, перенос которого производится путем конвекции.

В отличие от всех остальных жидкостей жидкий гелий, так называемый «жидкий гелий II», при крайне низких температурах (ниже 2,19°К) обладает аномально большой теплопроводностью, равной 190 *кал · град*$^{-1}$ *см*$^{-1}$ *сек*$^{-1}$. Измерения П. Л. Капицы (в 1938 г.) показали, что жидкий гелий II обладает также чрезвычайно малой вязкостью (вязкость жидкого гелия II в миллион раз меньше вязкости газообразного водорода). Аномально большую теплопроводность жидкого гелия II можно объяснить тем, что благодаря малой вязкости (*сверхтекучести*) в жидком гелии II чрезвычайно легко образуются конвекционные потоки, которые и осуществляют перенос тепла.

§ 92. Диффузия (закон Фика)

В предыдущих параграфах были рассмотрены характерные черты молекулярно-теплового движения, тепловое равновесие и процессы, происходящие, когда тепловое равновесие нарушено (излучение, теплопроводность и конвекция). Все это еще не дает, однако, полного представления о молекулярно-тепловом движении. Мы должны обратиться к явлению диффузии — к явлению, которое обязывает нас перейти от понятия теплового равновесия к понятию термодинамического равновесия.

Диффузией называется обусловленный хаотическим движением молекул процесс постепенного взаимного проникновения двух веществ, граничащих друг с другом. Один из первых опытов по исследованию диффузии был сделан немецким физиком Лошмидтом. Он взял две стеклянные трубки, закрытые с одного конца, имевшие в длину около полметра, в диаметре 2,5 *см*; одну трубку он наполнил углекислым газом, а другую — водородом и поместил их в вертикальном положении так, что открытые концы трубок соприкасались. При этом трубка с углекислым газом была внизу (последнее было необходимо для того, чтобы смешение обоих газов происходило лишь вследствие молекулярных движений, а не вследствие различной тяжести этих газов). Содержимое трубок было исследовано через полчаса; оказалось, что в верхнюю трубку проникло из нижней 37% углекислого газа.

Если бы молекулы газа вообще не сталкивались, то благодаря своим большим скоростям они уже за малую часть секунды пробегали бы значительные расстояния по прямой линии. Поэтому процесс смешения двух газов, соприкасающихся друг с другом, шел бы чрезвычайно быстро. Опыт Лошмидта показывает, что в действительности диффузия газа происходит не особенно быстро. Это видно уже из обыденных явлений: например, если в одном углу комнаты

открыт флакон с духами и если воздух в комнате находится в макроскопическом покое, то пройдет немало времени, прежде чем мы почувствуем появление запаха духов в противоположном углу комнаты.

Сравнительная медленность процесса диффузии является результатом молекулярных столкновений, вследствие которых молекула может быть отброшена назад в ту сторону, откуда она пришла. Мы знаем, что в результате столкновений молекула описывает чрезвычайно запутанную зигзагообразную траекторию; за 1 сек. она пройдет по этой траектории несколько сот метров и все-таки может находиться очень недалеко от исходного положения. Поэтому процесс диффузии газов протекает тем медленее, чем больше число столкновений, испытываемых молекулой в секунду, или, другими словами, чем меньше средний свободный пробег молекулы.

Два соприкасающихся газа всегда диффундируют друг в друга (за исключением того случая, если они моментально соединяются химически). Этого нельзя сказать без некоторых оговорок про жидкости. Две жидкости неограниченно диффундируют друг в друга лишь в том случае, если они способны смешиваться друг с другом. Поэтому можно, например, наблюдать взаимную диффузию воды и спирта, воды и эфира, керосина и растительного масла. Но имеются жидкости, которые не вполне смешиваются друг с другом. При слиянии таких жидкостей вначале наблюдается диффузия, но когда некоторое количество первой жидкости растворится во второй и некоторое количество второй жидкости растворится в первой, то диффузия приостанавливается и сколь бы долго эти растворы ни находились в соприкосновении, их химический состав больше не изменяется (наступает термодинамическое равновесие, § 98). Некоторые жидкости так мало растворимы друг в друге, что диффузия одной жидкости в другую практически не наблюдается (например, вода и ртуть).

Диффузия жидкостей наблюдается особенно легко в том случае, если одна из жидкостей бесцветна, а другая окрашена. Можно применить, например, воду и раствор медного купороса в воде. Стеклянный цилиндр наполняют до половины водой, а затем при помощи воронки с длинной трубкой наливают на дно цилиндра более тяжелый раствор медного купороса. Граница между обеими жидкостями, вначале резкая, станет постепенно размываться, но для полного смешения обеих жидкостей потребуется несколько месяцев. Это показывает, что число столкновений, испытываемых молекулой в жидкой среде, во много раз больше, чем для случая среды газообразной. Причина этого, понятно, заключается в том, что в единице объема жидкостей содержится гораздо большее число молекул, чем в единице объема газа.

Закон диффузии в жидкой среде (пригодный также и для среды газообразной) был найден немецким физиком Фиком. Этот закон

выражается формулой

$$m = D\frac{c_1 - c_2}{l}St, \tag{10}$$

где m есть количество диффундирующего вещества (например, медного купороса), проходящего за время t через площадку S *см*², расположенную перпендикулярно к направлению, в котором движется вещество [1]); c_1 и c_2— концентрации диффундирующего вещества [2]) в двух слоях, отстоящих друг от друга на расстоянии l; наконец, D — *коэффициент диффузии*. Этот коэффициент зависит от природы среды, от природы диффундирующего вещества и от условий, при которых находятся среда и диффундирующее вещество (для жидкостей — от температуры, для газов — от температуры и от плотности). При этом предполагается, что концентрация в жидком или газообразном столбе изменяется равномерно по длине столба, т. е. $\frac{c_1 - c_2}{l} = \text{const}$, и что столб находится в установившемся состоянии, т. е. в каждом сечении его концентрация с течением времени не меняется.

В более общем виде закон Фика может быть выражен следующей формулой:

$$\delta m = D\frac{dc}{dl}dS\,dt, \tag{11}$$

т. е. количество вещества δm, *диффундирующее за промежуток времени* dt *через площадку* dS, *нормальную к той линии* l, *вдоль которой происходит диффузия, пропорционально времени* dt, *площади* dS *и градиенту концентрации* $\frac{dc}{dl}$.

Из приведенных формул легко видеть, что коэффициент диффузии D численно равен количеству диффундирующего вещества, проникающего за единицу времени через единицу поверхности при условии, что разность концентраций на двух поверхностях, отстоящих друг от друга на единицу длины, равна единице.

Нетрудно сообразить, что размерность коэффициента диффузии $[D] = L^2T^{-1}$. В абсолютной системе единиц коэффициент диффузии D измеряется в *см²/сек*. Для разных газов при нормальных условиях D имеет значения примерно от 0,1 до 1 *см²/сек*, для жидкостей $D \approx 1$ *см²/сутки* (т. е. в 10^5 раз меньше, чем для газов).

Сравнивая формулу, выражающую закон Фика, с формулами, выражающими закон Фурье для теплопроводности и закон Ома для электрического тока, легко заметить, что все три закона формально аналогичны. В случае диффузии разность концентраций играет ту же роль, какую играют разность температур в явлении теплопроводности и разность потенциалов в явлении электрического тока.

---

[1]) В обоих вышеописанных опытах эту площадку надо мыслить, очевидно, как горизонтальную.

[2]) Концентрация вещества, примешанного к данной среде, измеряется количеством вещества, содержащегося в единице объема.

Строгая экспериментальная проверка закона Фика была произведена Н. А. Умовым в 1888—1891 гг. Умов показал, что закон Фика точен только для случаев полной изотермичности среды и малых концентраций растворов.

В любом однородном веществе, газообразном или жидком, молекулы одной части вещества непрестанно диффундируют в другую часть вещества; это — так называемая *самодиффузия.* В последнее время самодиффузия была исследована экспериментально; для этой цели вносят в некоторый участок вещества небольшое количество радиоактивной разновидности молекул того же вещества и следят за распространением радиоактивных свойств по всей массе вещества.

Коэффициент самодиффузии газа, как было теоретически установлено Максвеллом, равен произведению одной трети средней скорости молекул на их среднюю длину свободного пробега:

$$D = \frac{1}{3}\bar{u}\lambda. \qquad (12)$$

Эту формулу можно было бы вывести посредством таких же простых рассуждений, которые приведены далее (в §§ 93 и 94) для вывода аналогичных формул, определяющих коэффициенты теплопроводности и вязкости газов. Но обычно в приложениях физики приходится иметь дело не с самодиффузией, а с взаимной диффузией веществ. В этом случае теоретический расчет более сложен. Однако в итоге оказывается, что коэффициент взаимодиффузии газов может быть вычислен «по правилу смешения» из коэффициентов самодиффузии обоих газов, а именно: если D_{11}— коэффициент самодиффузии первого газа, D_{22}— коэффициент самодиффузии второго газа, а n_1 и n_2— числа молекул каждого из этих газов в единице объема смеси газов в том месте, где нас интересует ход взаимной диффузии, то

$$D_{12} = \frac{n_1 D_{11} + n_2 D_{22}}{n_1 + n_2}.$$

Это уравнение справедливо только в том случае, когда газы диффундируют друг в друга, находясь под одинаковым давлением $p = (n_1 + n_2)kT = \text{const}$; в этом случае диффузионный поток стационарен и суммарная концентрация обоих газов в разных участках смеси одинакова и неизменна во времени, т. е. $n_1 + n_2 = \text{const}$. При указанном условии коэффициент диффузии первого газа во второй равен коэффициенту диффузии второго газа в первый: $D_{12} = D_{21}$.

Коэффициенты самодиффузии и взаимодиффузии зависят от плотности газа в такой же мере, как и свободный пробег; свободный пробег обратно пропорционален плотности газа (§ 89), поэтому и коэффициент диффузии обратно пропорционален плотности газа. Если

D_0— коэффициент диффузии при давлении p_0 и абсолютной температуре T_0, то при давлении p и температуре T коэффициент диффузии газа будет:

$$D = D_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \left(\frac{p_0}{p}\right). \tag{13}$$

Что касается зависимости коэффициента диффузии от процентного состава смеси газов (от отношения $\frac{n_1}{n_2}$), то опыт в согласии с уточненной теорией показывает, что коэффициент диффузии мало изменяется при изменении процентного состава смеси.

Коэффициенты самодиффузии и взаимодиффузии некоторых газов при нормальной температуре и плотности (при $p = 1$ *ат* и 0° С) приведены в помещенных ниже таблицах.

Коэффициенты самодиффузии газов D в $см^2/сек$

Водород	1,29
Кислород	0,19
Окись углерода	0,17
Углекислота	0,11
Пары воды (при 100° С)	0,13

Коэффициенты взаимодиффузии газов D в $см^2/сек$

Водород — кислород	0,70	Кислород — воздух	0,18
Водород — азот	0,67	Углекислота — воздух	0,14
Водород — углекислота	0,55	Пары воды — воздух	0,22
Кислород — азот	0,18	Пары эфира — воздух	0,078
Кислород — углекислота	0,14	Пары нафталина — воздух	0,051

Для жидкостей коэффициент диффузии имеет величину, как уже упоминалось выше, в сотни тысяч раз меньшую, чем для газов. Например, коэффициент диффузии поваренной соли в воде при 10° С равен:

$$D = 1{,}08 \cdot 10^{-5}\ см^2/сек = 0{,}93\ см^2/сутки.$$

Коэффициент диффузии сахара в воде почти в три раза меньше, чем указанный коэффициент диффузии поваренной соли. Наибольшую величину имеет коэффициент диффузии водорода в воде — около 4 $см^2/сутки$ (при 10°С).

Сопоставляя диффузию в жидкостях и в газах, следует отметить, что в жидких растворах часто реализуются весьма большие градиенты концентраций. Поэтому интенсивность диффузионного потока в жидкостях часто оказывается вовсе не такой малой, как это можно было бы ожидать, судя по малой величине коэффициента диффузии.

Явление диффузии играет большую роль в природе и технике. Корни растений захватывают необходимые для растения вещества из почвенных вод благодаря диффузионному потоку внутрь корней. Интенсивность этого диффузионного потока поддерживается тем, что внутри корней нужные для растения вещества быстро «усваиваются», т. е. химически преобразуются, так что концентрация этих веществ у поверхности корней оказывается все время пониженной, что и вызывает диффузию нужных веществ из окружающей почвы к корням. Что же касается бесполезных и вредных для растения веществ, то они не перерабатываются растением в другие вещества, и поэтому их концентрация внутри и у поверхности корней быстро сравнивается с концентрацией этих веществ в окружающей почве; это приостанавливает диффузионный приток. Таким образом, диффузия помогает растению осуществить «выбор» и извлечение из почвы тех веществ, которые необходимы растению для построения его клеток.

Аналогично диффузия используется тканями пищеварительной системы животных и человека для «выбора» и извлечения из пищи веществ, необходимых организму. Пища превращается в желудке и в кишечнике в растворимое состояние, и нужные организму вещества диффундируют через стенки пищеварительного тракта.

В технике диффузией пользуются постоянно для извлечения (экстракции) различных веществ, например сахара из сырой свеклы, дубильных веществ, красителей, разнообразных веществ в химических производствах (чилийской селитры, едкого натра и др.).

А. Эйнштейн (в 1905 г.) развил теорию диффузии жидкостей, использовав полученные им уравнения для броунова движения и применив закон Стокса (§ 53) к движению молекул растворенного вещества. Это привело Эйнштейна к формуле

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}, \tag{14}$$

где D — коэффициент диффузии растворенного вещества, η — коэффициент вязкости раствора, k — больцманова постоянная, T — абсолютная температура и r — некоторый эффективный радиус молекулы диффундирующего вещества.

Формула Эйнштейна удовлетворительно определяет величину D для растворов некоторых веществ, молекулы которых велики в сравнении с молекулами растворителя.

Другая формула для коэффициента диффузии жидкостей будет пояснена в § 117.

Явление диффузии наблюдается и в твердых телах. Например, при накаливании железа с углем уголь диффундирует в железо. Явлением диффузии углерода в железо пользуются при *цементации*

(при поверхностном науглероживании железных изделий), чтобы после закалки получить изделия с твердым наружным слоем, но вязкой сердцевиной (цементацию производят, нагревая железное или стальное изделие в саже, в древесном угле или в коксе или же помещая изделие при температуре 600—1000° в газообразную окись углерода).

Коэффициент диффузии в твердых металлах по порядку величины в 1 000 000 раз меньше, чем в жидкостях, поэтому диффузию в твердых телах называют «вековым» процессом (тем не менее диффузия в твердых металлах, состоящих из отдельных разнородных по химическому составу зерен, существенно влияет на свойства металла).

§ 93. Молекулярная теория теплопроводности газов

Для молекулярного объяснения теплопроводности газов, а также и вязкости газов очень полезным является в кинетической теории газов упрощающий прием, предложенный Джоулем и состоящий в следующем. Вместо того чтобы представлять себе молекулы газа летающими по всем направлениям и с самыми разнообразными скоростями, допустим, что поступательная скорость всех молекул — одна и та же, а именно, что она равна средней скорости $\bar{u}$; далее допустим, что все молекулы делятся на шесть равных потоков, движущихся по трем взаимно перпендикулярным направлениям; так что если вообразим в газе надлежащим образом ориентированный кубический объем, равный 1 *см*^{3}, то через каждую его грань будут протекать два противоположных по направлению молекулярных потока. За элемент времени dt каждый поток продвинется на $\bar{u}\,dt$; объем газа в потоке, проходящий за это время через грань кубика, будет $1\ см^2 \times \bar{u}\,dt\ см = \bar{u}\,dt\ см^3$; если плотность газа есть ρ, то плотность каждого потока будет $\frac{\rho}{6}$, а масса газа, проносимая потоком за время dt через грань куба, будет $\frac{\rho\bar{u}\,dt}{6}$. За 1 сек. через единичную площадку будет пронесена масса $\frac{\rho\bar{u}}{6}$.

Прием Джоуля не учитывает влияния молекулярных столкновений, а следовательно, им можно пользоваться лишь в тех случаях, где столкновения не играют роли. В частности, он может быть применяем в слое газа, толщина которого не превышает длины среднего молекулярного пробега.

Чтобы выяснить, от каких величин зависит коэффициент теплопроводности газов, выведем уравнение Фурье (§ 91), основываясь на кинетической теории газов. Когда различные части газовой массы находятся при различных температурах, молекулы из более теплой части (в среднем более энергичные) попадают в более холодную часть, а молекулы из более холодной части (в среднем менее энергичные)

залетают в более теплую часть. В результате разность средних энергий, а следовательно, и разность температур сглаживаются. В этом и заключается процесс теплопроводности в газе. Подобно процессу диффузии он протекает медленно из-за молекулярных столкновений. Как и в случае диффузии, здесь играют важную роль величина среднего молекулярного пробега и поступательная скорость молекул.

Вообразим в газе плоскость A (рис. 194), во всех точках которой температура равна T_1, и параллельную ей плоскость B, во всех точках которой температура равна T_2. Расстояние между плоскостями пусть равняется средней длине молекулярного пробега λ; T_1 пусть будет немного больше, чем T_2. Между A и B вообразим параллельную им площадку C, равную 1 $см^2$. Мы можем считать, что внутри области AB не происходит молекулярных столкновений, а потому можем применить здесь прием Джоуля. В течение 1 сек. через площадку C пройдет сверху вниз поток молекул, имеющий массу $\frac{\rho\bar{u}}{6}$, исходящий из мест с температурой T_1 и приходящий в места, где температура T_2. Если бы газовая масса $\frac{\rho\bar{u}}{6}$ просто остывала от температуры T_1 до T_2, она отдавала бы в форме тепла энергию, равную $\frac{1}{6}\rho\bar{u}\cdot c_v(T_1-T_2)$, где c_v — удельная теплоемкость газа при неизменном объеме; в данном же случае происходит перенос этого количества энергии сверху вниз через площадку C. Встречный поток, переносящий снизу вверх молекулы менее энергичные, даст, как легко сообразить, эффект, равный эффекту первого потока. В итоге за секунду через нашу единичную площадку C пройдет количество тепла, равное

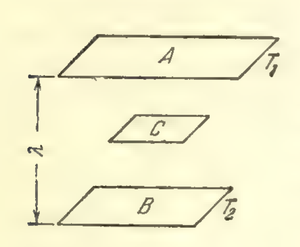


Рис. 194. К выводу выражения для коэффициента теплопроводности газа.

$$\delta Q = \frac{2}{6}\rho\bar{u}c_v(T_1 - T_2).$$

Сопоставляя это уравнение с обычным написанием закона теплопроводности Фурье

$$\delta Q = k\frac{(T_1 - T_2)}{\lambda},$$

где k — коэффициент теплопроводности газа, $\frac{(T_1-T_2)}{\lambda}$ — температурный градиент в рассматриваемом случае, находим, что

$$k = \frac{1}{3}\rho\bar{u}c_v\lambda. \tag{15}$$

Это уравнение устанавливает связь между коэффициентом теплопроводности газа k, его плотностью ρ, его удельной теплоемкостью

при неизменном объеме c_v, средней скоростью поступательного движения молекул $\bar{u}$ и средним пробегом λ.

Средняя длина пробега λ, как было показано выше, пропорциональна удельному объему газа, т. е. обратно пропорциональна плотности газа ρ. Стало быть, по формуле (15) *коэффициент теплопроводности газа* (в известных пределах) *не зависит от плотности*. Средняя скорость возрастает пропорционально корню квадратному из температуры; теплоемкость газа фактически тоже возрастает с температурой; следовательно, по формуле (15) *коэффициент теплопроводности газа должен увеличиваться несколько быстрее корня квадратного из абсолютной температуры*. Опыт в общем подтверждает эти выводы теории.

Коэффициенты теплопроводности газов при 0° С в *кал/см·сек·град*

Водород	$38,1\cdot10^{-5}$	Окись углерода	$5,15\cdot10^{-5}$
Кислород	$5,55\cdot10^{-5}$	Воздух	$5,33\cdot10^{-5}$
Азот	$5,45\cdot10^{-5}$	Пары воды при 100° С	$5,20\cdot10^{-5}$
Углекислота	$3,28\cdot10^{-5}$		

§ 94. Молекулярная теория вязкости газов

Представим себе плоскость («плоскость скольжения») XY (рис. 195), проведенную внутри движущегося газа таким образом, чтобы части газа, находящиеся одна выше, а другая ниже этой плоскости, двигались параллельно этой последней, в одном и том же направлении, но с разными скоростями; положим, верхняя часть движется быстрее нижней ($v_1 > v_2$). В таком случае молекулы верхней части в среднем будут обладать бо́льшим количеством движения, чем молекулы нижней части. В результате хаотического движения молекул некоторое число их проникает в течение 1 сек. через плоскость XY снизу вверх и такое же число молекул проникает за то же время из верхней части газа в нижнюю часть. Вследствие этого общее количество движения верхней части газа несколько уменьшится в течение 1 сек., а общее количество движения нижней части на такую же величину увеличится. Изменение количества движения тела за единицу времени равняется силе, действующей на это тело. Мы видим, что обе рассматриваемые части газа действуют друг на друга равными и противоположно направленными силами, лежащими в плоскости скольжения XY; силы, действующие на нижнюю часть газа, ускоряют эту часть — они направлены вдоль скорости

Рис. 195.

v_2; силы, действующие на верхнюю часть газа, замедляют эту часть, так как они направлены противоположно скорости v_1. Мы имеем здесь не что иное, как силы внутреннего трения; причиной возникновения этих сил служит перенос количества движения молекулами, пролетающими сквозь плоскость скольжения XY.

Выведем выражение для коэффициента вязкости газа. В газе, движущемся так, как это представлено на рис. 195, возьмем какую-нибудь плоскость скольжения XY (рис. 196), по обе стороны ее проведем две параллельные ей плоскости A и B, отстоящие от XY на среднюю длину молекулярного пробега λ.

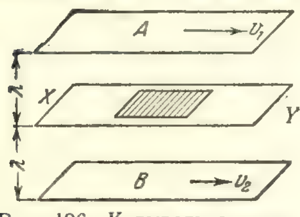


Рис. 196. К выводу выражения для коэффициента вязкости газа.

Пусть поблизости от плоскости A скорость, с которой движется газ, равна v_1, близ плоскости же B скорость газа пусть равна v_2, причем для определенности положим, что $v_1 > v_2$. Таким образом, градиент скорости в пространстве будет $\frac{(v_1 - v_2)}{2\lambda}$. Близ плоскости XY скорость газа будет $\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$.

На плоскости XY выделим площадку $S = 1$ *см*^{2} и, применяя прием Джоуля (поясненный в начале предыдущего параграфа) сначала к пространству AXY, а затем к пространству BXY, подсчитаем количества движения, переносимые молекулами через площадку S за 1 сек. Молекулярный поток, движущийся в пространстве AXY через площадку S (сверху вниз), проносит ежесекундно массу $\frac{1}{6}\rho\bar{u}$, имеющую количество движения $\frac{1}{6}\rho\bar{u}v_1$, а поток, идущий снизу вверх, за то же время проносит такую же массу с количеством движения $\frac{1}{6}\rho\bar{u}\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$. В итоге верхняя часть газа теряет (за 1 сек на площадке 1 *см*^{2}) количество движения, равное

$$\frac{\rho\bar{u}}{6}\left(v_1 - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) = \frac{\rho\bar{u}}{6} \cdot \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

Это выражение дает и величину силы, замедляющей движение верхней части газа, рассчитанную на 1 *см*^{2}; по закону противодействия такая же сила будет действовать на нижнюю часть газа, ускоряя движение последней. Проведя аналогичный подсчет для пространства BXY, найдем, что движение молекулярных потоков в этом пространстве приводит к возникновению еще двух таких же сил. В общем на верхнюю часть газа будет действовать сила, равная $F = \frac{1}{6}\rho\bar{u}(v_1 - v_2)$ на каждом квадратном сантиметре; такая же сила будет действовать на нижнюю часть газа в противоположном направлении. Сопоставляя это выражение для F с ньютоновым уравнением

для вязкости (§ 51), получаем:

$$F = \frac{1}{6}\rho\bar{u}(v_1 - v_2) = \eta \cdot 1 \cdot \frac{v_1 - v_2}{2\lambda},$$

откуда

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{u}\lambda. \qquad (16)$$

Как уже упоминалось, произведение $\rho\lambda$ не зависит от плотности газа; средняя скорость $\bar{u}$ молекул также не зависит от плотности газа. Следовательно, по формуле (16) и *коэффициент вязкости* η *не зависит от плотности газа* (закон Максвелла).

Одним из проявлений вязкости газов является, например, то обстоятельство, что колебания маятника, качающегося в воздушной среде, мало-помалу замирают. Бойль делал опыты над маятником, помещая его в воздушную среду различной плотности, и нашел, что остановка наступает всегда спустя одно и то же время. Этот результат вполне согласуется с законом Максвелла.

Измерение коэффициента вязкости газов при различных давлениях показывает, что при уменьшении давления в несколько сот раз коэффициент вязкости изменяется у газов не более, чем на несколько процентов. Например, при $p = 1$ *ат* коэффициент вязкости углекислоты $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ *г/см·сек*, а при $p = 0{,}001$ *ат* $\eta = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ *г/см·сек*.

Уменьшение давления воздуха от нормального в 500 раз вызывает уменьшение коэффициента вязкости воздуха всего лишь на 4%.

Независимость η от плотности газа легко понять из рис. 196. Если газ будет разрежен вдвое, то λ вдвое увеличится, стало быть, и объем пространств AXY и BXY вдвое увеличится. Но число молекул в единице объема вдвое уменьшится, а значит, число молекул в пространстве AB, переносящих количество движения через плоскость XY, не изменится. Это рассуждение остается, однако, в силе до тех пор, пока пределы пространства AB не достигнут стенок оболочки, заключающей газ. Когда этот момент наступит, то при дальнейшем разрежении газа λ уже не будет увеличиваться, значит, η будет убывать.

К газам, чересчур уплотненным (а также к жидкостям), изложенная теория не может быть применена, так как понятие о свободном пробеге здесь не имеет места.

Итак, в газах, не слишком разреженных и не слишком плотных, η зависит только от температуры и от размера молекул. Какой характер имеет температурная зависимость? В выражении $\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{u}\lambda$ множитель $\bar{u}$ возрастает с температурой, как $\sqrt{T}$; множитель $\rho\lambda$, как видно из формулы (24) § 89, возрастает с уменьшением диаметра молекулы, а следовательно, с повышением температуры. В итоге *коэффициент вязкости газов возрастает с температурой несколько быстрее, чем* $\sqrt{T}$.

(У жидкостей, напротив того, η с температурой быстро убывает — примерно как $\frac{1}{T^3}$, или даже быстрее. Из этого можно сделать вывод, что молекулярный механизм внутреннего трения в жидкостях иной, чем в газах.)

Насколько точна определяемая теоретической формулой $\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{u}\lambda$ зависимость коэффициента вязкости от температуры, видно из таблицы, где измеренные значения η для воздуха сопоставлены с вычисленными:

$t°$ C	$\eta_{изм}\cdot 10^5$	$\eta_{выч}\cdot 10^5$
—21	16,4	16,2
+15	18,1	18,1
99	22,0	22,0
182	25,6	25,5
302	29,9	29,9

§ 95. Сопоставление явлений диффузии, теплопроводности и вязкости газов

Мы видели, что в газах явления диффузии, вязкости и теплопроводности имеют немало общего. Во-первых, все эти явления обусловливаются переносом той или иной величины: явления диффузии — переносом массы, явления теплопроводности — переносом энергии, явления вязкости — переносом количества движения. Во-вторых, все эти явления сопровождаются рассеянием энергии.

Сопоставление явлений переноса в газах

Явление	Переносимая величина	Уравнение переноса	Формула коэффициента
Диффузия	Масса	$\delta m = D\frac{dc}{dl}dS\,dt$	$D = \frac{1}{3}\bar{u}\lambda$
Теплопроводность	Энергия в форме тепла	$\delta Q = k\frac{dT}{dl}dS\,dt$	$k = \frac{1}{3}\rho\bar{u}c_v\lambda$
Внутреннее трение	Количество движения	$\delta P = \eta\frac{dv}{dl}dS\,dt$ $\left(F = \eta\frac{dv}{dl}dS\right)$	$\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{u}\lambda$

В-третьих, в механизме всех трех явлений играет большую роль величина молекулярного пробега λ.

Сравним формулу (15) для коэффициента теплопроводности газа

$$k=\frac{1}{3}\rho\bar{u}c_v\lambda$$

с формулой (16) для коэффициента вязкости

$$\eta=\frac{1}{3}\rho\bar{u}\lambda,$$

находим:

$$k=\eta c_v.$$

Более строгий расчет приводит к выражению

$$k=\varepsilon\eta c_v, \tag{17}$$

где ε — числовой множитель, который не вполне одинаков для разных газов и по выводам теории равен:

$$\varepsilon=\frac{1}{4}\left(9\frac{c_p}{c_v}-5\right).$$

Это замечательное соотношение между коэффициентом теплопроводности газа, его коэффициентом вязкости и удельной теплоемкостью полностью подтверждается опытом. Об этом свидетельствует сопоставление значений ε, вычисленных по теории и полученных из измеренных величин k, η и c_v:

	Аргон	Гелий	Водород	Азот	Кислород	Закись азота	Этилен
По данным опыта $\frac{k}{\eta c_v}=$	2,5	2,4	1,9	1,9	1,9	1,7	1,5
По теории $\frac{k}{\eta c_v}=\frac{1}{4}\left(9\frac{c_p}{c_v}-5\right)=$	2,4	2,4	1,9	1,9	1,9	1,7	1,5

Если не придерживаться более строгого, уточненного расчета, то еще более простым оказывается соотношение между коэффициентом самодиффузии [формула (12)]

$$D=\frac{1}{3}\bar{u}\lambda$$

и коэффициентом вязкости газа

$$\eta=\frac{1}{3}\rho\bar{u}\lambda.$$

Именно,

$$D=\frac{\eta}{\rho}, \tag{18}$$

т. е. коэффициент самодиффузии газа (приблизительно, без учета поправочного числового множителя, аналогичного упомянутому выше множителю ε) равен коэффициенту вязкости газа, деленному на плотность газа. Как было указано в § 54, в аэродинамических расчетах вместо коэффициента вязкости часто используют *кинематическую вязкость*, под которой понимают отношение коэффициента вязкости к плотности среды. Мы видим, что для химически однородных газов кинематическая вязкость (приближенно, до уточняющего расчеты поправочного числового множителя) равна коэффициенту самодиффузии газа.

Из опытов по диффузии, теплопроводности или вязкости газов можно вычислить величину λ. Обычно этот расчет делается на основании коэффициента вязкости, экспериментальное определение которого представляет наименьшие затруднения.

Когда λ определено для какого-нибудь газа, то на основании формулы (24) § 89 можно подсчитать и размеры молекулы этого газа.

Напомним, что по выводу уравнения (24) § 89 площадь поперечного сечения молекулы («эффективное сечение» молекулы) обратно пропорциональна произведению среднего пробега на число молекул в 1 $см^3$:

$$\sigma_{эфф} = \pi r^2 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda n}. \qquad (19)$$

§ 96. Вакуум. Манометры

Свойства весьма разреженных газов во многих отношениях отличны от свойств газов нормальной плотности. Это объясняется тем, что чем «выше вакуум», тем больше свободный пробег молекулы.

В физике под вакуумом понимают обычно такие разрежения, когда средний свободный пробег молекул газа соизмерим с размерами сосуда.

Свободный пробег пропорционален удельному объему газа, следовательно, при постоянной температуре он обратно пропорционален давлению газа. При давлении в 1 *мм* рт. ст. (1 *тор*) и при 0°C длина свободного пробега λ составляет несколько тысячных долей сантиметра:

	H_2	N_2	O_2	Пары ртути
$\lambda \cdot 10^3$ *см* =	13,3	6,33	7,22	4,88

При давлениях 10^{-3}—10^{-4} *мм* рт. ст. свободный пробег достигает величины нескольких сантиметров и десятков сантиметров.

Такие и бо́льшие разрежения обычно и называют вакуумом. В мелких порах тел законы вакуума могут вступить в силу при соответственно меньших степенях разрежения, а при размерах

пор порядка 10^{-5} *см* — даже при давлениях, близких к атмосферному.

В лучшем достижимом современном вакууме давление газа составляет 10^{-10} *мм* рт. ст., т. е. около 10^{-13}*ат*. При этом в каждом кубическом сантиметре остаются еще миллионы молекул. Однако средний свободный пробег при этом необычайно велик (сотни километров) [1]).

В противоположность картине теплового движения в газах при обычной плотности, молекулы газа в высоком вакууме, двигаясь прямолинейно и бомбардируя стенки сосуда, редко сталкиваются между собой.

Представим себе, что два сосуда, наполненные газом, соединены трубкой; допустим, что один сосуд нагрет, а другой охлажден, и пусть их неодинаковые температуры остаются неизменными. Если газ в сосудах не слишком разрежен, то установится стационарное состояние, при котором давление газа будет одинаково в обоих сосудах, а, стало быть (по закону Ге-Люссака), плотности газа будут обратно пропорциональны абсолютным температурам сосудов:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1}.$$

При этом оказывается, что в трубке, соединяющей сосуды, все время будет происходить движение газа: около стенок трубки газ из холодного сосуда течет в нагретый, а по оси трубки — наоборот, из нагретого сосуда в холодный.

В случае высокого вакуума, когда длина свободного пробега больше диаметра трубки, стационарное состояние устанавливается не по признаку равенства давлений газов в сосудах, а при равенстве чисел молекул, которые в 1 сек. успевают перелететь из одного сосуда в другой. Очевидно, что из холодного сосуда в нагретый перелетит в 1 сек. тем большее число молекул, чем больше будет плотность газа в холодном сосуде и чем больше средняя скорость движения молекул. То же самое можно сказать и про число молекул, перелетающих из нагретого сосуда в холодный. Таким образом,

$$\rho_1\bar{u}_1 = \rho_2\bar{u}_2,$$

откуда

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1};$$

но средняя скорость молекул пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры, следовательно,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \tag{20}$$

[1]) Давление газа при наибольших получаемых лабораторно разрежениях ($\sim 10^{-11}$ *мм* рт. ст.) все же еще значительно превосходит давление газов в некоторых туманностях (10^{-14} *мм* рт. ст.) В межзвездном пространстве степень разрежения вещества, по-видимому, достигает $2{,}5 \cdot 10^{-17}$ *мм* рт. ст.

Итак, когда длина свободного пробега велика в сравнении с диаметром трубки, стационарное состояние устанавливается при плотностях, обратно пропорциональных корням квадратным из абсолютной температуры. При этом давления газа в сообщающихся сосудах будут неодинаковыми; совмещая уравнение (20) с уравнением Клапейрона $\rho = \frac{p}{RT}$, мы видим, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}, \tag{21}$$

т. е. в нагретом сосуде при стационарном состоянии давление будет оставаться бо́льшим, чем в холодном сосуде. Это явление — возникновение стационарной разности давлений в вакууме вследствие разности температур — носит название *термической эффузии*. Термическая эффузия была подробно изучена Кнудсеном (в 1910 г.). Для случая, когда свободный пробег велик, но еще недостаточно велик, чтобы можно было применить уравнение (21), Кнудсен вывел формулу

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{3}{8} \frac{K}{1 + \frac{2r}{\lambda}} \frac{\Delta T}{T}; \tag{22}$$

здесь Δp — стационарная разность давлений, устанавливающаяся в двух местах трубки с разностью температур ΔT; p и T — средние значения давления и температуры газа в трубке; r — радиус трубки; λ— свободный пробег; K — численный коэффициент, несколько изменяющийся в зависимости от отношения $\frac{2r}{\lambda}$ и равный 4/3, когда свободный пробег весьма велик в сравнении с радиусом трубки.

Под *эффузией* часто понимают также процесс медленного истечения газа через малое отверстие. Когда размеры отверстия малы в сравнении с длиной свободного пробега, то вместо струи газа из отверстия вылетают отдельные молекулы, рассеиваясь во все стороны. По Кнудсену, в этом случае количество газа Q, вытекающего в единицу времени из отверстия, определяется формулой

$$Q = \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} S (p_2 - p_1), \tag{23}$$

где M — молекулярный вес газа, S — площадь отверстия, R — универсальная газовая постоянная, p_2 и p_1— давления газа по обе стороны отверстия.

В слое разреженного газа, прилегающего к поверхности твердого тела, движущегося в газе, имеют место «скольжение» газа относительно поверхности тела и «температурный скачок» тем больший, чем больше скольжение. Температурный скачок впервые был обнаружен Смолуховским; внутреннее трение в разреженных газах в

связи с явлением скольжения экспериментально исследовано А. К. Тимирязевым и др.

Если в сосуд с газом поместить легкую мельничку со слюдяными крылышками, одна сторона которых зачернена, и направить на эту мельничку пучок света, то при достаточном разрежении газа в сосуде мельничка будет вращаться. Это явление носит название *радиометрического эффекта.* Мельничка вращается так, как если бы зачерненные стороны крылышек отталкивались светом. В действительности, как показали Кнудсен и Лорентц, вращение мельнички объясняется не давлением света [1]), но другой причиной, которая заключается в следующем: зачерненные стороны крылышек нагреваются до более высокой температуры, чем незачерненные стороны; молекулы газа, ударяющиеся о зачерненные поверхности, отскакивают с увеличившейся скоростью и уносят с собой большее количество движения, чем молекулы, ударяющиеся о незачерненную поверхность. Вследствие этого давление газа на зачерненную сторону крылышек будет больше, чем на незачерненную; если газ недостаточно разрежен и свободный пробег молекул мал, то соударения между молекулами выравнивают давление на обе стороны крылышек, и мельничка не вращается.

На радиометрическом эффекте основано устройство *манометра Кнудсена.* В этом манометре разность давлений разреженного газа на зачерненную и незачерненную стороны легкой пластинки измеряется по углу закручивания нити, на которой подвешена пластинка; исходя из измеренной разности давлений, вычисляют степень разрежения газа.

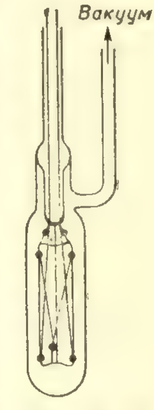


Рис. 197. Манометр Пирани—Галле.

Коэффициент теплопроводности газов, как было сказано в § 93, в известных пределах изменения плотности газа не зависит от плотности. Но если свободный пробег соизмерим с линейными размерами сосуда, то при дальнейшем уменьшении плотности газа коэффициент теплопроводности уменьшается. На зависимости коэффициента теплопроводности сильно разреженных газов от плотности газа основано устройство *манометра Пирани — Галле.* Этот манометр (рис. 197) похож на лампочку накаливания, имеющую отводную трубку, которая служит для соединения баллона манометра с вакуумным сосудом. Металлическая (платиновая) нить манометра Пирани — Галле нагревается электрическим током неизменной силы; при разрежении газа вследствие уменьшения коэффициента теплопроводности газа уменьшается отвод тепла; поэтому температура нити увеличивается по мере разрежения газа в баллоне. Повышение температуры нити сказывается на электрическом сопротивлении нити.

[1]) Давление света существует (т. III, § 41).

Таким образом, измеряя электрическое сопротивление нити, по величине этого сопротивления можно судить о температуре нити и о давлении в вакууме.

Для измерения давления в высоком вакууме часто применяют *манометр Мак-Леода*. В этом манометре разреженный газ, давление которого желают измерить, подвергается значительному сжатию, после чего давление сжатого в определенное число раз газа измеряется по принципу закрытого манометра.

Устройство манометра Мак-Леода изображено на рис. 198. На этих рисунках показана система стеклянных трубок, один конец которых a соединяют с пространством, где хотят измерить давление;

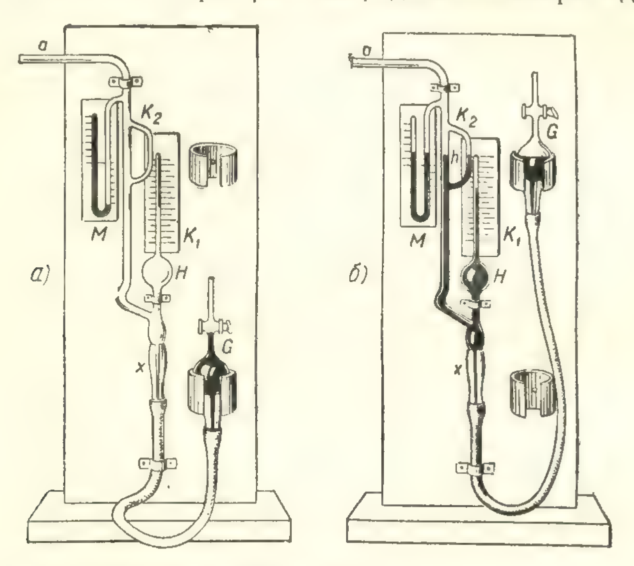


Рис. 198. Манометр Мак-Леода: *а*) резервуар со ртутью опущен, *б*) резервуар поднят.

другой конец x соединен посредством резиновой трубки со стеклянным резервуаром G, в который налита ртуть. Манометрические трубки M и K_1 сверху запаяны. При измерении давления резервуар G со ртутью сначала опускают, как показано на рис. 198, *а*, и потом поднимают в положение, указанное на рис. 198, *б*. При опускании резервуара G ртуть из трубок и баллона H уходит, и баллон H с трубкой K_1 заполняются газом, давление которого p требуется измерить. Обозначим объем баллона H и трубки K_1 через V. Когда резервуар G поднят, ртуть поднимается по системе трубок и сжимает газ, находившийся в баллоне H и в трубке K_1, до малого объема v. После сжатия давление газа в трубке K_1 измеряют по разности уровней h ртути в трубках K_1 и K_2, причем давлением газа

над ртутью в трубке K_2, т. е. в вакууме, можно пренебречь в сравнении с давлением газа над ртутью в трубке K_1. По закону Бойля

$$pV = hv,$$

откуда

$$p = h\frac{v}{V}.$$

Таким образом, измерив давление h в трубке K_1 и зная объемы V и v, вычисляют давление в вакууме.

Посредством манометра Мак-Леода можно измерять давления порядка одной миллионной миллиметра ртутного столба.

Манометр Пирани — Галле градуируют, пользуясь манометром Мак-Леода; им пользуются для измерений давлений до $10^{-8} \div 10^{-9}$ *мм* рт. ст. При самом высоком вакууме применяют *ионизационные манометры*. В этих приборах используют трехэлектродные лампы, аналогичные триодам радиоаппаратуры, но высокое напряжение (200 *в*) подводят не к аноду, а к сетке; на анод же подается небольшое отрицательное напряжение (—30 *в*). Электроны, испускаемые катодом, притягиваются не к аноду, а к сетке; но раньше чем они попадают на сетку, многие из них пролетают сквозь ее отверстия, отталкиваются отрицательным зарядом, сообщенным аноду, а затем, двигаясь по инерции, вновь проходят сквозь сетку, отбрасываются полем катода и при этом колебательном движении ионизируют молекулы остатков газа в лампе. Число положительных газовых ионов, движущихся к аноду, пропорционально давлению в баллоне манометра, что́ и позволяет определять давление, измеряя ток в цепи анода.

§ 97. Вакуумные насосы

При откачке воздуха, как и другого газа, в атмосферу получается небольшая степень разрежения. Чтобы получить бо́льшую степень разрежения, вакуумные насосы соединяют последовательно через резервуары с промежуточными степенями разрежения, которые называют *форвакуумом*; в форвакуум производят откачку газа из баллонов, где создается более высокое разрежение.

Форвакуум получают, применяя «масляные насосы» — поршневые и ротационные. Для использования поршневого насоса в качестве форвакуумного полость цилиндра должна быть тщательно изолирована от атмосферного воздуха. С этой целью применяют густое масло, которое толстым слоем наливают на выхлопной клапан. Как ясно из рис. 199, при движении поршня вверх слой масла поверх поршня закрывает отверстие B; этим предотвращается выталкивание газа обратно в откачиваемый резервуар, и газ, находящийся в цилиндре, сжимается поршнем. Когда поршень приблизится к крайнему верхнему положению, масло, налитое поверх поршня, поднимает выхлопной клапан G, и сжатый воздух через верхний слой масла

устремляется пузырьками наружу; вместе с ним частично выдавливается и масло. При последующем движении поршня вниз над поршнем создается разреженное пространство, которое через трубки B и M наполняется новой порцией газа из откачиваемого резервуара. Нижняя трубка, оканчивающаяся под поршнем, сделана для того, чтобы поршень не прилипал ко дну цилиндра.

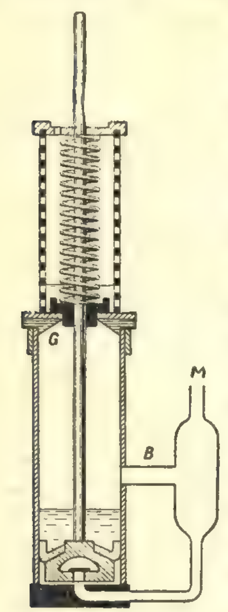


Рис. 199. Схема поршневого масляного насоса.

Поршневой насос был впервые применен для откачки воздуха Герике (в XVII в.). Поэтому и современные масляные поршневые форвакуумные насосы часто называют *насосами Герике*. Обычно два таких насоса соединяют последовательно, что позволяет довести давление воздуха до 0,05 *мм* рт. ст.

Более совершенными являются *ротационные масляные насосы* (рис. 200).

Сплошной цилиндр D вращается вокруг своей оси, оставаясь все время прижатым к верхней стенке цилиндрической полости. По одному из диаметров цилиндра D в прорезь вставлены две лопаточки a и b, между которыми помещена пружина, прижимающая лопаточки к стенкам цилиндрической полости так, что эта полость оказывается разъединенной на три изолированные друг от друга камеры A_1, A_2 и A_3. Полная изолированность трех камер друг от друга достигается плотным прилеганием лопаточек a и b и цилиндра D к стенкам, на которых все время находится слой масла. При положении лопаточек, которое показано на рис. 200, камера A_1 через трубку B соединена с откачиваемым сосудом. Вращение цилиндра D против часовой стрелки увеличивает объем этой камеры A_1, и в нее засасывается газ из откачиваемого сосуда. В камерах A_2 и A_3 уже находится газ, который был засосан туда раньше, когда каждая из этих камер находилась в сообщении с трубкой B. Вращение цилиндра против часовой стрелки уменьшает объем камеры A_3, газ в ней сжимается, приподнимает легкий шариковый клапан и выбрасывается через слой масла в атмосферу или в форвакуум по трубке C.

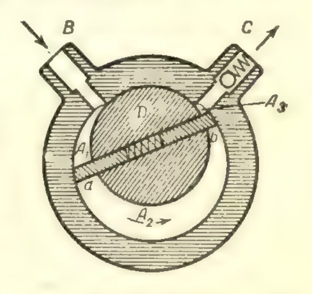


Рис. 200. Схема ротационного масляного насоса.

Новейшие ротационные масляные насосы позволяют довести откачку до давления в тысячные доли миллиметра ртутного столба.

Два насоса, соединенных последовательно, доводят откачку до $1,5 \cdot 10^{-5}$ *мм* рт. ст.

Для получения более высокого вакуума применяют насосы особого устройства. Широкое распространение имеют так называемые *молекулярные насосы.* Рис. 201 поясняет принцип действия молекулярного насоса (молекулярный насос был изобретен в 1912 г. Геде; позже стали применять усовершенствованные молекулярные насосы Гольвека; принцип их действия тот же). Барабан *A* вращается внутри полого цилиндра *B*. Молекулы газа, ударяющиеся о поверхность барабана *A* в расширенной части зазора *nm*, получают добавочную скорость в направлении вращения барабана. Кроме участка *nm*, в остальных местах зазор между барабаном *A* и цилиндром *B* так узок, что там обратное просачивание газа затруднено. В связи с этим газ выбрасывается в трубку *m*, а в трубке *n* создается разрежение. Чем ближе будет окружная скорость вращения барабана *A* к средней скорости движений молекул газа, тем большее разрежение газа дает насос.

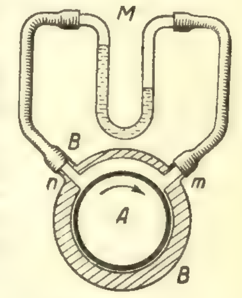


Рис. 201. Схема, поясняющая действие молекулярного насоса.

В насосах Гольвека зазор между барабаном и цилиндром составляет 0,03 *мм*; барабан диаметром в 15 *см* делает 4000 об/мин, скорость откачки (при начальном давлении 0,1 *мм* Hg и конечном давлении 0,001 *мм* Hg) равна 2300 *см*^{3}/*сек*; эта скорость откачки почти в 20 раз превышает скорость откачки, даваемую при тех же начальном и конечном давлениях ротационным масляным насосом.

Для достижения высокого вакуума вся вращающаяся часть молекулярного насоса вместе с неподвижным цилиндром и ротором электромотора заключена в металлическую коробку, которая сообщается с форвакуумом. Если давление в форвакууме сравнительно высокое, то скорость откачки невелика. По мере уменьшения давления в форвакууме скорость откачки возрастает и достигает максимума, когда свободный пробег молекул становится равным по порядку величины размерам всасывающих зазоров; наибольшее разрежение, которое может быть получено молекулярным насосом,— это примерно 10^{-7} *мм* Hg.

Для получения еще более высокого вакуума служат *диффузионные насосы* Ленгмюра. На рис. 202 схематически показано устройство такого насоса (в его первоначальном виде). Ртуть, налитая в колбу *A*, нагревается электрической печкой до кипения; пары ртути, поднимаясь по трубке *B* (эту трубку покрывают асбестом, чтобы пары ртути не охлаждались), выходят через сопло *C* в сосуд *D*, стенки которого снаружи омываются холодной водой (для подводки и удаления холодной воды служат трубки K_1 и K_2); на холодных

стенках сосуда D пары ртути конденсируются, и ртуть каплями стекает в нижнюю часть сосуда, которая сообщается трубкой с колбой A. Сосуд, в котором происходит конденсация паров ртути, имеет две отводные трубки: верхнюю F, через которую сосуд D сообщается с откачиваемым пространством (где требуется образовать высокий вакуум), и нижнюю G, через которую сосуд D сообщается с форвакуумом. Если динамическое давление струи паров ртути больше давления газа в форвакууме, то пары ртути, выходя из сопла C, веерообразной струей распространяются вниз по сосуду D и, как было уже сказано, конденсируются на холодных стенках этого сосуда; важно, что в этом случае пары ртути почти не попадают в верхнюю часть сосуда D, находящуюся под соплом C, и поэтому почти не проникают в трубку F, ведущую к откачиваемому сосуду. Небольшое количество паров, все же проникающее в трубку F, конденсируют интенсивным охлаждением трубки F.

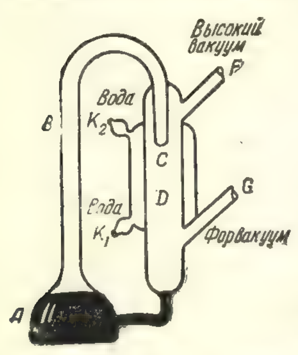


Рис. 202. Схема насоса Ленгмюра.

Описанная циркуляция ртути имеет следующее назначение: газ, поступающий из откачиваемого сосуда через трубку F в верхнюю часть сосуда D, непрерывно диффундирует в струю паров ртути, увлекается этой струей паров ртути и подводится к трубке G, через которую газ идет в форвакуум, где с помощью какого-либо другого насоса все время поддерживают давление порядка 0,1 *мм* Hg. Обратная диффузия газа из форвакуума в высокий вакуум затруднена струей ртутных паров: молекулы газа, ударяясь о движущиеся навстречу молекулы ртути, отбрасываются назад к нижней части сосуда D. По подсчету Ленгмюра, только одна молекула из 10^{20} молекул газа прорывается через струю ртутного пара из форвакуума в высокий вакуум. Таким образом, разрежение, которое может быть получено посредством насоса Ленгмюра, практически не зависит от давления в форвакууме (если только давление газа в форвакууме не превышает динамического давления струи паров ртути). Когда требуется применить насос Ленгмюра при плохом форвакууме, то сильно сужают зазор между стенками верхней части сосуда D и соплом C.

При диаметре сопла C в 1 *см* и ширине кольцеобразной щели вокруг сопла в 1/2 *см* скорость откачки, даваемая насосом Ленгмюра, равна примерно 2000—3000 *см*³/*сек*. Часто соединяют последовательно два-три ртутно-диффузионных насоса. В усовершенствованной конструкции такие вакуумные установки имеют производительность до 50 *л*/*сек*.

Насосы Ленгмюра чаще применяют в виде, показанном на рис. 203 (электрическая печь вставлена во вдавленное дно колбы

и место конденсации паров ртути более удалено от подогреваемой колбы).

Если при пользовании диффузионным насосом не приняты специальные меры для улавливания паров ртути, то наряду с откачкой газа до высокой степени разрежения будет постепенно происходить заполнение вакуума парами ртути, которые при комнатной температуре, находясь в равновесии с жидкой ртутью, имеют давление $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ *мм* рт. ст. Чтобы не допустить проникновения паров ртути в откачиваемый сосуд, их конденсируют в ловушке (рис. 204), охлаждаемой жидким воздухом (—184°С) или же смесью ацетона и углекислоты в снегообразном состоянии (—79°С).

При использовании ловушек без змеевика на внутренних стенках баллона ловушки предварительно осаждают калий, с которым проникающие в ловушку пары ртути образуют амальгаму.

Рис. 203. Ртутно-диффузионный насос Ленгмюра.

Неудобства, связанные с применением ртути в диффузионных насосах, удалось устранить, заменив ртуть специальными, особо очищенными и кипящими при высокой температуре маслами («октейль», продукты перегонки вазелинового масла и др.). *Паромасляные диффузионные насосы* работают по тому же принципу, как и ртутные насосы Ленгмюра, но могут быть использованы и без усложняющей насосы Ленгмюра системы охлаждения ловушек. Такие насосы строятся на производительность до 15 тыс. *л/сек*.

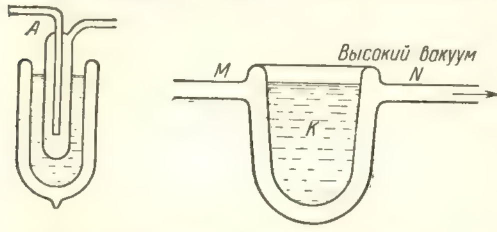


Рис. 204. Ловушки для паров ртути.

При получении вакуума остатки газа в откачиваемом сосуде часто связывают химически; это называют *геттерированием*. Например, при производстве электроламп откачку производят только до 10^{-3} *мм* рт. ст., после чего, возбуждая в остаточном газе электрический разряд, осаждают на внутренней поверхности стеклянной колбы очень тонкий прозрачный слой красного фосфора, предварительно введенного в колбу. Остатки газа улавливаются этим слоем и после первых часов эксплуатации лампы вакуум повышается до 10^{-6} *мм* рт. ст. С той же целью при производстве радиоламп применяют барий, стронций и другие металлы (их наносят тонким слоем на небольшой кусочек жести, закрепленный в лампе, который неза-

долго до запайки лампы разогревают током высокой частоты; геттер распыляется и образует на внутренней поверхности колбы лампы металлическое зеркало).

Для получения наиболее высокого вакуума применяют *ионизационные насосы*. Это увеличенный ионизационный манометр, описанный в конце предыдущего параграфа, снабженный взамен обычных вакуумных кранов особым мембранным вентилем. На электроды ионной лампы подают такое напряжение, чтобы ионизированные молекулы газа приобретали большую скорость и, попадая на отрицательно заряженный анод, проникали в структуру металла, который предварительным прокаливанием был полностью очищен от ранее проникших в него газов. Таким «электрическим поглощением» остатков газа (внедрением положительных ионов газа в кристаллическую решетку металла) повышают вакуум, полученный диффузионным насосом, до 10^{-10} *мм* рт. ст. (в объеме 1 *л* в течение часа).

ГЛАВА XVI

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ И ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 98. Термодинамическое равновесие и *е*-положение Больцмана

Тепловое движение оказывает на распределение молекул действие, противоположное действию молекулярных и других сил. Вследствие теплового движения проявляется тенденция молекул к рассеянию, т. е. к распределению их в возможно большем объеме, к выравниванию молекулярной плотности (числа молекул в единице объема). Действие молекулярных сил, сил тяжести и других сил, наоборот, ограничивает рассеяние молекул, сказывается в концентрировании молекул, в стабилизации их неравномерной плотности.

Примером может служить атмосфера Земли. Молекулы газов, составляющих атмосферный воздух, под влиянием теплового движения должны были бы рассеяться в мировом пространстве. Тяготение к Земле, напротив, должно было бы привести к падению их на земную поверхность. В итоге борьбы этих противоположных тенденций устанавливается некоторое устойчивое неравномерное распределение плотности атмосферного воздуха. Если бы это явление не осложнялось воздействием солнечного излучения, излучения земной поверхности и циркуляциями воздушных масс, то температура в разных слоях атмосферы была бы одинакова и в атмосфере установилось бы барометрическое распределение плотности и давления воздуха по *барометрическому закону*[1])

$$\frac{p}{p_0}=e^{-\frac{\Delta U}{kT}}.$$

Здесь ΔU — разность потенциальной энергии молекулы воздуха

---

[1]) Барометрический закон изотермического распределения плотности газа отражает тот факт, что при подъеме на высоту dh давление убывает на величину веса воздуха, находящегося в слое, имеющем основание 1 $см^2$ и толщину dh, т. е. на величину

$$dp=-\rho g\,dh,$$

на высотах h и h_0; $\Delta U = mg(h - h_0)$, а k — больцманова постоянная $\left(k = \frac{R}{N_{Ав}}\right)$.

Другим чрезвычайно важным, можно сказать универсальным, примером борьбы противоположных влияний поля сил и теплового движения служит распределение молекул какого-либо вещества между несколькими средами, в которых молекулы имеют разную потенциальную энергию. Простейшим случаем является распределение молекул между паром, где потенциальная энергия взаимодействия молекулы с другими молекулами весьма мала, и жидкостью, где энергия взаимодействия молекул с другими молекулами весьма значительна.

При растворении какого-либо вещества в воде или в другой жидкости вся картина процесса и наибольшая возможная концентрация раствора зависят от энергии, с которой молекулы растворяемого вещества вовлекаются силами молекулярного притяжения в среду растворителя. Чем больше эта энергия притягательного взаимодействия, тем интенсивнее идет процесс растворения. Если у растворяемого вещества молекулы притягиваются друг к другу сильнее, чем они вовлекаются в среду растворителя, то растворение почти не происходит.

Во всех подобных случаях в итоге борьбы противоположных влияний теплового движения и поля молекулярных сил устанавливается так называемое термодинамическое равновесие, в котором сосуществуют указанные противоположные тенденции. Это равновесие является *статистическим*; оно представляет собой равенство направленных навстречу друг другу диффузионных потоков молекул при одновременном равенстве температур.

Вследствие диффузии соприкасающиеся тела, имевшие вначале различный химический состав, со временем приобретают такой состав, который дальше уже не изменяется. Здесь, как и в случае соприкосновения тел различной температуры, в конце концов («самопроизвольно») достигается некоторое равновесие. Выравнивание температур приводит к тепловому равновесию, диффузия (при одновременно происходящем выравнивании температур) приводит тела к термодинамическому равновесию. Про два или большее число тел говорят, что эти тела находятся в *термодинамическом равновесии* относительно вещества А, входящего в состав этих тел,

---

где ρ — плотность воздуха $\left(\rho = \frac{M}{V} = \frac{mN_{Ав}}{\frac{kN_{Ав}T}{p}} = m\frac{p}{kT}\right)$. Следовательно,

$$dp = -mg\frac{1}{kT}dh.$$

При $T = \text{const}$ именно к этому уравнению мы и приходим, если прологарифмируем (по натуральным логарифмам) и затем продифференцируем барометрическую формулу.

если состояние тел не изменяется сколь угодно долго, хотя между этими телами обеспечена возможность теплообмена, а также возможность диффузии вещества А [1]).

В случае полной взаимной растворимости тел (что свойственно всем газам и некоторым жидкостям) термодинамическое равновесие наступает тогда, когда химический состав соприкасающихся тел делается одинаковым. В большинстве случаев имеется ограниченная растворимость, тогда термодинамически равновесный состав тел называют *насыщенным раствором*. Так, при соприкосновении жидкого фенола и воды образуются насыщенный раствор фенола в воде (содержащий при 20° около 8% фенола) и насыщенный раствор воды в феноле (при 20° в феноле растворяется около 28% воды).

Как уже было упомянуто выше, термодинамическое равновесие следует представлять себе как равновесие статистическое. Например, при соприкосновении двух жидких фаз, полученных смешением воды с фенолом (где в одной фазе преобладает вода, а в другой — фенол), после достижения равновесия диффузия видимым образом не проявляется; но в действительности молекулы воды, а также и фенола продолжают проникать через поверхность раздела фаз; в этом смысле диффузия продолжается; она, однако, не нарушает равновесия, так как из первой фазы уходит столько молекул, сколько за тот же промежуток времени приходит из второй.

В однородном веществе термодинамическое равновесие соответствует тому случаю, когда самодиффузия через любую поверхность в одну сторону и в обратную сторону одинакова.

Строгие статистические методы расчета концентрации молекул при термодинамическом равновесии сложны. Но приближенно концентрации молекул могут быть вычислены расширением на область молекулярных полей тех принципов, которые составляют основу кинетической теории газов. Однако при таких вычислениях нужно исходить уже не из максвеллова закона распределения молекулярных скоростей, но из особого обобщения этого закона, которое было найдено в конце прошлого столетия Людвигом Больцманом.

Следуя Больцману, концентрацию молекул, вызываемую действием каких-либо сил, находят по уравнению [2])

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{\varphi}{kT}},$$

где φ — потенциальная энергия молекулы.

---

[1]) К этому определению понятия термодинамического равновесия еще следует добавить требование, чтобы неизменность во времени состояния тел не поддерживалась протеканием какого-либо в н е ш н е г о по отношению к системе процесса; когда состояние рассматриваемой системы тел не изменяется, например вследствие постоянного притока диффундирующего вещества к одной части системы и отвода того же вещества от другой части системы, то такое состояние называют *стационарным*, но оно не может быть названо термодинамически равновесным.

[2]) Максвеллов закон молекулярных скоростей может быть выражен следую-

Это уравнение, определяющее долю молекул, имеющих потенциальную энергию φ, часто называют «e-положением Больцмана».

Для случая поля тяжести e-положение приводит к барометрической формуле. Закон Больцмана применим к любому полю внешних сил.

Для сил притяжения $\varphi<0$; из приведенного уравнения мы видим, что когда абсолютная величина потенциальной энергии возрастает в арифметической прогрессии, то относительная концентрация молекул $\frac{n}{n_0}$ возрастает в геометрической прогрессии. В тех участках пространства, где действуют «отталкивающие силы» ($\varphi>0$), по тому же закону геометрической прогрессии происходит уменьшение числа молекул в единице объема.

Жидкости отличаются от газов тем, что в них действуют интенсивные силы притяжения между молекулами; каждая молекула находится в поле сил, исходящих от других молекул. Поэтому для решения вопросов, касающихся молекулярного распределения в жидкостях, часто применяют e-положение Больцмана, что, впрочем, не всегда является законным, так как e-положение, строго говоря, относится только к полю внешних сил.

щей формулой:

$$n_0 = \frac{4N}{\sqrt{\pi}\,\rho^3} e^{-\frac{u^2}{\rho^2}} \cdot u^2 \Delta u.$$

Здесь n_0 есть число молекул в единице объема (из общего числа их N), для которых поступательная скорость лежит между пределами u и $u+\Delta u$; ρ — наивероятнейшая скорость.

Закон Максвелла справедлив тогда, когда на молекулы газа не действуют никакие силы, кроме сил удара при столкновениях. Больцман обобщил максвеллов закон на случай, когда молекулы газа непрерывно находятся под действием сил, например сил тяжести. В обобщенной форме закона показатель степени при e содержит наряду с квадратом скорости поступательного движения еще «потенциал» внешних сил χ (потенциальную энергию молекулы, отнесенную к ее массе), например потенциал сил тяжести ($\chi = g\Delta h$).

Больцманово распределение может быть выражено формулой

$$n = \frac{4N}{\sqrt{\pi}\,\rho^3} e^{-\frac{u^2+2\chi}{\rho^2}} \cdot u^2 \Delta u.$$

Здесь n — число молекул в единице объема, имеющих скорости, лежащие в пределах u и $u+\Delta u$, и потенциал χ.

Вспомним, что наивероятнейшая скорость ρ связана с абсолютной температурой T и с константой Больцмана k соотношением (§ 84)

$$\frac{m\rho^2}{2} = kT.$$

Подставим отсюда выражение для ρ в показатели формул Максвелла и Больцмана; потенциальную энергию молекулы $m\chi$ обозначим через φ и разделим формулу Больцмана на формулу Максвелла; тогда получаем e-положение Больцмана.

§ 99. Ограничения, налагаемые вторым началом термодинамики на циклические превращения тепла в работу

Второе начало термодинамики гласит [1]: *невозможен процесс, единственным результатом которого было бы превращение теплоты в работу.*

Здесь особое внимание надо обратить на слова «единственным результатом». Их смысл заключается в следующем.

Раз речь идет о превращении тепла в работу, значит, имеется по меньшей мере два тела: одно, которое отдает энергию в форме тепла и которое поэтому мы назовем *теплоотдающим*, и другое, которое получает энергию от первого тела в форме тепла, а отдает энергию в форме работы и которое поэтому мы назовем *рабочим телом*. Процесс превращения тепла в работу заключается, во-первых, в том, что в связи с теплоотдачей убывает внутренняя энергия теплоотдающего тела и соответственно изменяется его термодинамическое состояние (например, понижается температура), и, во-вторых, в том, что за счет работы, производимой рабочим телом, возрастает запас каких-либо видов энергии, присущей каким бы то ни было телам. Оба эти, и только эти, изменения, взятые совместно, и подразумеваются нами, когда мы хотим вообразить процесс, единственный результат которого заключался бы в превращении тепла в работу (рис. 205).

Второе начало указывает на то, что процесс, при котором происходит переход тепла в работу, в о з м о ж е н лишь в том случае, если переход тепла в работу (и, следовательно, охлаждение теплоотдающего тела) является не единственным результатом этого процесса; должны существовать еще какие-то д р у г и е р е з у л ь т а т ы. Это означает, что наряду с охлаждением теплоотдающего тела непременно должно происходить какое-то изменение термодинамического состояния еще по крайней мере одного, а то и нескольких тел, вовлеченных в процесс.

---

[1]) Различные авторы по-разному формулировали второе начало. Приводим некоторые формулировки.

Карно: Наибольший коэффициент полезного действия тепловой машины не зависит от рода посредствующего тела и вполне определяется предельными температурами, между которыми машина работает.

Клаузиус: Теплота не может переходить от холодного к теплому телу сама собой, д а р о в ы м процессом.

Клаузиус: Энтропия всякой изолированной системы стремится к максимуму.

Томсон (Кельвин): Теплоту какого-либо тела невозможно превратить в работу, не производя никакого другого действия, кроме охлаждения этого тела.

Оствальд: Осуществление перпетуум мобиле второго рода невозможно.

Больцман: Природа стремится к переходу от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным.

Планк: Невозможно построить периодически действующую машину, которая не производит ничего другого, кроме поднятия груза и охлаждения резервуара теплоты.

Процессы, при которых происходит превращение тепла в работу, в природе встречаются столь же часто, как и процессы перехода работы в теплоту. На поверхности земного шара ветры, дожди, реки, водопады производят непрестанно работу за счет теплоты, которую доставляет Солнце. Нельзя поэтому рассматривать процессы перехода работы в теплоту как правило, а процессы превращения тепла в работу как исключение. Различие, которое устанавливает между этими процессами второе начало термодинамики, заключается не в этом. Выражаясь фигурально, природа имеет одинаковую склонность как к тем, так и к другим процессам. Но когда происходит преобразование работы в теплоту, то с точки зрения результатов этого процесса дело может ограничиваться изменением термодинамического состояния одного лишь теплополучающего тела (например, при нагревании путем трения); в противоположность этому *всегда, когда происходит преобразование теплоты в работу, наряду с охлаждением теплоотдающего тела непременно происходит изменение термодинамического состояния еще одного или нескольких тел.*

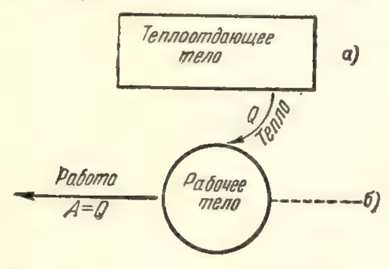


Рис. 205. Схема невозможного процесса превращения тепла в работу: *а* — термодинамическое состояние изменяется, *б* — термодинамическое состояние в конце процесса прежнее.

Имея в виду указанное обстоятельство, говорят, что переход тепла в работу возможен лишь в том случае, если переход этот компенсируется определенным изменением термодинамического состояния участвующих в этом процессе тел. *Некомпенсированный переход тепла в работу невозможен.*

Под компенсацией здесь подразумевают либо изменение состояния рабочего тела, либо изменения состояния какого-либо третьего тела или нескольких тел, вовлеченных в процесс.

Так, например, мы легко можем превратить теплоту в работу, если, нагревая рабочее тело, предоставим ему возможность расширяться и заставим его при этом преодолевать оказываемое на него давление. В этом случае переход тепла в работу компенсируется увеличением того объема, который занят рабочим веществом.

Самым важным для теплотехники примером служит следующий: рабочему телу сообщают теплоту и используют производимую им работу расширения, а затем возвращают рабочее тело в первоначальное термодинамическое состояние; далее вновь и вновь повторяют тот же самый цикл. Но, чтобы вернуть рабочее тело в первоначальное состояние, его надо сжать, а для этого надо затратить работу. Если бы мы стали сжимать рабочее тело при той же температуре, при которой оно расширялось, то на это потребовалось бы

затратить всю ту работу, которая была получена при расширении, и в результате никакого перехода тепла в работу мы не получили бы. Чтобы работа, потребная на сжатие, оказалась меньше работы, полученной при расширении, необходимо, чтобы процесс сжатия хотя бы в некоторой своей части протекал при температуре более низкой. Значит, надо, сжимая рабочее тело, охлаждать его, т. е. надо, следовательно, вовлечь в процесс (кроме теплополучающего рабочего тела) третье тело, служащее холодильником; мы будем называть его *теплоотходным телом*. В результате выполненного таким образом цикла (прямой цикл, рис. 181 на стр. 311) мы получим переход теплоты в работу, причем в работу перейдет только часть теплоты, полученной рабочим телом от теплоотдающего тела, другая же часть теплоты будет отдана рабочим телом теплоотходному телу. В данном случае компенсация перехода тепла в работу заключается в нагревании теплоотходного тела (рис. 206).

Теплоотдающее тело — а)
Q Тепло
Работа $A=Q-Q_0$
Рабочее тело — б)
Q_0 Тепло
Теплоотходное тело — в)

Рис. 206. Пример компенсированного превращения тепла в работу: *а* — термодинамическое состояние изменяется, *б* — термодинамическое состояние в конце процесса прежнее, *в* — термодинамическое состояние изменяется.

Мы видим, таким образом, что две единственно возможные формы передачи энергии — теплота и работа — являются неравноценными формами передачи энергии.

Первое начало термодинамики устанавливает (и в этом заключается его сущность), что существуют две эквивалентные друг другу и единственно возможные формы передачи энергии — работа и теплота.

Второе начало термодинамики устанавливает (и в этом заключается его сущность), что теплота хотя и эквивалентна, но неравноценна работе.

Может ли тепловой двигатель превращать всю сообщаемую ему теплоту в работу? Может ли к. п. д.[1]) теплового двигателя быть равен единице?

Легко указать случай, когда все тепло превращается в работу. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры; поэтому при изотермическом равновесном расширении идеального газа внутренняя энергия остается неизменной, вся сообщаемая газу теплота превращается в работу, производимую расширяющимся газом.

---

[1]) К. п. д. — общепринятое сокращение слов «коэффициент полезного действия». Под коэффициентом полезного действия двигателя понимают отношение производимой двигателем работы к энергии, которая за это время была сообщена двигателю.

Однако, желая использовать газ в качестве рабочего тела в тепловом двигателе, мы, после того как газ расширился, должны сжать его до первоначального объема. На это надо непроизводительно затратить часть работы, выполненной газом. Надо при этом вовлечь в процесс третье теплоотходное тело, которому в форме тепла будет отдана работа, затраченная на сжатие газа. В результате часть отданного нагревателем тепла перейдет к теплоотходному телу, и только остальная (как мы убедимся ниже — сравнительно небольшая) часть тепла, отданного нагревателем, будет превращена в работу.

Всегда, когда с помощью теплового двигателя мы превращаем теплоту (например, теплоту сгорания каменного угля или нефти) в работу, мы вынуждены мириться с компенсированием этого процесса попутным нагреванием теплоотходного тела. Этим теплоотходным телом в некоторых случаях служит воздух (например, при выпуске отработавшего пара или газа в атмосферу), в иных случаях — вода, охлаждающая конденсатор, в котором сгущается отработавший пар.

Следовательно, *к. п. д. тепловой машины*, даже в том случае, если бы она была сконструирована идеально (без потерь на трение), *никогда не может быть равен единице, а всегда будет меньше.*

Тепловой двигатель должен быть приспособлен к длительной деятельности. Поэтому процессы, протекающие в тепловом двигателе, должны замыкаться в периодически повторяемый цикл. Говорят, что цикл имеет ту или иную форму, подразумевая под этим изображенную графически последовательность температурных, объемных и других изменений, претерпеваемых рабочим веществом двигателя (паром или газом). К. п. д. тепловой машины зависит от формы цикла, но более всего он зависит от тех пределов температур, внутри которых рабочее вещество машины выполняет цикл. Чем у́же эти пределы температур при заданной температуре источника тепла, тем меньше к. п. д. Особенности физической и химической природы рабочего вещества не влияют на к. п. д. Для любого рабочего вещества наиболее выгодным для к. п. д. циклом является цикл, указанный впервые основателем термодинамики Сади Карно.

В *цикле Карно* (рис. 208, стр. 405) рабочее вещество сначала изотермически, потом адиабатно расширяется (в результате чего температура падает), а затем оно в той же последовательности — сначала изотермически, потом адиабатно — сжимается (в итоге оно приобретает исходную температуру и плотность. Термодинамический расчет (он будет приведен в следующих параграфах) показывает, что, работая по циклу Карно, тепловая машина имела бы к. п. д., равный

$$\eta = 1 - \frac{T_0}{T}, \tag{1}$$

где T — абсолютная температура, при которой происходит изотермическое расширение рабочего вещества (например, температура пара, подаваемого в цилиндр из котла), и T_0 — абсолютная температура, при которой происходит изотермическое сжатие рабочего вещества (например, температура конденсации пара в воду; значит, при выпуске пара в атмосферу $T_0 = 100 + 273{,}1 = 373{,}1°$ K)[1]). К. п. д. цикла Карно является максимальным для заданных пределов температур T и T_0. На практике цикл Карно может быть осуществлен только приближенно. Поэтому в действительности термодинамический к. п. д. тепловых машин всегда меньше, чем $\frac{T-T_0}{T}$. Значительные потери тепла в топке и потери на трение еще более понижают полный к. п. д. тепловых двигателей.



Сади Карно (1796—1832).

Следует иметь в виду, что низшая температура T_0 в формуле Карно только в исключительных случаях может совпадать с температурой среды; вообще же T_0 превышает температуру среды и определяется давлением, до которого производится расширение рабочего вещества (понятно, что это давление должно превышать противодавление среды или же, в предельном случае, оно может совпадать с противодавлением среды); чем меньше это давление, тем ниже T_0.

Очевидно, что температура T_0 в формуле Карно представляет собой температуру рабочего вещества в конце рабочего расширения. Для паровой машины это есть вместе с тем температура конденсации пара в воду (при атмосферном давлении 100° С, т. е. 373° К;

---

[1]) В некоторых книгах, к сожалению, дана недопустимая трактовка формулы Карно: в примерах, поясняющих применение формулы (1), для случая выпуска отработавшего пара в атмосферу вместо T_0 ошибочно предлагается ставить не температуру конденсации пара при давлении среды, а температуру среды, что приводит к неверным, завышенным значениям к. п. д., не имеющим ничего общего с действительным верхним пределом к. п. д. идеальной паровой машины. Аналогичная ошибка допускается и в отношении двигателей внутреннего сгорания, когда T_0 означает температуру отработавших газов, а не температуру среды, в которую производится выхлоп.

при выбросе пара в конденсатор T_0 снижается соответственно давлению в конденсаторе). Оценивая посредством формулы Карно максимальный к. п. д. «идеального» двигателя внутреннего сгорания или газовой турбины, под температурой T_0 нужно понимать температуру продуктов сгорания при выхлопе, когда рабочее расширение продолжено до противодавления среды.

§ 100. Уравнение Пуассона. Адиабатная работа газа

Процессы адиабатного расширения и сжатия газов (или процессы близкие к ним) широко используются почти во всех термодинамических циклах тепловых и холодильных машин, а также в различных пневматических машинах и компрессорах. Эти процессы играют также существенную роль в атмосферных явлениях, в явлениях упругости (при быстрых изменениях напряжения), в звуковых явлениях и др.

Уравнение, связывающее параметры состояния газа при равновесном адиабатном расширении или сжатии, было дано Пуассоном (в 1823 г.). Уравнение Пуассона, как показано ниже, легко выводится из первого начала термодинамики; причем обнаруживается, что некоторая функция параметров состояния («энтропия») при равновесных адиабатных процессах остается постоянной. Физический смысл упомянутой функции (энтропии) в полной мере раскрывается на основе второго начала термодинамики в совокупности с выводами статистической механики (§ 102, 103, 104).

В общем случае теплота Q, сообщаемая телу, идет на увеличение внутренней энергии и на производство работы A. При бесконечно малом изменении состояния $\delta A = p\,dv$ и

$$\delta Q = dU + p\,dv.$$

Поскольку для идеальных газов $U = \nu C_v T$, то

$$\delta Q = \nu C_v\,dT + p\,dv.$$

Если равновесное расширение или сжатие газа происходит адиабатно, т. е. без притока или отнятия тепла, когда $\delta Q = 0$, то очевидно, что изменение температуры и объема в этом случае подчинено нижеследующему уравнению:

$$\delta Q = \nu C_v\,\partial T + p\,\partial v = 0.$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, нужно разделить переменные, что легко достигается подстановкой $p = \nu\frac{RT}{v}$ и почленным делением на T:

$$\frac{\delta Q}{T} = \nu C_v\frac{\partial T}{T} + \nu R\frac{\partial v}{v} = 0.$$

Учитывая, что $\frac{dx}{x}$ есть дифференциал натурального логарифма x, мы видим, что правую часть написанного выражения можно получить, если, во-первых, продифференцировать функцию

$$S = \nu (C_v \ln T + R \ln v + a), \tag{2}$$

где $a = \text{const}$, и, во-вторых, принять, что эта *функция S при равновесном адиабатном расширении или сжатии остается неизменной* ($dS = 0$). Эта функция S есть *энтропия идеального газа.*

Потенцируя найденное соотношение между T и v при равновесном адиабатном расширении или сжатии газа, получим для 1 моля ($\nu = 1$):

$$T \cdot v^{\varkappa - 1} = \text{const} = e^{\frac{S - a}{C_v}}, \tag{3}$$

где для удобства сопоставления с последующими формулами введено обозначение $\varkappa = \frac{C_p}{C_v}$ и, стало быть, $\varkappa - 1 = \frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{R}{C_v}$.

Отсюда мы видим, что при равновесном адиабатном расширении температура убывает обратно пропорционально ($\varkappa$ — 1)-й степени объема. Следовательно, быстрее всего температура убывает у одноатомного газа. Это происходит потому, что при одинаковых температурах запас внутренней энергии одноатомного газа менее велик, чем у многоатомного.

Выведенная зависимость между T и v при равновесном адиабатном процессе представляет собой одно из уравнений Пуассона. Два других уравнения Пуассона для адиабат газа определяют зависимость между p и v и между T и p. Соответственно и энтропия газа может быть представлена как функция этих параметров.

Подставим в вышеприведенную формулу для S под знак логарифма вместо объема его выражение по уравнению Клапейрона $v = \nu \frac{RT}{p}$. Логарифмируя, получим три члена. Первый из них, $R \ln \nu R$, объединим с константой a и обозначим сумму их через a_1. Второй член, $R \ln T$, соединим с первым членом уравнения $C_v \ln T$, вынесем за скобки $\ln T$ и учтем, что $C_v + R = C_p$. Таким образом находим:

$$S = \nu (C_p \ln T - R \ln p + a_1), \tag{4}$$

где

$$a_1 = a + R \ln \nu R = \text{const}.$$

Отсюда, потенцируя, получаем второе уравнение Пуассона:

$$\frac{T}{p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}} = \text{const} = e^{\frac{S - a_1}{C_p}}, \tag{5}$$

где по-прежнему

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_v} \quad \text{и} \quad \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \frac{C_p - C_v}{C_p} = \frac{R}{C_p}.$$

Возвращаясь опять к первой формуле для S [формула (2)], заменим в ней абсолютную температуру ее выражением из уравнения Клапейрона $T = \frac{pv}{\nu R}$. Логарифмируя, получим три члена: первый из них $C_v \ln p$; второй член $C_v \ln v$ соединим с $R \ln v$, вынесем за скобки $\ln v$ и учтем, что $C_v + R = C_p$; третий член $-C_v \ln \nu R$ объединим с константой a и обозначим их алгебраическую сумму через a_2. Таким образом получим:

$$S = \nu (C_v \ln p + C_p \ln v + a_2), \tag{6}$$

где

$$a_2 = a - C_v \ln \nu R = \text{const}.$$

Потенцируя, находим третье уравнение Пуассона, определяющее вид адиабат газа в диаграмме (p, v):

$$pv^{\varkappa} = \text{const} = e^{\frac{S - a_2}{C_v}}. \tag{7}$$

Так как всегда $\varkappa > 1$, то, сопоставляя это уравнение адиабат газа с уравнением изотерм по Бойлю $pv = \text{const}$, мы видим, что в диаграмме (p, v) *адиабаты круче спадают к оси объемов, чем изотермы.*

Для удобства пользования формулами Пуассона приводим табличку, указывающую значение величин $\varkappa$, $\varkappa - 1$ и $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}$, которые фигурируют в формулах Пуассона в качестве показателей степени. В последнем столбце этой таблички приведены значения $\frac{1}{\varkappa - 1}$; эта величина показывает, во сколько раз теплоемкость 1 моля газа больше универсальной газовой постоянной[1]).

	$\varkappa$	$\varkappa - 1$	$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}$	$\frac{1}{\varkappa - 1} = \frac{C_v}{R}$
Одноатомный газ . .	$^5/_3$	$^2/_3$	$^2/_5$	$^3/_2$
Двухатомный » . .	$^7/_5$	$^2/_5$	$^2/_7$	$^5/_2$
Многоатомный » . .	$^8/_6$	$^2/_6$	$^2/_8$	$^6/_2$

[1]) Действительно, разделив почленно на C_v уравнение Роберта Майера $C_p = C_v + R$, получим: $\frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{R}{C_v}$, или $\varkappa - 1 = \frac{R}{C_p}$, откуда

$$C_v = \frac{1}{\varkappa - 1} R.$$

Уравнение Пуассона по смыслу его вывода приложимо только к равновесному адиабатному процессу. Для расчета быстрого (а значит, и неравновесного) адиабатного сжатия или расширения уравнением Пуассона по сути дела пользоваться нельзя. Резко, ударом увеличивая нагрузку на поршень, удерживающий газ в цилиндре, мы затрачиваем на сжатие газа больше работы, чем потребовалось бы при осторожном, постепенном увеличении нагрузки; в связи с этим температура газа будет возрастать быстрее, чем это следует по уравнению Пуассона. При неравновесном расширении газ производит меньшую работу, чем мог бы произвести, и поэтому температура будет падать медленнее.

Для расчета неравновесных (быстро протекающих) адиабатных процессов на практике часто пользуются формулами, тождественными по виду с приведенными выше формулами Пуассона, с тем, однако, существенным отличием, что величину $\varkappa$, которая в формулах Пуассона означает отношение теплоемкостей $\frac{C_p}{C_v}$, рассматривают просто как некоторую эмпирическую константу и подбирают для нее такое значение, при котором эти в сущности незаконно применяемые формулы дают наилучшее согласие с показаниями опыта.

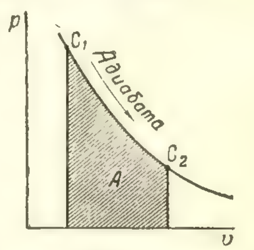


Рис. 207. Заштрихованная площадь изображает убыль внутренней энергии: $A=U_1-U_2$.

Когда сжатие или расширение тела происходит без притока или отдачи тепла, все равно — равновесно или же неравновесно, то работа производится телом за счет внутренней энергии (рис. 207)

$$A=U_1-U_2. \qquad (8)$$

Чтобы реализовать хотя бы приближенно условия равновесного адиабатного сжатия или расширения, надо, понятно, изолировать тело в тепловом отношении от окружающих тел, например поместить его в цилиндр, одетый в кожух, изготовленный из «плохих проводников тепла», или, что надежнее, поместить тело в цилиндр, подвешенный внутри другого цилиндра, который отделен от первого безвоздушным промежутком.

Легче осуществить неравновесное адиабатное сжатие или расширение. При крайне быстром сжатии тело не успевает отдать заметного количества тепла окружающей среде, и поэтому приближенно можно считать, что крайне быстрое сжатие происходит адиабатно. На этом основании прилагают, например, формулу адиабатной работы [формула (8)] к сжатию горючей смеси в цилиндре двигателя внутреннего сгорания.

Для газов работу адиабатного расширения можно вычислить по падению температуры. Действительно, по закону Джоуля для ν молей газа $U_1 - U_2 = \nu C_v(T_1 - T_2)$ и, следовательно,

$$A = \nu C_v(T_1 - T_2). \tag{9}$$

Если адиабатное расширение или сжатие протекало равновесно, то согласно формулам Пуассона, которые были пояснены выше, должно иметь место следующее соотношение между параметрами состояния газа в начале и в конце процесса:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}. \tag{10}$$

Воспользовавшись этим соотношением, мы напишем две формулы, часто применяемые на практике для вычисления работы адиабатного расширения газа. С этой целью в выражении $A = \nu C_v(T_1 - T_2)$ вынесем T_1 за скобки и заменим C_v через $\frac{R}{\varkappa - 1}$. Далее вместо отношения абсолютных температур $\frac{T_2}{T_1}$ подставим соответствующую степень отношения давлений или обратного отношения объемов. Таким образом, находим для ν молей газа:

$$A = \nu \frac{RT_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa - 1}\right], \tag{11}$$

$$A = \nu \frac{RT_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]. \tag{12}$$

Эти формулы справедливы для идеального газа, испытывающего равновесное адиабатное расширение ($A > 0$) или сжатие ($A < 0$). На практике их применяют к реальным газам и вычисляют по ним работу быстрого (значит, неравновесного) адиабатного расширения или сжатия, достигая согласия с опытом путем подбора константы $\varkappa$. Этими формулами широко пользуются, например, при расчете газовых двигателей.

§ 101. Цикл Карно и теорема о сумме приведенных теплот

Основатель термодинамики Сади Карно установил второе начало, изучая проблему возможного повышения к. п. д. тепловых машин.

По Карно, *наибольший к. п. д. тепловой машины не зависит от рода посредствующего тела и вполне определяется предельными температурами, между которыми машина работает.* Докажем, что приведенное утверждение является следствием невозможности существования вечного двигателя второго рода. Для этого

прежде всего вычислим к. п. д. машины, в которой идеальный газ совершает цикл, ограниченный двумя адиабатами и двумя изотермами (цикл Карно, рис. 208).

В первой, изотермической стадии расширения (кривая 1—2) теплоисточник отдает, а идеальный газ получает теплоту Q, равную работе расширения газа от объема v_1 до v_2:

$$Q = \nu RT \ln \frac{v_2}{v_1},$$

где ν — число молей газа, содержащегося в цилиндре машины.

Во второй, адиабатной стадии расширения (кривая 2—3) работа производится за счет убыли внутренней энергии газа, т. е. за счет падения температуры газа от уровня теплоисточника до уровня холодильника. При этом газ не получает и не отдает тепла.

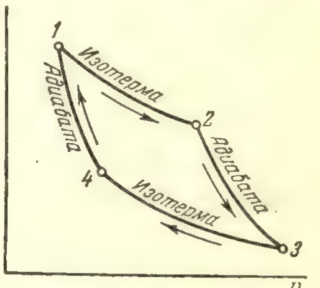


Рис. 208. Цикл Карно.

Затем идеальный газ сжимается изотермически от объема v_3 до объема v_4, определяемого пересечением изотермы холодильника с начальной адиабатой. На это сжатие газа (кривая 3—4) должна быть затрачена работа, которая вследствие изотермичности процесса окажется целиком превращенной в теплоту Q_0, отдаваемую газом холодильнику:

$$Q_0 = \nu RT_0 \ln \frac{v_3}{v_4}.$$

Цикл завершается адиабатным сжатием газа до исходного объема v_1; при этом затрачиваемая работа идет на повышение температуры газа до первоначального значения, т. е. до уровня теплоисточника.

За цикл газ получает теплоту Q и отдает теплоту Q_0. Поскольку к концу цикла газ возвращен к своему исходному состоянию, то, стало быть, разность теплот $Q - Q_0$ превращена в работу A, произведенную газом за цикл. По определению, к. п. д. есть отношение этой работы к теплоте, полученной рабочим телом (в данном случае — газом) у теплоисточника:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Q - Q_0}{Q}$$

Заметим теперь, что по уравнению Пуассона [§ 100, формула (3)] адиабата идеального газа характеризуется неизменностью произведения $Tv^{\varkappa-1}$. Объемы v_2 и v_3 лежат на одной адиабате, причем объем v_2 соответствует температуре T, а объем v_3 — температуре T_0.

Следовательно,

$$Tv_2^{\varkappa-1} = T_0 v_3^{\varkappa-1}.$$

Так как объемы v_1 и v_4 также лежат на одной адиабате и соответствуют тем же температурам T и T_0, то и для них можно написать аналогичное уравнение

$$Tv_1^{\varkappa-1} = T_0 v_4^{\varkappa-1}.$$

Разделив первое из этих уравнений на второе (причем температуры сократятся) и извлекая из обоих полученных отношений корень степени $\varkappa - 1$, находим, что

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4}.$$

Учитывая это обстоятельство, подставим вышенайденные значения теплот Q и Q_0 в выражение к. п. д. $\eta = \frac{Q - Q_0}{Q}$ и сократим числитель и знаменатель на равные величины $\nu R \ln \frac{v_2}{v_1}$ и $\nu R \ln \frac{v_3}{v_4}$. Таким образом находим, что

$$\eta = \frac{T - T_0}{T}, \tag{13}$$

т. е. *к. п. д. цикла Карно для машины, работающей на идеальном газе, равен отношению разности температур теплоисточника и холодильника к абсолютной температуре теплоисточника.*

Рассуждение Клаузиуса о двух сопряженных машинах Карно. Наряду с машиной, у которой рабочим телом является идеальный газ, возьмем другую машину, тоже работающую по циклу Карно и в тех же пределах температур, но у которой рабочее вещество произвольное, например, какой-либо пар или жидкость. Количество рабочих веществ для этих машин выбрано так, чтобы за каждый цикл обе они забирали у теплоисточника одинаковые количества тепла. Докажем, что к. п. д. этих машин равны.

Допустим, что это не так. Ту машину, у которой к. п. д. больше, назовем первой, а другую, у которой к. п. д. меньше, назовем второй и величины, относящиеся к ней, будем обозначать значком «штрих»:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Q - Q_0}{Q} > \eta = \frac{A'}{Q'} = \frac{Q' - Q_0'}{Q'},$$

причем по условию $Q' = Q$. Поступим так: первую машину используем как двигатель, а вторую — как холодильную, т. е. направим работу, производимую первой машиной, на то, чтобы заставить рабочее тело второй машины совершать цикл Карно в обратном направлении (при этом оно будет вследствие расширения при температуре T_0 забирать у холодильника тепло Q_0' и вследствие сжатия

при температуре T отдавать теплоисточнику тепло Q', которое по условию равно Q (рис. 209). Если, как мы допустили, $A<A'$, то в итоге совокупность обеих машин за каждый цикл даст работу $A - A'$, а холодильник потеряет теплоту, эквивалентную этой работе $A - A'$, причем состояние теплоисточника будет оставаться неизменным, так как первой машине он отдает столько же тепла, сколько получает от второй. Но тогда подобное сочетание двух машин Карно представляло бы собой перпетуум мобиле второго рода. Мы пришли к противоречию со вторым началом термодинамики, что указывает на неправильность сделанного нами допущения о неравенстве к. п. д. рассмотренных машин. Стало быть, *к. п. д. машины с идеальным газом в качестве рабочего тела не может быть ни больше, ни меньше, чем к. п. д. аналогичной машины, работающей между теми же пределами температур, но имеющей в качестве рабочего тела не идеальный газ, а вообще любое вещество.*

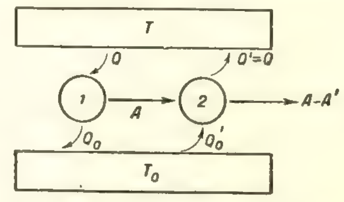


Рис. 209. К рассуждению Клаузиуса о двух сопряженных машинах Карно.

Мы видим, таким образом, что принцип, высказанный Карно, можно рассматривать как следствие невозможности перпетуум мобиле второго рода. Принцип Карно сыграл руководящую роль в развитии научных основ теплотехники. На основе этого принципа стало ясным, что для повышения к. п. д. тепловых машин важно идти по пути расширения температурных пределов, между которыми происходит цикл рабочего тела, тогда как замена одного рабочего вещества другим сама по себе не может дать никаких выгод. Форма цикла, вообще говоря, сказывается на величине к. п. д., причем *при заданных температурных пределах цикл Карно в сравнении со всеми остальными циклами обратимых машин дает наибольший к. п. д.*

Форма некоторых циклов иногда позволяет одни и те же тела промежуточной температуры использовать в одной половине цикла как теплоисточники, а в другой половине цикла — как холодильники. Такая *регенерация* [1]) *тепла* повышает к. п. д. цикла и приближает цикл по его свойствам к циклу Карно.

Сумма приведенных теплот. Обратимся снова к рис. 208. Верхнюю и нижнюю изотермы изображенного на этом рисунке цикла мы можем рассматривать как два пути перехода с одной адиабаты на другую. Теплота, которую нужно сообщить телу, чтобы перевести его из состояния *1* в *2* по одному из этих путей, например по верхней изотерме, не равна теплоте, которую потребовалось бы сообщить

---

[1]) Латинское слово regeneratio — в о з о б н о в л е н и е.

телу, чтобы перевести его с первой адиабаты на вторую по нижней изотерме ($Q \neq Q_0$).

Из выведенного выше соотношения

$$\eta = \frac{Q - Q_0}{Q} = \frac{T - T_0}{T}$$

получается, что

$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{T_0}{T},$$

и, стало быть,

$$\frac{Q}{T} = \frac{Q_0}{T_0}, \qquad (14)$$

т. е. *отношение изотермических теплот равновесного перехода с одной адиабаты на другую к абсолютной температуре, при которой этот переход производится, одинаково для всех изотерм* и, следовательно, зависит только от удаленности друг от друга рассматриваемых адиабат.

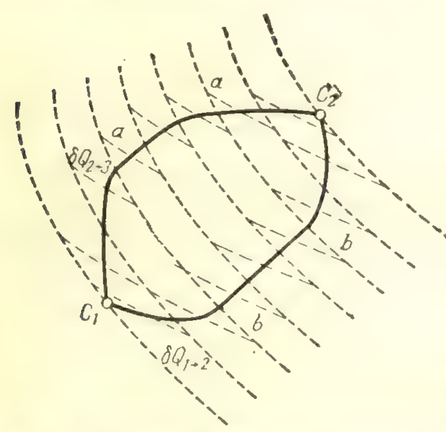


Рис 210. Сумма приведенных теплот не зависит от пути процесса.

Отношение изотермической теплоты к абсолютной температуре, при которой сообщается теплота, называют *приведенной теплотой*. По формуле (14) *для всевозможных изотермических переходов между двумя какими-либо адиабатами приведенные теплоты одинаковы*.

Возьмем любое тело и сопоставим два каких-либо его состояния C_1 и C_2. Тело можно перевести из первого состояния во второе посредством различных процессов, которые графически на диаграмме состояний изобразятся различными кривыми. Сравним два пути перехода a и b (рис. 210). Теплота, которую нужно сообщить телу, чтобы перевести тело из C_1 в C_2 по пути a, вообще говоря, не равна теплоте перехода по пути b, $Q^{(a)} \neq Q^{(b)}$. Рассечем оба пути перехода тесной сетью адиабат, как это показано на рис. 210. Заменим процессы a и b чередованием изотермических и адиабатных изменений состояния; нетрудно сообразить, что при бесконечно большом числе адиабат, проведенных между C_1 и C_2, такую замену можно провести, почти не изменяя вида процессов a и b. Поэтому теплоты $Q^{(a)}$ и $Q^{(b)}$ можно представить как суммы теплот изотермических

переходов с адиабаты на адиабату:

$$Q^{(a)} = \delta Q^{(a)}_{1\to 2} + \delta Q^{(a)}_{2\to 3} + \delta Q^{(a)}_{3\to 4} + \ldots,$$
$$Q^{(b)} = \delta Q^{(b)}_{1\to 2} + \delta Q^{(b)}_{2\to 3} + \delta Q^{(b)}_{3\to 4} + \ldots,$$

причем по формуле (14) для всех соответствующих членов этих сумм будем иметь равенства

$$\frac{\delta Q^{(a)}_{1\to 2}}{T^{(a)}_1} = \frac{\delta Q^{(b)}_{1\to 2}}{T^{(b)}_1}, \quad \frac{\delta Q^{(a)}_{2\to 3}}{T^{(a)}_2} = \frac{\delta Q^{(b)}_{2\to 3}}{T^{(b)}_2} \quad \text{и т. д.}$$

Следовательно, хотя $Q^{(a)} \neq Q^{(b)}$, но

$$\left(\sum \frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{по пути } a} = \left(\sum \frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{по пути } b}, \tag{15}$$

т. е. в отличие от суммы теплот *сумма приведенных теплот не зависит от пути равновесного процесса.*

§ 102. Энтропия. Основное уравнение термодинамики

Элементарная работа равновесного расширения равна произведению давления на приращение объема: $\delta A = p\,dv$. В более общем случае тело может производить не только одну работу расширения, но и еще какие-либо иные виды работы. Например, для разделения капли жидкости на более мелкие капли должна быть затрачена работа, направленная против сил поверхностного натяжения. Эта работа будет выражаться так: $\delta A = \alpha\,dq$, где q — площадь поверхности, а α — поверхностное натяжение. Если тело представляет собой проводник электричества, заряженный до потенциала φ, то для увеличения электрического заряда тела e на величину de надо затратить работу $\delta A = \varphi\,de$. Всегда вообще элементарная работа равновесного процесса может быть представлена в виде произведения типа

$$\delta A = H\,dh.$$

Множитель H носит название *фактора интенсивности работы* (его называют также «обобщенной силой»), множитель h носит название *фактора экстенсивности работы*[1]) (его называют также «обобщенной координатой»). Объем тела v, площадь его поверхности q, его заряд e суть факторы экстенсивности; давление p, поверхностное натяжение α, потенциал φ — факторы интенсивности (обобщенные силы).

[1]) В приведенной формуле $\delta A = H\,dh$ и вообще в данном параграфе (в отличие от других параграфов) мы пользуемся символом A для обозначения в одних случаях работы, производимой телом, в иных случаях — работы, затрачиваемой нами. Соответственно и h есть фактор экстенсивности производимой телом работы или же в других случаях — фактор экстенсивности затрачиваемой работы.

Суммарная работа в высокой мере зависит от «пути процесса»:

$$A = \int_1^2 H\,dh.$$

Не зная, как именно происходит переход тела из состояния C_1 в состояние C_2 [не зная вида функции $H = f(h)$], мы ничего не можем сказать о том, какова была произведенная телом работа A. В зависимости от «пути процесса» эта работа может быть велика или мала. В диаграмме (H, h) она всегда будет выражаться площадью, расположенной под кривой $H = f(h)$, характеризующей путь процесса и ограниченной слева и справа ординатами H_1 и H_2.

Обо всем этом мы упомянули с нижеследующей целью. Допустим, что нас интересует приращение фактора экстенсивности работы — приращение величины h. Это приращение равно, очевидно, разности $h_2 - h_1$ независимо от того, по какому пути происходит переход тела из состояния C_1 в C_2. Каков бы ни был путь процесса, понятно, что суммарное приращение $h_2 - h_1$ слагается из элементарно малых приращений dh, причем каждое из этих элементарно малых приращений dh равно элементарной работе, производимой телом, разделенной на фактор интенсивности работы H:

$$dh = \frac{\delta A}{H}, \quad h_2 - h_1 = \int_1^2 \frac{\delta A}{H}.$$

Если мы условимся называть отношение $\frac{\delta A}{H}$ «приведенной работой», то мы должны будем сказать, что сумма приведенных работ $\int_1^2 \frac{\delta A}{H}$ не зависит от пути процесса; для любого равновесного процесса, переводящего тело из состояния C_1 в C_2, сумма приведенных работ равна приращению фактора экстенсивности работы.

В пятидесятых годах прошлого столетия Клаузиус, развивая идеи Карно о к. п. д. тепловых машин, установил, что *абсолютную температуру T можно рассматривать как фактор интенсивности теплоотдачи* и что в связи с этим *сумма приведенных теплот* $\int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ *не зависит от пути процесса*. Эта доказанная Клаузиусом на основе второго начала теорема, что сумма приведенных теплот одинакова для всех равновесных процессов, переводящих тело из некоторого начального состояния C_1 в состояние C_2, является важнейшей теоремой термодинамики (доказательство Клаузиуса с некоторыми упрощениями было воспроизведено нами в предыдущем параграфе).

Клаузиус назвал сумму сообщаемых телу приведенных теплот *энтропией*, точнее — приращением энтропии (рис. 211). Энтропию принято обозначать буквой S. Энтропия, так же как и энергия, есть величина разностная; об энтропии тела, взятого в некотором заданном состоянии C_2, можно говорить только в смысле сопоставления этого заданного состояния C_2 с некоторым другим состоянием C_1, которое избрано нами в качестве исходного (начального) состояния. Когда говорят: «энтропия тела в состоянии C_2 по отношению к состоянию C_1», то имеют в виду ту же самую величину, про которую можно иначе сказать, что это есть «приращение, испытываемое энтропией тела при переходе тела из состояния C_1 в состояние C_2»:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \qquad (16)$$

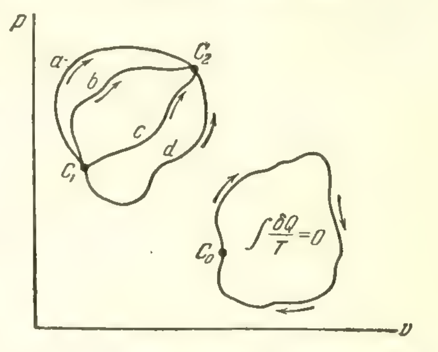


Рис. 211. Энтропия $S_2 - S_1$ равна сумме приведенных теплот, найденной для любого равновесного пути перехода $C_1 \to C_2$ (например, для пути a, или b, или c и т. д.). Для равновесного цикла сумма приведенных теплот равна нулю.

По смыслу сказанного выше, *энтропия S представляет собой фактор экстенсивности теплоотдачи*. Для всех видов работы факторы экстенсивности могут быть измеряемы непосредственно, и поэтому соотношением, которое определяет приращение фактора экстенсивности работы как сумму приведенных работ, нет надобности пользоваться. Иначе обстоит дело с энтропией. Мы не располагаем способом непосредственного измерения энтропии и поэтому вынуждены вычислять энтропию как сумму сообщенных телу приведенных теплот.

Важно помнить, что здесь шла речь все время о равновесных процессах. При неравновесности процесса, при быстром нагревании или охлаждении тело становится неоднородным в отношении температуры; температура делается неодинаковой в различных участках тела. Чтобы и для этого случая сохранить понятие приведенной теплоты $\frac{\delta Q}{T}$, нужно сделать дополнительное соглашение, на какую именно температуру мы условливаемся делить сообщенную телу теплоту.

Нельзя сказать, чтобы определение энтропии как суммы приведенных теплот сразу вскрывало физический смысл энтропии. Физический смысл этой величины в полной мере раскрывается только на основе статистических представлений, которые будут пояснены ниже (в § 104). Однако естественным является желание, чтобы и

чисто термодинамическое определение энтропии было возможно более «доходчивым», простым, конкретным. В физике многие величины определяются как коэффициенты. Это, собственно,— математический прием, который тоже не вполне конкретно вскрывает физическую сущность определяемой величины. Но понятие коэффициента может быть связано с процессом измерения, а процедуру измерения легко представить себе наглядно, чем и обеспечивается конкретность представления об определяемой величине. К сожалению, подобная конкретизация в определении понятия энтропии невозможна. Считаясь с действительной сложностью понятия энтропии, можно, однако, конкретизировать термодинамическое определение энтропии иным путем.

К энтропии нужно подходить как к мере обесцененности внутренней энергии тела. Что это значит?

Мы уже говорили, что хотя теплота и работа в количественном отношении эквивалентны друг другу, но качественно они неравноценны. При передаче энергии в форме тепла сказываются законы, управляющие большим числом случайных событий в микромире, т. е. законы статистической механики. Это проявляется, в частности, в том, что при тепловом обмене энергии происходит выравнивание температур. Внутренняя энергия тел также подчинена законам статистики. По-видимому, можно сказать, что законы статистики вступают в свои права в отношении внутренней энергии тела не в одинаковой мере для разных состояний тела. С этим связано то обстоятельство, что если мы пожелаем использовать внутреннюю энергию какого-либо тела по возможности в форме работы, но воздержимся от применения холодильников со слишком низкой температурой, то окажется, что часть внутренней энергии можно будет получить только в форме тепла.

Можно доказать, что энтропия S_2 какого-либо тела в состоянии *2* по отношению к состоянию *1*, т. е. $S = S_2 - S_1$, есть *минимальное количество тепла*, которое надо отнять у тела, чтобы равновесно перевести его из состояния *2* в *1*, отнимая тепло при температурах не ниже некоторого универсального (т. е. для всех тел одинакового) температурного уровня T_0, который принимают за единицу температурной шкалы (т. е. $T_0 = 1°$ K).

Чем больше температура тела и чем больше его удельный объем, тем больше та часть внутренней энергии этого тела, которую при указанных условиях поневоле приходится черпать в форме теплоты, а не работы, т. е. тем больше энтропия этого тела.

Следует обратить внимание на то, что при указанном определении энтропии, хотя мы и рассматриваем энтропию как некоторый минимум тепла, но для установления этого минимума мы привлекаем представление о низшем температурном уровне холодильников T_0 (= 1° K), вследствие чего размерность энтропии оказывается равной отношению теплоты к температуре.

Итак, можно сказать, что обесцененность внутренней энергии, измеряемая энтропией, проявляется в том, что часть внутренней энергии при вышеупомянутом ограничении температур холодильников может быть отдана телом только в виде тепла, а не работы. Эта величина, вообще говоря, невелика. Но если бы мы ограничили температурный уровень применяемых холодильников не столь низкой температурой, как 1° K, а температурой T° K, то «тепловая часть» внутренней энергии оказалась бы равной уже не $S_2 - S_1$, а $(S_2 - S_1)T$.

Несколько позже мы покажем, что в представлении об энтропии отражена сущность второго начала термодинамики, подобно тому как в представлении о внутренней энергии отражена сущность первого начала.

Выведем уравнение, которое связывает элементарное приращение энтропии dS с элементарным приращением внутренней энергии dU. Это уравнение называют основным уравнением термодинамики.

Из определения энтропии вытекает, что

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \qquad (17)$$

С другой стороны, согласно первому началу сообщенная телу теплота δQ идет на приращение внутренней энергии dU и на производство работы δA:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Следовательно,

$$dS = \frac{dU + \delta A}{T}. \qquad (18)$$

Это и есть *основное уравнение термодинамики*. По смыслу вывода здесь δA означает элементарную работу, производимую телом при равновесном процессе.

Если тело производит только один вид работы — работу расширения, то

$$\delta A = p\,dv$$

и

$$dS = \frac{dU + p\,dv}{T}. \qquad (19)$$

Из этого простого уравнения термодинамика черпает множество следствий относительно связи, существующей между различными физическими величинами: теплоемкостями, скрытыми теплотами, модулями упругости, коэффициентами расширения и давления и т. д. Прилагая основное уравнение к случаям испарения, плавления, расширения, к химическим реакциям и т. д., термодинамика устанавливает ряд закономерностей, в частности многие из тех закономерностей, которые пояснены в последующих главах.

Энтропия идеального газа. Энтропия идеального газа была вычислена нами в § 100. Мы нашли там, что для одного моля газа

$$S = C_v \ln T + R \ln v + a.$$

Если имеется ν молей газа, то $U = \nu C_v T$, где C_v — грамм-молекулярная теплоемкость, и $p = \nu \frac{RT}{v}$. Поэтому энтропия ν молей газа [1]) равна:

$$S = \nu C_v \ln T + \nu R \ln v + \nu a. \tag{20}$$

Энтропия ν молей газа в ν раз больше, чем энтропия 1 моля. Имея в виду это обстоятельство, говорят, что энтропия газа, так же как и внутренняя энергия газа, есть величина аддитивная. Внутреннюю энергию и энтропию реальных тел обычно также можно считать величинами аддитивными, за исключением тех случаев, когда мы хотим учесть эффекты, связанные с проявлением сил поверхностного натяжения.

Размерность энтропии такова же, как и размерность теплоемкости,— отношение энергии к температуре, поэтому калорической единицей энтропии является 1 *кал/град*. Помня, что общепринятой температурной единицей в физике и в технике служит 1° Цельсия, можно для упрощения начертания считать температуру за отвлеченное число и выражать энтропию и теплоемкость просто в единицах энергии, предпочтительно в калориях. Чтобы освоиться с формулой энтропии идеального газа, применим ее к двум частным случаям.

Представим себе, что 1 моль двухатомного газа (например, 22,4 *л* воздуха, взятого при 0° С и атмосферном давлении) нагревают без изменения объема от абсолютной температуры T_1 до T_2. Приращение энтропии будет равно:

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad \text{где} \quad C_v = 5 \text{ кал}.$$

Отсюда видим, что энтропия 1 моля двухатомного газа возрастает на 5 *кал*, когда абсолютную температуру газа путем изохорного нагревания увеличивают в 2,72 раза (это число 2,72 приближенно представляет собой основание натуральных логарифмов; $\ln 2{,}72 \approx 1$).

Пусть 1 моль газа, безразлично какого — одноатомного, двухатомного или многоатомного, испытывает изотермическое расширение от объема v_1 до объема v_2. Тогда приращение энтропии будет

[1]) В § 100 мы получили также выражения энтропии газа как функции T и p:

$$S = C_p \ln T - R \ln p + a_1$$
$$(a_1 = a + R \ln R)$$

и выражение энтропии газа как функции p и v:

$$S = C_v \ln p + C_p \ln v + a_2$$
$$(a_2 = a - C_v \ln R).$$

равно:

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{v_2}{v_1}, \quad \text{где} \quad R = 2 \text{ кал.}$$

Отсюда видим, что энтропия 1 моля газа возрастает на 2 *кал* каждый раз, когда объем газа изотермически увеличивается в 2,72 раза. Легко подсчитать, что возрастание энтропии 1 моля газа на 1 *кал* происходит при изотермическом увеличении объема в 1,65 раза.

§ 103. Процессы обратимые и необратимые. Теорема о возрастании энтропии

Кратко резюмируя сущность второго начала термодинамики, можно сказать, что некомпенсированный переход тепла в работу невозможен. Из невозможности одного процесса — процесса некомпенсированного перехода тепла в работу — вытекает невозможность бесчисленного множества процессов; *невозможны все те процессы, составной частью которых должен был бы явиться некомпенсированный переход тепла в работу.*

Это влечет за собой деление всех процессов, которые могут происходить в действительности, на два класса: процессы *обратимые* и процессы *необратимые.*

Термины «обратимый» и «необратимый» процессы относятся исключительно к процессу, испытываемому изолированной системой в целом.

Под *изолированной системой* мы подразумеваем такую совокупность тел (включая воздействующие на них механизмы), на которую никаких внешних *энергетических воздействий не производится,* которая отграничена от окружающих тел непроницаемой для тепла оболочкой и *полная энергия которой в силу этого не может ни возрастать, ни убывать.*

Если изолированная система испытывает некоторый процесс, который символически мы обозначим так:

$$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$$

(из состояния A система переходит в состояние B), то могут представиться два, и *только два случая.*

Во-первых, может оказаться, что осуществить обратный переход системы из B в A, не производя при этом никаких изменений в окружающих телах, невозможно вследствие того, что для этого надо было бы некомпенсированно превратить в работу некоторое количество тепла. В этом случае испытанный изолированной системой процесс (A → B) мы называем *необратимым.*

Во-вторых, может оказаться, что обратный переход системы из B в A возможен без каких бы то ни было изменений в

окружающих телах. В этом случае испытанный изолированной системой процесс (А → В) мы называем *обратимым.*

Иначе говоря:

любой процесс, переводящий изолированную систему из состояния А *в состояние* В, *есть процесс* обратимый, *если процесс, имеющий единственным своим результатом возвращение системы из состояния* В *в* А, возможен;

любой процесс, переводящий изолированную систему из состояния А *в состояние* В, *есть процесс* необратимый, *если процесс, имеющий единственным своим результатом возвращение системы из состояния* В *в* А, невозможен.

Здесь слова «единственным результатом» имеют тот же смысл, что и в формулировке второго начала, т. е. смысл запрета каких бы то ни было изменений термодинамического состояния окружающих (не входящих в состав системы) тел.

Типичнейшим примером необратимого процесса является трение. При трении, какова бы ни была конкретная обстановка процесса, работа, направленная на преодоление сил трения, идет сначала на нагревание трущихся поверхностей, а затем благодаря теплоотдаче — на нагревание глубже лежащих слоев вещества трущихся тел и окружающих тел. Так как обратное некомпенсированное превращение тепла в работу невозможно, то всякий процесс, сопровождающийся трением, необратим.

Вторым типичным примером необратимого процесса является теплообмен при конечной разности температур. Этот процесс необратим потому, что *невозможно осуществить процесс, имеющий единственным своим результатом обратный переход тепла от тела холодного к более нагретому*[1]).

Типичным примером необратимого процесса является также расширение газа в пустоту[2]).

---

[1]) Действительно, чтобы перенести тепло от тела холодного к более нагретому, не производя никакого изменения в состоянии окружающих тел, необходимо было бы отнять теплоту у холодного тела (это возможно), превратить ее некомпенсированно в работу (это невозможно), затратить полученную работу на увеличение внутренней энергии нагретого тела (это возможно). Так как составной частью этого процесса должно было бы явиться в действительности невозможное некомпенсированное превращение тепла в работу, то и весь процесс в целом невозможен, а значит, процесс теплоотдачи при конечной разности температур необратим.

[2]) При расширении газа в пустоту газ не производит работы и, следовательно, внутренняя энергия его остается неизменной. Обратим ли этот процесс? Вопрос сводится к тому, возможен ли процесс, единственный результат которого заключался бы в сжатии тела без изменения его внутренней энергии. На сжатие тела надо затратить работу. Чтобы внутренняя энергия тела не увеличилась, надо отнять от него эквивалентное количество тепла; наконец, чтобы никаких изменений в окружающем мире не произошло, надо было бы эту отнятую у тела теплоту некомпенсированно превратить в работу, что невозможно. Значит, неравновесное расширение тела необратимо.

Процессы равновесные и неравновесные. *Мы называем процесс равновесным, если, испытывая этот процесс, система проходит через ряд непрерывно следующих друг за другом равновесных состояний*[1]).

Укажем условия, которые должны быть соблюдены, чтобы была обеспечена равновесность процесса.

Первое условие заключается в том, что *запрещается резко, крупным скачком изменять производимые воздействия*, например запрещается резко изменять давление, температуру среды и т. д. В силу этого условия равновесный процесс по необходимости должен слагаться из бесчисленного множества элементарных ступеней.

Второе условие состоит в том, что *процесс должен протекать в высшей степени медленно*. Это условие является обязательным потому, что для каждой элементарной ступени процесса, переводящей систему из равновесного состояния в смежное, тоже равновесное состояние, требуется конечный, а не элементарно малый промежуток времени. Число же отдельных ступеней процесса в высшей мере велико, и поэтому общая длительность процесса чрезвычайно велика.

Пусть нам дана некоторая изолированная система тел. Внутри нее может протекать ряд процессов, вследствие которых система переходит с течением времени из состояния А в В. Можно доказать, что если хотя бы один из процессов внутри системы протекал неравновесно, то в целом переход системы А → В необратим. *Обязательное и достаточное условие обратимости заключается в том, чтобы все происходящие в системе процессы протекали равновесно*[2]).

Чем менее равновесен процесс, чем стремительнее он происходит, тем больше степень его необратимости. Наблюдаемые в природе и в технике процессы все в той или иной мере неравновесны и поэтому необратимы. Тем не менее изучение идеализируемых нами обратимых процессов является важным делом: оно приводит

---

[1]) При более строгом подходе к определению понятия равновесности процесса к сказанному должно быть добавлено требование, что, *испытывая указанный процесс, система производит наибольшую работу, которую она способна произвести, проходя через заданный непрерывный ряд равновесных состояний*. Здесь, как и всегда, мы говорим о «производстве работы» в алгебраическом смысле; может оказаться, что наибольшая работа, которую в заданных условиях система способна произвести, есть величина отрицательная. Это значит, что процесс по необходимости связан с затратой работы. Чтобы он был равновесен, необходимо, чтобы затрата работы была минимальна.

[2]) На этом основании часто пользуются терминами «обратимый» и «необратимый» там, где, строго говоря, следовало бы применять термины «равновесный» и «неравновесный». Только про такой процесс, который представляет собой переход изолированной системы из одного состояния в другое, можно сказать, что он обратим или же необратим. Если же речь идет о неизолированной системе, то надо применять термины «равновесный» и «неравновесный».

термодинамику к открытию закономерностей, которые иным путем было бы трудно обнаружить.

Теорема о возрастании энтропии. Мы установили признак необратимости процесса; этим признаком является его неравновесность. Понятно, что признак этот может быть использован лишь в том случае, если в точности известно, как именно протекал процесс.

Однако из самого определения понятия необратимости следует, что *для решения вопроса, обратим или необратим* какой-либо заданный процесс, переводящий изолированную систему из состояния A в состояние B, вовсе *нет надобности знать, как именно протекал* этот процесс. Достаточно знать только *исходное и конечное состояния* системы. Сопоставляя эти состояния, можно выяснить, возможен или невозможен процесс, имеющий единственным своим результатом возвращение системы в исходное состояние: если невозможен, то, значит, процесс A → B представлял собой необратимый процесс; если возможен, то значит, процесс A → B был процессом обратимым.

Отсюда надо сделать вывод, что, помимо рассмотренного выше признака необратимости, который был установлен в соответствии с характером протекания процесса, должен существовать еще один признак необратимости, основанный на сопоставлении конечного состояния изолированной системы с начальным состоянием.

Необратимость процесса должна оставлять какой-то след, запечатленный происходящим изменением термодинамического состояния тел, входящих в систему. Значит, имеется возможность отыскать количественную меру необратимости. Этой количественной мерой необратимости является возрастание энтропии изолированной системы. Оказывается (это доказывают в термодинамике), что:

энтропия изолированной системы или остается неизменной, *если процесс, испытываемый системой*, обратим, *или же* возрастает, *если процесс* необратим. *Следовательно, ни при каких условиях энтропия изолированной системы не может убывать.*

В изолированной системе энергия количественно при любых процессах остается неизменной. Но при неизменном количестве внутренняя энергия может изменяться качественно. Теплота неполноценна в сравнении с работой. Это влечет за собой неполноценность внутренней энергии в сравнении с другими видами энергии. В отличие, например, от энергии тяготения запасы внутренней энергии мы обычно не можем целиком использовать в форме работы: некоторую часть внутренней энергии мы вынуждены черпать в форме тепла.

Какая именно часть внутренней энергии будет отдана непременно в форме тепла, а не работы, это зависит от термодинамического состояния тела и от тех возможностей, которыми мы располагаем при выборе температуры теплополучающего тела (стр. 412).

Если тело помещено в среду, с которой оно находится в тепловом равновесии, и если мы не располагаем телами с более низкой температурой, то *наименьшая часть внутренней энергии, которая непременно будет отдана в форме тепла, а не работы, равна произведению абсолютной температуры тела на его энтропию* (Гельмгольц назвал эту величину *TS связанной энергией*).

Энтропия есть мера неполноценности (обесцененности) внутренней энергии. Возрастание энтропии при необратимых процессах происходит потому, что неравновесность процесса в еще большей степени обесценивает внутреннюю энергию.

Заметим, что вместо слов «неполноценность» и «обесцененность» внутренней энергии часто говорят «рассеяние» внутренней энергии, «деградация» ее, «энтропийность» ее. Все эти термины означают одно и то же.

§ 104. Статистический смысл энтропии

В противоположность первому началу второе начало термодинамики имеет статистическую основу. События микромира (соударения молекул, тепловое излучение атомов) подчинены закону распределения случайных событий, так называемому закону больших чисел; это сказывается в неполноценности тепла в сравнении с работой, или, что то же, в невозможности некомпенсированного превращения теплоты в работу.

Второе начало неприложимо к отдельной молекуле или к малому числу молекул. Иногда говорят, что оно в этом случае является неверным. Это не вполне так. Второе начало оказалось бы неверным, если бы оно содержало в себе какие-либо утверждения, касающиеся отдельной молекулы. Но легко видеть, что второе начало ничего не говорит по поводу того, каково должно быть поведение отдельной молекулы или малой группы молекул: оно в этом случае ничего не утверждает по той простой причине, что к отдельной молекуле неприменимо понятие тепла. Понятия — тепло, температура, энтропия — имеют смысл только по отношению к достаточно крупному агрегату молекул.

Статистический смысл второго начала был вскрыт с полной ясностью в особенности работами Больцмана и Гиббса. Больцман установил, что с молекулярно-кинетической точки зрения смысл второго начала заключается в следующем:

Природа стремится от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным.

Наиболее вероятным является равномерное распределение молекул по всему объему, занятому телом. Наиболее вероятным является некоторое вполне определенное распределение скоростей молекул — максвеллово распределение скоростей. Если в системе существует неравномерное распределение молекул по объему или отклоняющееся от закона Максвелла распределение скоростей, то, когда внешние

воздействия на систему будут устранены, в ней сами собой возникнут процессы, которые в конце концов приведут систему в наиболее вероятное состояние. С макрофизической точки зрения эти процессы будут заключаться в выравнивании плотности, в выравнивании температуры, в выравнивании давлений, в выравнивании так называемых химических потенциалов и т. д.

В зависимости от условий, в которые поставлено тело, то или иное состояние тела является наиболее вероятным. Так, в поле тяжести наиболее вероятным является некоторое вполне определенное распределение молекул; для газа это будет то распределение, которое отвечает барометрическому закону изменения плотности (§ 98).

Если мы представим себе, что внутри тела какая-либо молекула переставлена (перемещена) в другое место пространства или имеет другую скорость (причем энергия какой-нибудь другой молекулы тоже изменена так, чтобы в целом энергия тела оставалась неизменной), то от этого, понятно, термодинамическое состояние тела не изменится. Допустим, что мы подсчитали число всех молекулярных перестановок — таких, чтобы термодинамическое состояние тела при этом не изменилось. Для различных термодинамических состояний одного и того же тела это число будет, вообще говоря, неодинаково. Именно это число и называют *термодинамической вероятностью* состояния тела.

Чем больше объем тела (чем меньше его плотность) и чем больше молекулярно-кинетическая энергия тела (т. е. чем выше температура), тем соответственно больше и число молекулярных пространственно-энергетических перемещений, которые могут быть осуществлены без изменения термодинамического состояния тела, т. е. тем больше термодинамическая вероятность данного состояния тела.

Из сказанного выше ясно, что между энтропией тела и вероятностью состояния существует связь: обе эти величины возрастают, когда изолированная система испытывает необратимый процесс (§ 103). Соотношение, существующее между этими двумя величинами (для случая газа), можно установить, основываясь на простейших свойствах энтропии и вероятности состояния. Для этой цели надо только сопоставить, как изменяются эти две величины в зависимости от количества вещества при неизменности его термодинамического состояния. Вспомним, что энтропия газа пропорциональна его количеству. Возьмем какой-либо объем газа и осторожно, не изменяя состояния газа, разделим перегородкой этот объем газа на две части. Очевидно, что энтропия всего количества взятого газа будет равна с у м м е энтропий двух его частей:

$$S = S_a + S_b.$$

Теперь спросим себя: чему равна термодинамическая вероятность W всего взятого количества газа, если термодинамические вероят-

ности двух его частей равны W_a и W_b? Чтобы правильно ответить на этот вопрос, надо иметь в виду, что вероятность какого-либо совокупного события равна п р о и з в е д е н и ю вероятностей отдельных событий. Например, пусть вероятность выигрыша по лотерейному билету есть P_1. Допустим, что мы имеем еще другой лотерейный билет, для которого вероятность выигрыша есть P_2; тогда вероятность, что мы выиграем по одному из них, будет $P_1 + P_2$, но вероятность, что выиграют *одновременно* оба билета, будет равна произведению $P_1 P_2$. Аналогично вероятность состояния W всего взятого количества газа равна произведению вероятностей двух его частей:

$$W = W_a W_b.$$

Итак, суммированию энтропий соответствует умножение термодинамических вероятностей. Такого рода связь между величинами имеет место тогда, когда первая из этих величин S пропорциональна логарифму второй величины W. Следовательно, *энтропия газа пропорциональна логарифму его термодинамической вероятности*[1]):

$$S = k \ln W + \text{const}. \tag{21}$$

Больцман показал, что коэффициент пропорциональности k для 1 моля равен универсальной газовой постоянной R, разделенной на число молекул в 1 моле:

$$k = \frac{R}{N} = 1{,}371 \cdot 10^{-16} \text{ \textit{эрг/градус}}.$$

Термодинамическая вероятность является мерой хаотичности молекулярных движений и «рассеяния» молекул (т. е. беспорядочности их размещения и широты их разброса в пространстве). Но термодинамическая вероятность имеет чрезмерно огромное численное значение, поэтому энтропия, пропорциональная логарифму термодинамической вероятности (причем коэффициент пропорциональности весьма мал), представляет собой более удобную меру хаотичности, порождаемой тепловым движением частиц.

Только для кристаллов при температурах, близких к абсолютному нулю, термодинамическая вероятность выражается малым числом, так как в этом случае размещение в пространстве частиц тела вполне упорядочено силами их взаимодействия, а энергия колебательного движения частиц ничтожна. *В пределе, для абсолютного*

---

[1]) Считают, что приведенная формула, связывающая энтропию с термодинамической вероятностью, справедлива не только для газов, но также и для жидкостей и для твердых тел. Разрешение этого вопроса усложняется необходимостью учитывать в этом случае проявление сил поверхностного натяжения, вследствие которых невозможно, например разделить каплю жидкости на две капли так, чтобы термодинамическое состояние жидкости осталось совершенно неизменным.

нуля температуры (когда термодинамическая вероятность размещения частиц может считаться равной единице), *энтропия* по соотношению (21) *становится равной нулю.* В связи с этим, как было показано экспериментально и теоретически Нернстом (1907—1911 гг.), *теплоемкость кристаллических тел вблизи абсолютного нуля становится исчезающе малой.* Нернст показал также, что равновесное сжатие и растяжение кристаллического тела при температуре абсолютного нуля не должно вызывать изменения энтропии, остающейся равной нулю (строго упорядоченное размещение частиц тела в пространстве в этом случае однозначно определяется совокупным действием сил взаимодействия и внешних сжимающих или растягивающих сил). Иначе говоря, *изотерма абсолютного нуля для кристаллических тел является вместе с тем адиабатой* (в этом заключается сущность *теплового закона Нернста*).

§ 105. Теоремы о термодинамическом равновесии. Свободная энергия и термодинамический потенциал

Некоторые весьма общие теоремы о термодинамическом равновесии были установлены во второй половине прошлого столетия Клаузиусом и Гельмгольцем и вслед за ними, в наиболее строгой форме, Гиббсом. Эти теоремы основаны на учении об энтропии, которое Гельмгольц и Гиббс развили в учение о термодинамических потенциалах. Мы ограничимся здесь кратким пояснением некоторых наиболее важных понятий и выводов.

Процесс, испытываемый изолированной системой, может быть или обратимым, или же необратимым. В первом случае энтропия изолированной системы остается неизменной, во втором — энтропия возрастает. Отсюда ясно, что *когда энтропия системы достигнет максимума, изолированная система будет пребывать в состоянии устойчивого равновесия.* Она может быть выведена из этого состояния только посредством внешних воздействий.

Возьмем, например, стакан воды и, изолировав его в тепловом отношении от окружающей среды, бросим в него достаточно большой кусок медного купороса. Часть медного купороса растворится и при этом температура воды несколько понизится (растворение многих других тел сопровождается, напротив, повышением температуры). Растворение приостановится тогда, когда энтропия системы — в данном случае сумма энтропий медного купороса и его водного раствора — достигнет максимума.

На практике часто приходится иметь дело с системами, которые в тепловом отношении не только не изолированы от окружающей их среды, но, напротив, поставлены в такие условия, что, несмотря на протекающие в них процессы, температура их все время поддерживается примерно постоянной.

Если мы обратимся к примеру, приведенному выше, то сможем утверждать, что в этом случае (когда температуру воды поддерживают постоянной) растворится большее количество медного купороса. Состояние равновесия будет иное; оно не будет уже соответствовать максимуму энтропии купороса и его водного раствора. Конечно, и в этом случае можно применить ту же теорему о максимуме энтропии, если опять изучать изолированную систему, включающую в себя в данном случае не только стакан с раствором медного купороса, но также и среду, в которой этот стакан находится. Но это усложняет дело, и в этом нет надобности, так как для важного случая изотермических процессов термодинамика устанавливает особый критерий[1]) равновесия.

Вспомним то, что было сказано в § 103 (стр. 419) о величине TS. Эта величина (по терминологии Гельмгольца — *связанная энергия*) представляет собой ту часть внутренней энергии тела, которая может быть получена нами только в форме тепла, если отнятие тепла производить при температурах не ниже T. Остальная, полноценная часть внутренней энергии $U - TS$ при тех же условиях может быть получена в форме работы. Эту полноценную часть внутренней энергии называют *свободной энергией* и обычно обозначают буквой F.

Пусть система изотермически переходит из состояния C_1 в C_2. Приращение энтропии системы равно приведенной теплоте этого процесса: $S_2 - S_1 = \frac{Q_{T=\mathrm{const}}}{T}$. Здесь $Q_{T=\mathrm{const}}$ есть теплота, сообщенная системе; желая отметить, что температура остается неизменной, величину $Q_{T=\mathrm{const}}$ обычно называют скрытой теплотой: скрытая теплота плавления, испарения и т. д. Скрытую теплоту часто обозначают буквой r ($Q_{T=\mathrm{const}} = r$). Мы видим, что скрытая теплота изотермического процесса идет на увеличение обесцененной части внутренней энергии:

$$r = T(S_2 - S_1). \tag{22}$$

Работу, произведенную системой при изотермическом процессе, обозначим через $A_{T=\mathrm{const}}$. Система производит работу за счет убыли внутренней энергии ($U_1 - U_2$) и за счет сообщенного системе тепла Q. Следовательно, $A_{T=\mathrm{const}} = U_1 - U_2 + TS_2 - TS_1$. Соединяя в правой части этого выражения средние и крайние члены и имея в виду, что $U_1 - TS_1$ есть свободная энергия F_1, которая присуща системе в состоянии C_1, и $U_2 - TS_2$ есть свободная энергия F_2 в состоянии C_2, мы видим, что *при изотермическом процессе система производит работу за счет убыли свободной энергии*:

$$A_{T=\mathrm{const}} = F_1 - F_2. \tag{23}$$

---

[1]) Признак; от греческого kritein—отделять, решать (лат. criterium).

Например, гальванический элемент производит работу (работу электрического тока), равную убыли свободной энергии веществ, химически реагирующих в элементе.

Одна из самых важных теорем термодинамики гласит: если температуру и объем системы сохранять неизменными, то внутри системы будут протекать только такие процессы, которые сопровождаются убылью свободной энергии или же (при равновесном течении) не изменяют ее величины. *Когда обстановкой опыта гарантирована неизменность температуры и объема, состоянию устойчивого равновесия соответствует минимум свободной энергии.*



Джосиа Виллард Гиббс (1839—1903).

Свободная энергия единицы массы вещества ($U-TS$) в сумме с энергией, которую можно было бы назвать объемной, равной произведению давления на удельный (или мольный) объем, составляет так называемый *полный термодинамический потенциал* (для химически однородных веществ его называют также *химическим потенциалом*):

$$\Phi = U - TS + pV. \qquad (24)$$

Как мы убедимся в дальнейшем (§ 108), *при термодинамическом равновесии* жидкости и ее насыщенного пара (а также и при термодинамическом равновесии жидкой и твердой фаз) *полные термодинамические потенциалы в равновесных фазах одинаковы.*

Подобно разности температур, которая является мерой отклонения от теплового равновесия тел, разность полных термодинамических потенциалов (а в случае смеси веществ разность химических потенциалов [1])) служит мерой отклонения от состояния термодинамического равновесия.

---

[1]) В связи с тем, что с каждым годом понятие о химических потенциалах применяется в физике и в родственных науках все чаще и шире, поясним, как определяется химический потенциал для смеси веществ. При неизменности термодинамического состояния энергия, энтропия и объем, а стало быть, и полный термодинамический потенциал пропорциональны массе смеси. Если, не нарушая состава и термодинамического состояния смеси веществ, мы в n раз увеличим

Заметим, что термодинамические величины (U, S, F, Φ) принято относить к состоянию вещества в кристаллическом виде при абсолютном нуле; тогда значения указанных величин называют *абсолютными*. Очевидно, что для вычисления абсолютных значений свободной энергии и полного термодинамического потенциала необходимо предварительно вычислить абсолютное значение энтропии.

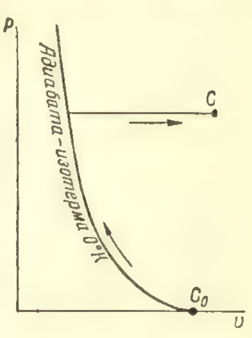


Рис. 212. К вычислению энтропии по закону Нернста.

Как проще всего можно вычислить энтропию? Легче всего может быть измерена теплоемкость тела при постоянном давлении, C_p. Основываясь на законе Нернста, мы покажем сейчас, что для вычисления абсолютных значений энтропии надо измерить, как изменяется величина C_p в зависимости от температуры вплоть до предельно низкой температуры. Пусть заданное состояние тела C (рис. 212), энтропию которого требуется вычислить, характеризуется абсолютной температурой T и давлением p. Представим себе, что мы взяли то же самое тело при $T = 0$ и $p = 0$. В этом (начальном) состоянии C_0 его энтропия $S = 0$. Подвергнем тело равновес-

---

массу каждого из веществ, присутствующих в смеси, то в n раз возрастет и полный термодинамический потенциал. Для такого рода функций, как доказывается в математическом анализе (подобные функции называются однородными), справедливо равенство

$$\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial m_1} m_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial m_2} m_2 + \ldots$$

Понимая здесь под Φ полный термодинамический потенциал смеси ($\Phi = U - TS + pV$) и под m_1, m_2,...— массы ее компонентов, мы имеем в приведенном выражении в качестве коэффициентов перед массами химические потенциалы; иными словами, под химическими потенциалами понимают производные $\frac{\partial\Phi}{\partial m_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial m_2}$, ..., взятые при постоянном давлении, при постоянной температуре и при неизменности масс всех остальных веществ, кроме того, по массе которого берется производная. Химические потенциалы общепринято обозначать греческой буквой μ. Таким образом, полный термодинамический потенциал любой смеси (раствора и т. п.) выражается через химические потенциалы веществ, входящих в состав рассматриваемой системы, формулой

$$\Phi = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \ldots$$

Поскольку масса m_i каждого компонента пропорциональна числу молекул N_i этого компонента, то часто вместо только что рассмотренных удельных химических потенциалов используют корпускулярные химические потенциалы, под которыми понимают производные: $\frac{\partial\Phi}{\partial N_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial N_2}$, ... Очевидно, что при таком определении химических потенциалов

$$\Phi = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \ldots$$

ному адиабатному сжатию до тех пор, пока его давление не достигнет заданного значения p. Согласно закону Нернста *нулевая адиабата совпадает с изотермой абсолютного нуля* (рис. 212), и, следовательно, энтропия и температура тела останутся равными нулю. Теперь начнем нагревать тело, сохраняя давление на него неизменным, и будем так нагревать его до тех пор, пока температура его не достигнет заданного значения T. Когда нагревают тело при постоянном давлении, то, чтобы повысить температуру тела на dT, надо каждый раз сообщать телу теплоту $C_p dT$, при этом энтропия его возрастет на $dS = \frac{C_p dT}{T}$. Сумма (интеграл) этих величин, взятая для всего интервала температур от 0 до T, будет представлять собой абсолютное значение энтропии:

$$S = \int_0^T \frac{C_p dT}{T} \tag{25}$$

(интегрирование производится при постоянном давлении).

Здесь самое важное — то, что для вычисления абсолютного значения энтропии достаточно знать, как теплоемкость тела C_p изменяется в зависимости от температуры, и нет надобности знать, как она зависит от давления (или же от плотности) тела.

§ 106. О так называемой «тепловой смерти» мира

Нередко можно наблюдать, что выводы точных наук, вполне достоверные в той области, для которой эти выводы предназначены, проникая в философию, дают почву для смелых, но неубедительных обобщений. Примером может служить проблема так называемой «тепловой смерти» мира. Этой проблеме было уделено немало внимания и философами и физиками, несмотря на то, что сама постановка этой проблемы в корне ошибочна.

Из термодинамической теоремы о возрастании энтропии изолированной системы (при необратимых процессах) неосмотрительно было сделано заключение, что энтропия мира стремится к некоторому максимуму. Когда этот максимум будет достигнут, дальнейшее возрастание энтропии сделается невозможным, все процессы прекратятся, и мир погрузится в состояние «тепловой смерти». Мы постоянно наблюдаем, что самопроизвольно возникающие процессы всегда протекают в направлении выравнивания температур или часто в направлении выравнивания давлений и других факторов интенсивности. Под состоянием «тепловой смерти» подразумевают такое состояние мира, когда во всех участках мира температура сделается одинаковой и когда распределение других факторов интенсивности окажется таким, что больше не будет уже существовать причин, способных вызвать возникновение каких бы то ни было процессов.

Легко понять, почему идеалисты ухватились за выдумку о «тепловой смерти». Им нетрудно было использовать эту выдумку для религиозной пропаганды. Действительно, если звездному миру предстояло бы когда-то прийти к состоянию «тепловой смерти», то спрашивается, почему же мир не пришел раньше к этому состоянию? На этот вопрос напрашивается ответ, что, следовательно, мир не существовал вечно. Но если мир не существовал вечно, то он когда-то возник, а если он когда-то возник, встает вопрос: кто был его творцом? Так идеалисты изобретают «доказательства» существования бога.

Попытаемся выяснить сущность методологической ошибки, породившей эту ложную проблему «тепловой смерти» мира.

Всегда, когда мы намерены сделать какое-либо обобщение, мы должны прежде всего взвесить, законно ли это обобщение, не перейдем ли мы, идя по пути обобщений, через ту грань, где количество переходит в качество. Пример: теорема о возрастании энтропии верна и для больших и для малых тел, но она теряет смысл, если ее применять к слишком малым крупицам вещества, размеры которых соизмеримы с размерами молекул; для таких крупиц вещества понятие энтропии лишено физического содержания. К таким крупицам нельзя прилагать второе начало термодинамики по той простой причине, что для них стирается различие между понятиями работы и тепла.

Некоторые физические понятия и законы испытывают глубокое качественное изменение, когда мы переходим от макрофизических к микрофизическим явлениям. Недооценка этого качественного изменения одно время привела классическую физику к конфликту с теорией квантов. Нечто аналогичное мы имеем при переходе от макрофизических процессов к процессам космических масштабов (супрафизическим).

Сущность методологической ошибки в постановке вопроса о «тепловой смерти» мира заключается в игнорировании качественного изменения (при распространении термодинамики на мир в целом) всех основных понятий, используемых в теореме о возрастании энтропии: понятий изолированной системы, энтропии, равновесного состояния.

Когда в термодинамике мы говорим об изолированной системе, мы имеем в виду такую совокупность тел, на которую извне не производится механических и тепловых воздействий, но для хода доказательств в термодинамике важно, что при желании такие воздействия на систему могут быть произведены. В термодинамике изолированная система — это «часть», а не «целое». Звездный мир представляет собой нечто целое; это «изолированная система» в философском, а не в термодинамическом смысле, это такая изолированная система, которая по самой своей сути никогда не может ни отдавать, ни получать тепло. Стало быть, к звездному миру в целом никак нельзя применять понятие термодинамической системы, и уже по одному этому на мир в целом нельзя распространять теоремы термодинамики.

Чтобы разобраться в качественном изменении понятий «равновесное состояние» и «энтропия», обратимся к простому, но поучительному сопоставлению. Следуя полету фантазии, вообразим, что из крайнего удаления можно охватить взором весь звездный мир. Вообразим, что издалека мы смотрим на звездный мир как на сгусток вещества, как смотрим на воду в стакане. Мы не могли бы различить отдельные звезды. Звездный мир нам представился бы как некое сплошное супракосмическое тело. Применяя к нему по аналогии понятие равновесного состояния, мы, возможно, решили бы, что звездный мир уже находится в некоем супраравновесном состоянии. Тогда с точки зрения некой «надзвездной термодинамики» звездный мир, несмотря на все богатство его жизни, представился бы уже находящимся как бы в состоянии «тепловой смерти». Так с точки зрения обычной термодинамики равновесное состояние воды, молекулы которой находятся в вечном движении, ложно кажется нам состоянием «тепловой смерти» воды.

Энтропия представляет собой величину, зависящую от термодинамических параметров — температуры, давления, плотности и т. д. Движение тела в целом, его перемещение в пространстве в термодинамике не рассматривается, а если и учитывается, то посредством сочетания выводов термодинамики с законами механики. Во всяком случае в выражение энтропии скорость тела, движущегося как целое, не входит.

Небесные тела реют в мировом пространстве подобно молекулам газа. В жизни звездного мира первенствующее значение имеют распределение небесных тел в пространстве и направление их скоростей. Но как раз эти величины не входят в величину энтропии небесного тела; они не входят также и в сумму энтропий небесных тел.

Вместе с тем очевидно, что для характеристики состояния звездных скоплений важными являются как раз эти величины — скорости движения небесных тел и распределение небесных тел в пространстве. Поэтому, если уж образовывать понятие энтропии мира, то было бы неправильно рассматривать такую величину как сумму энтропий небесных тел. Статистическое понимание термодинамики указывает, что такая величина, как энтропия мира, должна была бы более всего зависеть от «звездной температуры» (т. е. от средней скорости движения небесных тел) и от «звездной плотности» (т. е. от числа звезд в космической единице объема), а не от температуры и плотности звезд. Кроме того, в такой величине — в энтропии мира — должны были бы найти отражение все особенности звездного мира: скопления звезд в обширные системы, подобные той (Галактике), в которую входит наше Солнце; поступательные и вращательные движения этих неимоверно громадных звездных скоплений; факторы, определяющие возникновение новых звездных скоплений, и т. п. Поэтому, если существует такая величина, которая заслуживает названия энтропии мира, то это есть совершенно особая величина, некая с у п р а э н т р о п и я, не имеющая ничего общего с суммарной м а к р о э н т р о п и е й небесных тел, входящих в состав мира, и уже во всяком случае не равная ей.

Термодинамический закон возрастания макроэнтропии небесных тел предуказывает направление процессов, протекающих в недрах и на поверхности небесных тел. Но этот закон ничего не может нам сказать о судьбе мира в целом. Для хода супракосмических процессов, в которые вовлечены миллиарды звезд, совершенно не существенно, где и когда какая-либо звезда погаснет и где возникает новая звезда.

Из всего сказанного ясно, что нельзя наивно делать выводы из термодинамики вне пределов ее применимости.

Современная наука со всей решительностью отвергает выдумки о возможности «тепловой смерти» мира. Все приобретенные человечеством знания указывают, что мир бесконечен, что развитие его происходило вечно и будет вечно продолжаться.

§ 107. Уравнения Гиббса — Гельмгольца и Клапейрона — Клаузиуса

Важной задачей термодинамики является изучение процессов *качественного изменения вещества*: перехода тела из одного агрегатного состояния в другое, химических реакций, растворения веществ и т. д. В этих случаях изотермическая теплота представляет собой скрытую теплоту качественного превращения вещества: скрытую теплоту испарения, скрытую теплоту плавления, скрытую теплоту растворения и т. д. Мы будем считать, что она отнесена к 1 молю вещества.

Пусть $v_ж$ есть объем 1 моля жидкости при температуре T и при давлении p и $v_{пар}$ есть объем 1 моля насыщенного пара при той же температуре и при том же давлении. Процесс кипения протекает при неизменной температуре и при неизменном давлении. Это есть, следовательно, процесс *изотермический и в то же время изобарный*. Производимая при этом системой работа равна произведению давления на приращение объема:

$$A = p(v_{пар} - v_ж).$$

Скрытая теплота испарения (теплота парообразования), теплота плавления и т. д. — каждое из этих количеств тепла идет на при-

ращение внутренней энергии и на производство работы расширения:

$$r = (U_{\text{пар}} - U_{\text{ж}}) + p(v_{\text{пар}} - v_{\text{ж}}). \tag{26}$$

Для удобства вычислений часто объединяют внутреннюю энергию с произведением pv и сумму этих величин называют условно *теплосодержанием* (некоторые авторы называют эту величину *энтальпией*). Часто теплосодержание обозначают буквой I:

$$I = U + pv.$$

Теплота парообразования представляет собой разность теплосодержаний насыщенного пара и жидкости:

$$r = I_{\text{пар}} - I_{\text{ж}}. \tag{27}$$

Аналогичное равенство справедливо также и для теплоты плавления и для теплоты, фактически выделяемой при химической реакции, например при горении, если реакция эта происходит под неизменным давлением.

Кипение и плавление протекают не только изобарно, но вместе с тем изотермически. Поэтому скрытая теплота парообразования и плавления может быть вычислена также по формуле (22):

$$r = T(S_{\text{пар}} - S_{\text{ж}}).$$

Мы выведем сейчас уравнение, которое по величине скрытой теплоты изотермического процесса r позволяет предугадывать, как будет изменяться изотермическая работа $A_{T=\text{const}}$, если изотермический процесс проводить при более высокой или более низкой температуре.

Рис. 213. Схема к выводу уравнения Гиббса — Гельмгольца. К. п. д. этого цикла $= \frac{dA}{r} = \frac{dT}{T}$.

Представим себе, что некоторое тело при абсолютной температуре T испытывает изотермический процесс и, выполняя при этом работу $A_{T=\text{const}}$, переходит из состояния C_1 в C_2 (рис. 213; по осям координат на этом рисунке отложены факторы интенсивности и экстенсивности работы H и h, в частном случае — это давление и объем). Проведем через указанные два крайних состояния C_1 и C_2 ординаты и наряду с изотермическим процессом $C_1 \to C_2$ рассмотрим аналогичный изотермический процесс между теми же ординатами, но при температуре немного более низкой, $T - dT$. В этом случае тело переходит из состояния C_1' в C_2' и производит работу, которую можно обозначить через $A_{T=\text{const}} - d(A_{T=\text{const}})$.

Если бы мы заставили рассматриваемое тело выполнить цикл $C_1 \to C_2 \to C'_2 \to C'_1 \to C_1$, то к. п. д. этого элементарного цикла [1]) был бы равен отношению разности температур dT к абсолютной температуре T. Произведенная при этом цикле работа была бы равна $d(A_{T=\text{const}})$, а теплота, отданная нагревателем, представляла бы собой скрытую теплоту изотермического процесса $C_1 \to C_2$, равную r. К. п. д. цикла есть отношение работы цикла, в данном случае $d(A_{T=\text{const}})$, к теплоте, отданной нагревателем, в данном случае к r. Следовательно,

$$\frac{d(A_{T=\text{const}})}{r} = \frac{dT}{T}. \tag{28}$$

Это и есть *уравнение Гиббса — Гельмгольца*, показывающее, что когда осуществление изотермического процесса требует з а т р а т ы тепла ($r > 0$), то изотермическая работа $A_{T=\text{const}}$ возрастает при повышении температуры. Если же осуществление рассматриваемого изотермического процесса сопровождается о т д а ч е й тепла ($r < 0$), то изотермическая работа $A_{T=\text{const}}$ убывает при повышении температуры.

Уравнение Гиббса — Гельмгольца обычно пишут в несколько ином виде. Вспомним, что при любом процессе, в частности и при изотермическом, теплота, сообщенная телу, идет на приращение внутренней энергии и на производство работы: $r = (U_2 - U_1) + A_{T=\text{const}}$. Если вместо п р и р а щ е н и я внутренней энергии $(U_2 - U_1)$ мы хотим рассматривать у б ы л ь внутренней энергии $(U_1 - U_2)$, то сказанное надо перефразировать так: работа производится за счет внутренней энергии и сверх того другая часть работы, равная $A - (U_1 - U_2)$, производится за счет сообщенного телу тепла: $r = A - (U_1 - U_2)$.

Перепишем уравнение Гиббса — Гельмгольца так, чтобы в левой части равенства стояла скрытая теплота изотермического процесса r, и заменим r разностью произведенной телом работы и убыли внутренней энергии. Тогда получим:

$$A_{T=\text{const}} - (U_1 - U_2) = T\,\frac{d(A_{T=\text{const}})}{dT}. \tag{29}$$

Из этого часто применяемого начертания уравнения Гиббса — Гельмгольца мы видим, что изотермическая работа может быть больше или меньше, чем убыль внутренней энергии, в зависимости от знака производной, стоящей в правой части равенства. Следует помнить, что по смыслу вывода величина $d(A_{T=\text{const}})$ в указанной производной означает алгебраическое увеличение изотермической работы, вызываемое только повышением температуры на dT, но не какими-либо иными причинами. Величина $A_{T=\text{const}}$

---

[1]) Указанный элементарно малый цикл отличается от цикла Карно на величины бесконечно малые второго порядка.

зависит от начального и конечного объемов системы (и других факторов экстенсивности работы), поэтому, сопоставляя изотермические процессы при температуре $T + dT$ и при температуре T, нужно в обоих случаях исходить из *одинаковых начальных объемов* (*и других факторов экстенсивности работы*) и приводить систему *к одинаковым конечным объемам* (*и другим факторам экстенсивности работы*, например площади поверхности, если рассматривается работа поверхностного натяжения, перенесенного заряда, если рассматривается работа электрохимических сил, и т.п.).

Вспомним, что изотермическая работа производится за счет свободной энергии: $A_{T=\mathrm{const}} = F_1 - F_2$. Подставив в уравнение Гиббса — Гельмгольца вместо $A_{T=\mathrm{const}}$ убыль свободной энергии, получим третье, тоже часто применяемое начертание этого важнейшего уравнения термодинамики:

$$(F_1 - F_2) = (U_1 - U_2) + T\frac{d(F_1 - F_2)}{dT}. \tag{30}$$

Применим уравнение Гиббса—Гельмгольца к процессам кипения и плавления. Для этого напишем это уравнение (16) в такой форме:

$$r = T\frac{d(A_{T=\mathrm{const}})}{dT}.$$

В данном случае изотермическая работа $A_{T=\mathrm{const}}$ представляет собой в то же время работу изобарного расширения от объема, который занят 1 молем жидкости, до объема 1 моля пара. Температура кипения зависит от давления: увеличение давления на dp влечет за собой повышение температуры кипения на dT. При этом работа расширения возрастает на величину $d(A_{T=\mathrm{const}}) = (v_{\text{пар}} - v_{\text{ж}})dp$.

Подставляя это выражение для $d(A_{T=\mathrm{const}})$ в уравнение Гиббса—Гельмгольца, получим:

$$r = (v_{\text{пар}} - v_{\text{ж}})\,T\frac{dp}{dT}. \tag{31}$$

Это уравнение носит название *уравнения Клапейрона — Клаузиуса*. Посредством этого уравнения можно вычислить теплоту парообразования. Для этого надо знать зависимость давления насыщенного пара от температуры или, что то же, зависимость точки кипения от давления. На практике так и поступают: измеряют при разных температурах давление насыщенного пара. Отсюда определяют значения производной $\frac{dp}{dT}$ для различных температур и посредством уравнения Клапейрона — Клаузиуса находят, как велика для различных температур кипения скрытая теплота парообразования r. Зная r как функцию температуры, по формулам предыдущих параграфов [формулы (22) и (27)] можно вычислить энтропию и теплосодержание насыщенного пара для всевозможных температур кипения.

Составленные таким путем таблицы величин r, S и I для воды, углекислоты, аммиака и других жидкостей имеют широкое применение в теплотехнике.

Уравнение Клапейрона — Клаузиуса по смыслу вывода применимо не только к процессу кипения жидкости, но также и к плавлению, растворению, к изотермической реакции и т. д. Понятно, что в этих случаях в правой части уравнения вместо разности $(v_{пар} - v_ж)$ будет иметься соответствующая разность конечного и начального объемов системы; p и T будут означать давление и температуру равновесия, например равновесия твердого тела и его расплава, если r означает скрытую теплоту плавления.

Во многих случаях уравнение Клапейрона — Клаузиуса может быть упрощено. Так, например, при вычислении скрытой теплоты испарения мало летучих жидкостей, при вычислении теплоты сублимации (испарения) твердого тела, при вычислении теплоты растворения плохо растворимых веществ и вообще во всех тех случаях, когда плотность газообразной фазы весьма мала, можно принять следующие упрощения: во-первых, можно пренебречь величиной мольного объема конденсированной фазы в сравнении с величиной мольного объема пара; на этом основании в правой части уравнения вместо разности объемов пишут просто объем пара; во-вторых, можно считать, что мольный объем насыщенного пара в указанных случаях определяется газовым уравнением $v_{пар} = \frac{RT}{p}$. Замечая, что $\frac{dp}{p} = d\ln p$, получаем нижеследующую широко применяемую в физической химии упрощенную (приближенную) формулу уравнения Клапейрона — Клаузиуса:

$$r \approx RT^2 \frac{d\ln p}{dT}. \tag{32}$$

Эта приближенная формула удобна в том отношении, что для пользования ею нет надобности знать мольный объем насыщенного пара.

Для характеристики областей применения термодинамических формул следует отметить, что в XIX в. главной задачей термодинамики была разработка *теории тепловых машин*, которая служила основой для проектирования поршневых паровых машин, двигателей внутреннего сгорания, паровых турбин, холодильных машин и т. д. и которая указывала научно обоснованные пути усовершенствования этих машин. В связи с этим основным методом был метод круговых процессов, а главным содержанием термодинамики было: 1) исследование различных циклов с точки зрения их коэффициента полезного действия, 2) изучение свойств газов и паров, 3) построение термодинамических диаграмм, важных для практических расчетов в области теплотехники, и 4) исследование течения и истечения паров в связи с процессами в паровых турбинах.

В целом вся эта первая линия развития термодинамики представляет собой так называемую *техническую термодинамику*.

К концу XIX и в особенности в XX в. цели термодинамики существенно расширились, и предметом изучения сделались новые объекты.

Характерными для термодинамики XX в. предметами исследования являются: 1) термодинамические свойства жидкостей и твердых тел, 2) фазовые равновесия и фазовые превращения, 3) термодинамическое исследование электрических и в особенности электрохимических явлений, 4) химические реакции. Эти линии развития термодинамики обычно объединяют под названием *химической термодинамики*. Создателями *химической термодинамики* были в одной ветви — Гиббс и в другой — Вант-Гофф. Хотя классические труды Гиббса появились в печати в 1873—1878 гг., но по содержанию, по стилю, а главное по влиянию, которое они оказали на других авторов, они целиком относятся к термодинамике XX в.

К двум началам термодинамики Нернст (в 1906—1911 гг.) присоединил третий закон, играющий фундаментальную роль в химических приложениях термодинамики. Благодаря закону Нернста задача вычисления энтропии практически сведена к определению температурного изменения теплоемкости. По этой причине «проблема теплоемкости» заняла в современной физике выдающееся место.

В современной химической термодинамике видное место занимает созданная Льюисом *теория активности*. Льюис ввел в термодинамику две новые величины, подлежащие экспериментальному и теоретическому изучению, а именно две такие величины f и a, которые, будучи употребляемы вместо давления p и плотности $\frac{1}{v}$ (где v — удельный объем), позволяют обобщить формулы термодинамики идеальных газов на любые реальные системы.

Упомянутые две величины, которым Льюис присвоил название *летучести* (f) и *активности* (a), были выбраны так, чтобы обобщение газовых формул на реальные тела могло быть произведено без существенного изменения начертания формул. Летучесть f имеет смысл эффективного давления, активность a имеет смысл эффективной плотности $\frac{1}{v}$ или эффективной концентрации. Под *коэффициентом активности* понимают величину, на которую надо умножить плотность или концентрацию, чтобы получить активность, или на которую надо умножить давление, чтобы получить летучесть.

Особой областью современной термодинамики является *термодинамика лучистой энергии*. В начале нашего века развитие термодинамики лучистой энергии привело Планка к созданию теории квантов. С 1913 г. теория квантов была положена Нильсом Бором в основу современного учения о строении атомов. В 20-х годах на базе теории квантов Шредингером и Гейзенбергом была создана механика элементарных и малых частиц — квантовая механика.

Принципиально новый взгляд на распределение энергии по степеням свободы, установленный теорией квантов, привел к коренному пересмотру молекулярно-кинетического понимания (вернее, основанных на этом понимании методов вычисления) многих термодинамических величин: внутренней энергии, теплоемкости, энтропии и др. В связи с этим в последние десятилетия большое значение и развитие получили *квантовостатистические методы в термодинамике*, которые сблизили прогресс термодинамики с прогрессом квантовой оптики, дающей нам сведения о строении атомов и молекул и об изменениях, которые испытывают атомы и молекулы при повышении интенсивности теплового движения.

ГЛАВА XVII

ФИЗИКА РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ И ПАРОВ. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВАЛЬСА

§ 108. Пары насыщенные и перегретые. Диаграмма Эндрюса

Самое существенное отличие реальных газов от воображаемого идеального газа заключается в том, что каждый реальный газ представляет собой перегретый пар, т. е., иначе говоря, каждый реальный газ при соответствующем понижении температуры *конденсируется* — обращается в жидкость или в кристалл. Рассмотрим процесс парообразования.

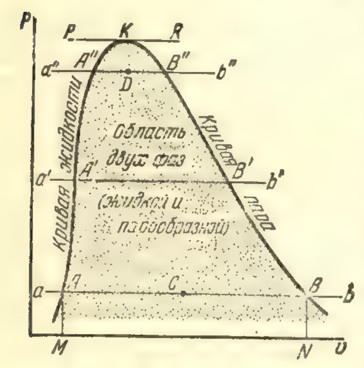


Рис. 214. К анализу процесса парообразования.

Пусть мы имеем 1 *кг* чистой, не содержащей воздуха воды, налитой на дно обширного цилиндра (сделанного из вещества, хорошо проводящего теплоту) и прикрытой плотно прилегающим к воде поршнем. Пусть первоначально температура воды равняется 0° С, а давление 1 *ат*. В дальнейшем давление мы сохраним неизменным, так что процесс, рассматриваемый нами, будет *изобарным*, т. е. протекающим при постоянном давлении. На рис. 214, где по оси абсцисс отложены объемы, а по оси ординат — давления, начальное состояние рассматриваемого килограмма воды изображено точкой a.

Будем сообщать воде теплоту; температура воды будет повышаться; объем ее сначала немного уменьшится, потом станет увеличиваться, так что точка, изображающая состояние воды, переместится по «изобаре» (следовательно, по горизонтали) вправо. В конце концов температура воды повысится до 100° С; в этот момент объем взятого количества воды будет примерно на 4% больше первоначального объема. Это состояние воды условно[1]) изображено точкой A (теплота, поглощенная водой в рассматриваемом процессе, равна приблизительно $q = 100$ *ккал*).

---

[1]) Условность заключается здесь в том, что на рисунке не выдержан масштаб.

Сообщим воде новые количества теплоты; вода будет превращаться в пар; объем, занятый водой и паром, будет быстро расти. Пар в собственном смысле есть газ; но в цилиндре над водой будет находиться смесь газообразной воды с увлеченными при парообразовании мельчайшими капельками жидкой воды (такую смесь в технике называют *влажным паром*, или «мокрым паром», в отличие от *сухого пара*, не содержащего водяных капелек). Одно из подобных состояний представлено на диаграмме точкой C. По мере обращения в пар все большего процента жидкости объем системы будет продолжать расти, и точка C будет передвигаться вправо. При этом температура системы будет оставаться равной 100°.

Наконец, наступит момент, когда испарится вся жидкость до последней капли. В этот момент мы будем иметь в цилиндре *сухой насыщенный пар*, температура его все еще 100° С. Состояние системы будет теперь изображено точкой B (эта точка B называется *точкой конденсации пара*, или *точкой насыщенного пара*, точка же A — *точкой кипения жидкости*).

Важно заметить, что процесс парообразования является не только изобарным, но и изотермическим: все время, пока в цилиндре имеются две фазы одного и того же вещества — жидкая и парообразная, температура обеих фаз остается постоянной и равной «температуре перехода» из одной фазы в другую; в самом деле, при давлении $p = 1$ *ат* и при температуре $t = 100°$ С может и вода испаряться (если ей сообщать тепло), может и пар конденсироваться в жидкость (если от него отнимать теплоту).

Количество тепла, сообщаемое 1 *кг* жидкости в процессе парообразования, называют удельной *скрытой теплотой парообразования* и обозначают буквой r. При $t = 100°$ С (для воды) r равно 539 *ккал*. Из этого количества 41 *ккал* затрачивается на внешнюю работу, связанную с расширением системы, остальные же 498 *ккал* составляют приращение внутренней энергии 1 *кг* сухого насыщенного пара при 100° С по сравнению с жидкой водой.

Часть скрытой теплоты парообразования, идущую на увеличение внутренней энергии системы, называют *внутренней* скрытой теплотой парообразования и обозначают буквой ρ; часть, идущую на внешнюю работу, называют *внешней* скрытой теплотой парообразования; она эквивалентна работе расширения $p\,(v_2 - v_1)$, где p — давление насыщенного пара, а v_2 и v_1 — объем 1 *кг* пара и 1 *кг* жидкости.

Продолжим изобарный процесс еще дальше, подводя к системе новые количества тепла. При этом пар сразу перестает быть насыщенным — температура его повышается, он становится *перегретым* (или «ненасыщенным», участок Bb)[1]).

[1]) В противоположность приведенному в тексте совершенно общепринятому пониманию термина «перегретый» пар в некоторых книгах встречается определение «перегрева» как якобы таких состояний, когда никаким изотермическим сжатием

Мы проследили процесс парообразования при давлении $p = 1$ *ат*. Но подобным же образом протекал бы этот процесс и при другом давлении, меньшем или большем, чем 1 *ат*. На рис. 214 показаны еще две изобары, соответствующие более высоким давлениям.

Рассматривая эти изобары, мы сразу замечаем следующие изменения в ходе процесса в зависимости от величины давления p (рис. 213):

1. Чем выше расположена изобара, тем больше абсцисса точки кипения жидкости (A', A'' и т. д.). Это значит, что чем больше давление на систему, тем более расширяется жидкость, прежде чем она начинает кипеть. Причина этого понятна: ведь, чтобы жидкость стала кипеть под увеличенным давлением, необходимо нагреть ее до более высокой температуры кипения и поэтому она больше расширяется.

2. Чем выше лежит изобара, тем меньшую абсциссу имеет точка насыщенного пара (B, B', B''). Это значит, что 1 *кг* насыщенного пара при повышающемся давлении (а следовательно, и при повышающейся температуре) занимает все меньший объем (другими словами, плотность его увеличивается).

Из сказанного видно, что по мере повышения давления (и температуры) точка кипения жидкости и точка насыщенного пара сближаются и изотерма-изобара (AB, $A'B'$, $A''B''$, ...) делается все короче. Опыт показывает, что при повышении давления и температуры в конце концов эти точки сливаются между собой; такое слияние происходит в так называемой критической точке K. Температуру вещества в критической точке называют *критической температурой*, а соответствующие этой точке давление и объем называют *критическим давлением* и *критическим объемом*. Каждое вещество имеет свои особые значения критических величин: для воды критическая температура равна 374,2° С, критическое давление равно 225,7 *ат*, критический объем 3,20 *см*^{3}/*г*.

В критической точке исчезает различие между жидким и парообразным состоянием вещества.

Все точки кипения жидкости A, A', A'' и т. д. до точки K включительно определяют собой некоторую кривую, которую называют *граничной кривой жидкости*. Точно так же все точки насыщенного пара B, B', B'' и т. д. определяют *граничную кривую пара*. В области, отграниченной этими кривыми (например, в точках C, D и т. д.), мы имеем смесь двух фаз — жидкой и парообразной. Налево от указанной области вещество находится в жидком состоянии, направо — в парообразном состоянии.

не может быть осуществлена конденсация (т. е. состояний с температурой выше критической). Не повезло и термину «насыщенный» пар, вместо которого иногда можно встретить применение эпитета «насыщающий», как это было принято в прошлом столетии.

Переход жидкости в пар (или обратно), сопровождающийся резким изменением объема и поглощением или выделением тепла, может иметь место только в области между граничными кривыми. Но в ы ш е граничной кривой мы можем вообразить процесс, начинающийся при малом объеме и заканчивающийся при большом объеме,— начинающийся в области жидкого состояния и заканчивающийся в области газообразного состояния. Ясно, что в течение этого процесса мы нигде не сталкиваемся с резким переходом жидкости в газ; отсюда следует, что здесь этот переход совершается *непрерывно*.

Непрерывность жидкого и газообразного состояний была установлена на опыте английским физиком Эндрюсом в 1866 г.; в подобном процессе вещество проходит через такие состояния, в которых его нельзя назвать ни жидким, ни газообразным.

В области равновесия жидкости и пара изотермы представляют собой отрезки изобар. На рис. 215 показано, какой вид имеют эти изотермы в области перегретого пара (или реального газа) и в области жидкого состояния. В области перегретого пара они походят на гиперболические изотермы идеального газа; изотермы жидкости поднимаются почти вертикально (потому что для незначительного уменьшения объема жидкости требуется весьма значительное увеличение давления). На рис. 215 показаны также две изотермы, соответствующие температурам выше критической, и изотерма, проходящая через критическую точку (для этой изотермы критическая точка K является точкой перегиба).

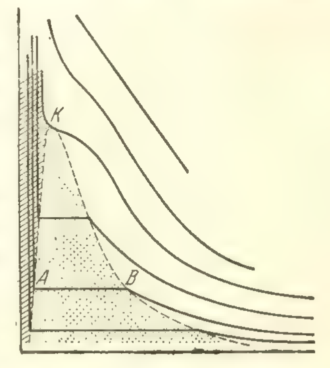


Рис. 215. Действительный ход изотерм (диаграмма Эндрюса).

Рассмотренная нами диаграмма Эндрюса, изображающая изотермы жидкости, пара и их смеси по экспериментальным данным, была объяснена на основе молекулярно-кинетических представлений в 1873 г. Ван-дер-Вальсом (об этом рассказано в § 110; диаграмма Эндрюса там сопоставлена с теоретической диаграммой Ван-дер-Вальса, рис. 219).

Существование критической температуры было впервые предсказано в 1860 г. Д. И. Менделеевым. Исследуя изменение поверхностного натяжения жидкости в зависимости от температуры, Менделеев пришел к выводу, что должна существовать такая температура, при которой для данной жидкости поверхностное натяжение равно нулю и, таким образом, исчезают мениск жидкости и различие между жидкостью и ее насыщенным паром. Эта температура, названная Менделеевым «абсолютной точкой кипения», и представляет собой

не что иное, как критическую температуру. Идеи Менделеева несколько лет спустя были полностью подтверждены опытами Эндрюса.

Первые наиболее обширные и систематические исследования критических параметров ряда веществ были проведены Михаилом Петровичем Авенариусом и его учениками в физической лаборатории Киевского университета в 1873—1895 гг.

Свойства вещества в критическом состоянии были также всесторонне исследованы выдающимся русским физиком, профессором Московского университета Александром Григорьевичем Столетовым. Столетов разобрал и обобщил большое число теоретических высказываний и опытных данных, отделив достоверное от сомнительного, и внес полную ясность в вопрос о критическом состоянии, утвердив выводы Эндрюса и Ван-дер-Вальса.

В недавнее время (в 1947—1950 гг.) понимание критического состояния вещества было уточнено и расширено профессором Московского университета В. К. Семенченко, который обратил внимание, в частности, на то, что температура критического состояния, когда свойства жидкости и газа становятся одинаковыми, может в действительности не вполне совпадать с температурой исчезновения видимой границы между жидкостью и ее паром, но может оказаться несколько выше ее. Поэтому вблизи критической температуры, после исчезновения мениска, но раньше, чем достигается тождество жидкости и ее пара, возникает своеобразная дисперсная смесь жидкости и газа. Это сказывается в помутнении вещества, в опалесценции — в явлениях, описанных еще Авенариусом, Надеждиным и др.

Для критического состояния является характерным аномально высокое значение теплоемкости и коэффициента теплового расширения.

Превращения — жидкости в пар, твердого тела в жидкость и т. п.— называют *фазовыми переходами первого рода.* Эти превращения характеризуются изменением объема и изменением энергии — теплотой превращения.

Превращения, при которых не наблюдается ни изменения объема, ни изменения энергии, но вместе с тем имеются качественные изменения скрытого характера, что сказывается, например, в резком возрастании теплоемкости вблизи точки перехода, называют *переходами второго рода.* В. К. Семенченко рассматривает переход жидкости в газ в критической точке как фазовый переход второго рода и вскрывает аналогию критического состояния с рядом других случаев фазовых переходов второго рода (для смесей жидкостей, для превращений в кристаллах).

Диаграмма Эндрюса показывает, что каждой температуре равновесия жидкости и пара соответствует определенное давление, которое тем более велико, чем выше температура, и тем более мало́, чем температура ниже. Иначе говоря, для насыщенного пара давление и температура увеличиваются или убывают совместно. Кривая,

выражающая зависимость давления насыщенного пара от его температуры (рис. 216), имеет довольно характерный вид: в критической точке она обрывается. Найдено, что выше 1—2 *ат* вплоть до критической точки давление и температура насыщенного пара многих веществ связаны формулой

$$p = (a + bt)^4, \qquad (1)$$

где a и b — постоянные.

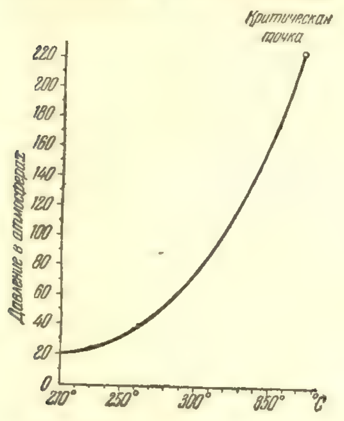


Рис. 216. Давление насыщенного пара воды как функция температуры.

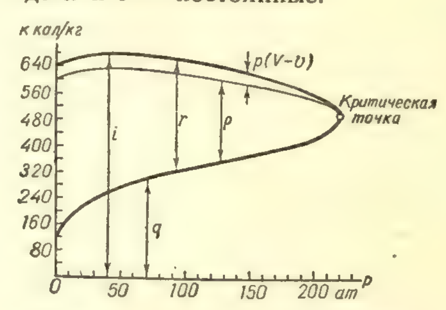


Рис. 217. Зависимость скрытой теплоты испарения воды от давления.

Для воды эта формула требует некоторых изменений, тем не менее и здесь в некоторых пределах оправдывается (хотя и грубо) соотношение

$$p \approx \left(\frac{t}{100}\right)^4.$$

В помещенной ниже таблице для разных температур указаны: давление насыщенного пара воды, удельные объемы жидкости и пара [1]) и теплóты парообразования воды r.

На рис. 217 показана зависимость теплоты парообразования воды (полной r и внутренней ρ) от давления; ординаты нижней кривой на этом рисунке определяют теплоту жидкости q, а ординаты верхней

---

[1]) Заметим, что массу водяного пара в единице объема называют *абсолютной влажностью*. Числа в пятом столбце таблицы указывают абсолютную влажность при насыщении в $кг/м^3$. Чаще абсолютную влажность выражают в $г/м^3$.

В метеорологии и в технике часто пользуются понятием *относительной влажности*. Под относительной влажностью подразумевают процентное отношение количества водяного пара, находящегося в воздухе, к количеству водяного пара, насыщающего пространство при той же температуре. Так, если при 0° С в 1 $м^3$ воздуха содержится 2,5 $г$ водяного пара, то относительная влажность будет 50% (как видно из приведенной выше таблицы, указанная плотность пара составляет $^1/_2$ плотности насыщенного пара при 0° С).

Иногда влажность воздуха характеризуют, указывая *точку росы*. Точкой росы называют ту температуру, при которой имеющийся в воздухе водяной пар при своей неизменной плотности становится вследствие охлаждения воздуха

Вода и ее насыщенный пар от 0 до 374°

Температура парообразования t°C	Давление p в $кГ/см^2$	Объем 1 *кг* жидкости в *л*	Объем 1 *кг* пара в $м^3$	Масса пара в 1 $м^3$ в *кг*	Теплота жидкости q в *ккал/кг*	Теплота парообразования r в *ккал/кг*
0	0,006	1,000	206,3	0,005	0	597,2
25	0,032	1,003	43,41	0,023	25,02	583,2
50	0,126	1,012	12,05	0,083	49,95	569,0
75	0,393	1,026	4,14	0,242	74,94	554,4
100	1,033	1,044	1,67	0,600	100,04	538,9
125	2,367	1,065	0,77	1,300	125,3	522,4
150	4,854	1,090	0,39	2,548	150,9	504,6
175	9,101	1,121	0,22	3,617	176,9	485,2
200	15,857	1,157	0,13	7,857	203,5	463,5
225	20,007	1,199	0,08	12,75	230,8	438,7
250	40,56	1,251	0,05	19,98	259,2	409,8
275	60,66	1,317	0,03	30,57	289,2	375,6
300	87,61	1,404	0,02	46,24	321,0	335,1
325	122,95	1,529	0,01	70,68	356,5	283,9
350	168,63	1,747	0,008	113,6	398,6	213,0
374	225,2	2,79	0,003	274	488	35

кривой определяют сумму $q + r$, которую называют *теплосодержанием пара.*

Теплота парообразования r, отнесенная к абсолютной температуре равновесия жидкости и пара T, равна приращению энтропии, т. е. разности удельных энтропий жидкости и ее насыщенного пара:

$$\frac{r}{T} = S_{пар} - S_ж .$$

Иначе говоря, теплота парообразования равна приращению связанной энергии (§ 107):

$$r = TS_{пар} - TS_ж . \qquad (2)$$

насыщенным паром. Для приведенного выше примера, когда при 0° С относительная влажность равна 50%, точкой росы является температура приблизительно —9° С.

Точку росы определяют посредством *гигрометра.* Это прибор, в котором главную роль играет отполированная металлическая поверхность, температура которой измеряется и которая легко может быть охлаждаема. О начале конденсации водяных паров судят по запотеванию этой поверхности. Чаще, однако, для измерения влажности воздуха применяют другой вид приборов — *психрометры*, которые представляют собой сочетание двух термометров: сухого и смоченного. Из теоретических соображений рядом физиков была выведена формула, позволяющая вычислять относительную влажность воздуха по разности температур сухого и смоченного термометров. На основе этой формулы и дополнительных опытов составляют «психрометрические таблицы», которыми и пользуются для определения относительной влажности по показаниям психрометра.

С другой стороны, теплота парообразования по уравнению первого начала равна сумме приращения внутренней энергии и работы изобарного расширения от объема жидкости до объема пара:

$$r = U_{\text{пар}} - U_{\text{ж}} + p(v_{\text{пар}} - v_{\text{ж}}). \qquad (3)$$

Приравнивая правые части двух полученных выражений для r (2) и (3), находим:

$$U_{\text{пар}} - TS_{\text{пар}} + pv_{\text{пар}} = U_{\text{ж}} - TS_{\text{ж}} + pv_{\text{ж}}.$$

Это уравнение означает, что *при термодинамическом равновесии жидкости и ее насыщенного пара полные термодинамические потенциалы для единицы массы вещества в обеих фазах равны*[1]).

§ 109. Конденсация газов

Всякий газ представляет собой перегретый пар некоторой жидкости, а потому может быть обращен в жидкое (а также и в твердое) состояние.

Для возможности сжижения какого-нибудь (химически индивидуального) газа необходимо, чтобы его температура сделалась ниже критической. Если она лишь немного ниже критической, то для сжижения газа придется его подвергнуть давлению, которое будет лишь немногим ниже критического; с понижением температуры газа понижается и требуемое давление, что понятно из рис. 214 и 215.

В таблице на стр. 442 указаны критические температуры и давления различных веществ, расположенных в порядке повышающихся критических температур.

Из таблицы видно, например, что, применяя давления в несколько десятков атмосфер, можно обратить в жидкость углекислоту уже при обыкновенной температуре; чтобы обратить в жидкое состояние этилен, необходимо охладить его ниже 10° С, но для обращения кислорода в жидкость требуется холод ниже —118,8° С, а в случае водорода — ниже —240° С.

Если, с одной стороны, средством сжижения газов является низкая температура, то, с другой стороны, газ, сгущенный в жидкость и твердое тело, сам служит источником еще более низкой температуры. Так, чтобы аммиак сгустить в жидкость при комнатной температуре, его нужно подвергнуть давлению в 7—8 *ат*, если же уменьшить давление над жидким аммиаком до 1 *ат* (например, поместив его на открытом воздухе), то он закипит (подобно воде, помещенной под колоколом воздушного насоса) и температура его

---

[1]) Аналогично доказывается равенство полных термодинамических потенциалов, отнесенных к единице массы, для любых других случаев термодинамического равновесия, например равновесия твердого тела и его расплава или равновесия твердого тела и его насыщенного пара.

Параметры критического состояния

Вещество	Критическая температура		Критическое давление в *ат*	Критический объем в *см³/моль*
	°C	°K		
Гелий	—267,9	5,2	2,26	58
Водород	—239,9	33,2	12,8	65
Азот	—147,1	126,0	33,5	90
Окись углерода	—140,2	133,0	34,5	93
Аргон	—122,4	150,7	48,0	75,5
Кислород	—118,8	154,3	49,7	74,3
Метан	— 82,5	190,7	45,7	95
Этилен	+ 9,5	282,6	50,9	130
Углекислый газ	31,0	304,2	72,9	96
Этан	32,1	305,2	48,8	137
Ацетилен	35,8	309,0	61,7	113
Аммиак	132,4	405,5	111,5	72,4
Хлор	144	417,1	76	124
Сернистый ангидрид	157,2	430,3	77,7	123
Гексан	234,0	507,1	25,9	367
Бензол	278,5	561,6	47,7	256
Октан	296,3	569,3	24,6	490
Вода	374,2	647,3	218,2	57,6

понизится примерно до —33°. Вообще, *если внезапно понизить давление над жидкостью*, в которую превращен газ, то *температура жидкости вследствие затраты тепла на парообразование резко понижается*. Используя это явление, швейцарский физик Пикте в 1877 г. разработал простейший способ сжижения газов, причем для достижения более и более низких температур он пользовался газами, легче сжимаемыми, в качестве источников холода, позволяющих сгустить газы, труднее сжимаемые (*метод Пикте*).

Другой метод сжижения газов (*метод Линде*) был разработан в конце XIX в. английским физико-химиком Дьюаром и независимо от него и с еще бо́льшим успехом немецким инженером Линде; они применили для сжижения газов явление Джоуля — Томсона.

Это явление (упомянутое в § 87) состоит в следующем: если теплоизолированный газ переходит от высшего давления к низшему, то происходящее при этом расширение вообще сопровождается изменением температуры газа. При высоких температурах расширяющийся газ нагревается, *при низких температурах расширяющийся газ охлаждается*. Температура, пограничная между той и другой областью, называется *температурой инверсии*[1]). Температура инверсии составляет для воздуха + 248° C, для азота + 233° C, для

[1]) Латинское inversio — переворачивание.

водорода —80° С, если газ от давления 100 *ат* расширяется к давлению 1 *ат*.

Получаемое путем расширения падение температуры может быть весьма значительно. Так, если воздух при —100° С и 136 *ат* давления расширяется до 1 *ат*, то температура его понижается на 93°, что достаточно для обращения его в жидкое состояние (жидкий воздух под давлением 1 *ат* имеет температуру —190° С).

Сжижение газов в свое время вызвало сенсацию и возбудило всеобщий интерес. В статье, предназначенной для самого широкого круга читателей, проф. А. Г. Столетов в 1878 г. писал: «Истекший год начался поразительным завоеванием в области физических наук: на земле впервые увидели твердый водород. Этот легчайший из газов, всех упорнее сопротивлявшийся сжижению, потек жидкой струей, посыпался, как дробь. Незадолго перед тем удалось сгустить и заморозить кислород и азот, составные части воздуха». Эти успехи в конденсации газов были достигнуты применением первого из описанных выше методов — метода Пикте. Начальное охлаждение обычно получали интенсивным испарением сернистого ангидрида, охлаждавшего змеевик, по которому под большим давлением пропускалась углекислота. Испарение углекислоты в другом сосуде аналогично вызывало охлаждение трубы со сжатым кислородом.

Непосредственно применить способ Дьюара — Линде к сжижению водорода невозможно, потому что температура инверсии этого газа слишком низка (—80° С); но если водород предварительно охлажден жидким воздухом ниже указанной температуры, то конденсация его процессом Линде не представляет уже особых затруднений.

Наиболее трудной задачей из области конденсации газов было обращение гелия в жидкое и твердое состояние. Жидкий гелий был получен в 1908 г. голландским физиком Камерлинг-Оннесом, который организовал при Лейденском университете (около 1890 г.) лабораторию, специально предназначенную для осуществления низких температур. Оннес воспользовался комбинацией методов Пикте и Линде.

Для гелия температура инверсии равна —258° С. Кипя под атмосферным давлением, он имеет температуру —269° С (т. е. с небольшим 4°, считая от абсолютного нуля). Испаряя жидкий гелий под очень малым давлением в 0,013 *мм*, Оннес получил температуру немного ниже 0,9°, считая от абсолютного нуля; при этих условиях гелий оставался жидким. Обращение гелия в твердое состояние удалось уже после смерти Оннеса его сотруднику Кеезому не путем дальнейшего охлаждения жидкого гелия, а путем увеличения давления.

Водород и гелий в конденсированном состоянии замечательны своей малой плотностью: плотность жидкого водорода под атмосферным давлением 0,07 *г/см*^{3} (т. е. он в 14 раз легче воды), плотность

твердого водорода 0,08 *г/см³*, плотность жидкого гелия примерно в семь раз меньше плотности воды.

Методом, которым пользовался Камерлинг-Оннес, удалось получить температуру около 0,7° К. Еще более низкие температуры были реализованы иначе. Подобно тому как расширение реального газа (при температуре ниже точки инверсии) и испарение жидкости приводят к охлаждению, так и *быстрое размагничивание намагниченных тел* также *вызывает охлаждение*. Быстрым размагничиванием при самых низких температурах удалось получить (в 1956 г.) температуру, которая только на две стотысячные доли градуса отличается от абсолютного нуля. Все способы охлаждения дают снижение температуры на некоторую долю той температуры, которая имелась. Достичь температуры, в точности равной абсолютному нулю, невозможно.

Для сжижения воздуха, кроме способов Пикте и Линде, с успехом применяется еще третий способ, разработанный французом Клодом. В *способе Клода* холод получается в результате совершения воздухом «внешней» работы, тогда как в способе Линде главную роль играет совершение «внутренней» работы, идущей на преодоление сил взаимного притяжения молекул воздуха при увеличении расстояний между ними. Применяемые в способе Клода машины, в которых воздух, расширяясь, производит внешнюю работу и вследствие этого охлаждается, называются *детандерами*. Поршневые детандеры похожи по устройству на поршневые паровые машины, но работающие не паром, а сильно сжатым воздухом (до 200 *ат*). В наиболее совершенных детандерах Гейланда воздух, расширяясь, охлаждается вследствие производимой им внешней работы на 150°. Благодаря ряду усовершенствований способа Клода, сделанных советским ученым П. Л. Капицей, введены в употребление турбинные детандеры: воздух, сжатый всего лишь до 4—5 *ат*, вращая турбину, производит работу и охлаждается настолько, что часть воздуха (5—6%) может быть сжижена. При одинаковой производительности размеры ожижительной установки с турбодетандером Капицы в несколько раз меньше размеров аналогичных установок с поршневыми детандерами.

§ 110. Уравнение Ван-дер-Вальса

Составление точного уравнения состояния сжатых газов и паров является делом весьма сложным, требующим большого числа измерений, причем обычно не удается свойства разных паров выразить простыми однотипными уравнениями состояния. Если ограничиваться качественной характеристикой термодинамических свойств паров, то особого внимания заслуживает уравнение состояния, предложенное в 1873 г. голландским физиком Ван-дер-Вальсом:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT. \qquad (4)$$

Это уравнение отличается от уравнения Клапейрона двумя поправками: *объемной поправкой* b и поправкой на так называемое *внутреннее давление* $\frac{a}{v^2}$. По мысли Ван-дер-Вальса a и b должны быть величинами постоянными, не зависящими от температуры, плотности и давления. Для химически различных веществ a и b имеют различные значения.

Объемная поправка в уравнении Клапейрона приобретает значение, когда общий объем, занятый телом, не настолько велик, чтобы в сравнении с ним можно было пренебречь той частью этого объема, которая занята самими молекулами тела. При обычной плотности газов среднее расстояние между молекулами примерно в несколько десятков раз превышает диаметр молекул. Поэтому объемная поправка существенную роль играет лишь для более сильно сжатых газов и для жидкостей.

То же самое следует сказать и о *внутреннем давлении* $\frac{a}{v^2}$, которое возникает в результате взаимного притяжения молекул. Пока молекулы газа находятся друг от друга на расстояниях, превышающих примерно одну десятимиллионную долю сантиметра (10^{-7} *см*), между ними почти не замечается сил притяжения; но если при уплотнении газа среднее расстояние соседних молекул станет меньше, чем 10^{-7} *см*, то начинает сказываться взаимное притяжение молекул. Рассмотрим эффект этого притяжения.

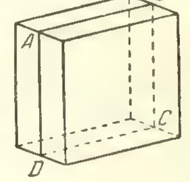


Рис. 218.

Вообразим внутри газа площадку в 1 *см*^{2} (площадка $ABCD$ на рис. 218). Внешнее давление p передается на эту площадку согласно закону Паскаля. Таким образом, на последнюю действует по нормали сила, численно равная p; но это еще не есть полная сила, действующая на площадку. Вообразим на площадке как на основании две прямые призмы, причем высота каждой призмы равна 10^{-7} *см*; молекулы, заключающиеся внутри одной призмы, притягивают к себе молекулы, находящиеся внутри другой призмы. В результате такого притяжения возникает равнодействующая сила, нормальная к площадке $ABCD$ и усиливающая собой гидростатическое давление p. Представим себе, что число молекул в одном из призматических объемов увеличилось вдвое. Ясно, что в таком случае и равнодействующая сила, приложенная к площадке $ABCD$, увеличится вдвое. Если же количество молекул удвоится не только в одном, а в обоих призматических объемах, то равнодействующая сила на площадку $ABCD$ должна будет увеличиться в четыре раза. Следовательно, внутреннее давление, обусловленное взаимодействием молекул, пропорционально квадрату плотности среды, или, другими словами, обратно пропорционально квадрату удельного объема среды.

Взаимным притяжением молекул обусловливается наличие запаса потенциальной энергии в газе. Мы можем найти математическое выражение этой потенциальной энергии, исходя из того, что работа сил внутреннего давления равняется убыли потенциальной энергии[1]):

$$d\Pi = \frac{a}{v^2}\,dv,$$

откуда, интегрируя, получаем:

$$\Pi = -\frac{a}{v} + \text{const}.$$

Условимся считать, что молекулярно-потенциальная энергия равна нулю, если газ приведен к состоянию бесконечной распыленности молекул в пространстве; это означает, что для $v = \infty$ мы полагаем $\Pi = 0$; тогда для всякого конечного объема молекулярно-потенциальная энергия Π есть величина отрицательная, равная $-\frac{a}{v}$. Таким образом, по Ван-дер-Вальсу, внутренняя энергия реального газа выражается формулой

$$U = C_v T - \frac{a}{v}. \qquad (5)$$

Здесь первый член $C_v T$ — тот же, как и в случае идеального газа. Он выражает собой молекулярно-кинетическую энергию (если нет колебательных степеней свободы); второй член $\left(-\frac{a}{v}\right)$ выражает молекулярно-потенциальную энергию.

В жидкостях внутреннее давление $\frac{a}{v^2}$ достигает тысяч и даже десятков тысяч атмосфер. Величина внутреннего давления зависит от формы поверхности (для вогнутой поверхности оно меньше, для выпуклой — больше). Этой зависимостью внутреннего давления от формы поверхности, как будет пояснено в следующей главе, объясняются некоторые капиллярные явления. Теплота, которую необходимо затратить для испарения жидкости, тем больше, чем больше внутреннее давление жидкости.

Для разреженных газов (когда поправка на внутреннее давление $\frac{a}{v^2}$ мала в сравнении с p и когда b мало́ в сравнении с v) уравнение Ван-дер-Вальса совпадает с уравнением Клапейрона. Для

---

[1]) Величина $\frac{a}{v^2}$ представляет собой силу, действующую на площадку в 1 $см^2$. Сила F, действующая на площадь S, равна $\frac{a}{v^2}S$. Когда происходит изменение объема на dv, то можно представить себе, что площадка S перемещается на расстояние dl, а именно на такое расстояние, что $dv = S\,dl$. При этом производится работа $F\,dl = \frac{a}{v^2} S\,dl = \frac{a}{v^2}\,dv$.

сжатых газов уравнение Ван-дер-Вальса оправдывается в немногих случаях; обычно оно оказывается, к сожалению, неточным.

Нижеследующие значения a и b имеют место, если за единицу объема принять объем, занимаемый газом при давлении в 1 *ат* при 0° С (тогда $R = \frac{1}{273,16} = 0,00369$):

	a	b
Водород H_2	0,00038	0,00088
Азот N_2	0,00276	0,00166
Кислород O_2	0,00272	0,00142
Аргон Ar	0,00727	0,00134
Углекислота CO_2 . . .	0,00727	0,00192

Для жидкостей уравнение Ван-дер-Вальса непригодно; обычно оно грубо расходится с данными опыта.

Чтобы получить совпадение с данными опыта и сохранить в то же время форму уравнения Ван-дер-Вальса, необходимо в различных интервалах температур и плотности пользоваться различными численными значениями величин a и b. Приходится, следовательно, признать, что эти величины являются функциями температуры и объема. Выполненное Ван-Лааром обстоятельное исследование этого вопроса показывает, что зависимость a и b от температуры и объема весьма сложна. Поэтому большого практического значения уравнение Ван-дер-Вальса не имеет. Главная его ценность в том, что качественно оно не теряет смысла при переходе к жидкому состоянию и приближенно отражает в весьма простой форме много важных закономерностей [1]).

Исторически уравнение Ван-дер-Вальса сыграло большую роль в развитии наших сведений о термодинамических свойствах веществ. Оно привело к учению о термодинамически неустойчивых состояниях, определило важное значение критических параметров для ха-

---

[1]) Для точного описания данных опыта пользуются эмпирическими уравнениями состояния, чаще всего уравнением Камерлинг-Оннеса. Уравнение Камерлинг-Оннеса построено с таким расчетом, чтобы всегда имелась возможность привести это уравнение к согласию с данными опыта простым вписыванием дополнительных членов без изменения формы уравнения. Оно таково:

$$pv = A\left\{1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \frac{D}{v^4} + \frac{E}{v^6} + \frac{F}{v^8}\right\};$$

Здесь $A = RT$. Коэффициенты $B, C, \ldots, F$ называются вириальными коэффициентами и представляются в виде многочленов, расположенных по возрастающим степеням T^{-1}:

$$B = b_1 + \frac{b_2}{T} + \frac{b_3}{T^2} + \frac{b_4}{T^3} + \frac{b_5}{T^4}$$

и аналогично C, D, E, F.

рактеристики вещества и послужило основой для теории соответственных состояний.

Рассмотрим первый из этих вопросов подробнее.

На рис. 219 изображены изотермы газа и жидкости по уравнению Ван-дер-Вальса. При высоких температурах (например, изотермы T_1 и T_2) они мало отличаются (в особенности в области больших v) от гипербол. При понижении температуры (изотерма T_3) заметно искривление, которое при критической температуре $T_к$ приводит к перегибу изотермы в точке K — точке критического состояния вещества.

Для всех температур ниже $T_к$ на изотермах, вычерченных по уравнению Ван-дер-Вальса, существует изгиб, который выражен тем резче, чем ниже температура, и имеет вид волны (например, на изотерме T_5 волна в участке A_1A_2).

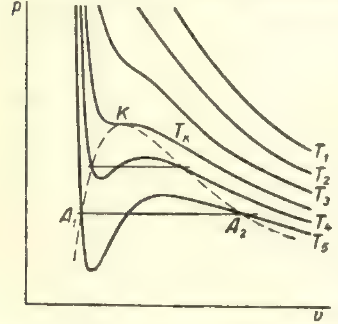


Рис. 219. Изотермы по уравнению Ван-дер-Вальса.

Здесь наблюдается своеобразное противоречие между уравнением Ван-дер-Вальса и данными опыта. Противоречие заключается в том, что соответствующие изотермы, вычерченные по данным опыта, имеют вместо волнового изгиба прямолинейный участок.

Область, очерченная на рис. 219 пунктиром, является областью равновесия жидкости и насыщенного пара. Как было пояснено раньше, в области равновесия жидкости и пара действительные изотермы совпадают с изобарами (ср. рис. 215 и 219). Спрашивается, каков же смысл волнообразного изгиба в этой области изотерм, вычерченных по уравнению Ван-дер-Вальса? По мысли Ван-дер-Вальса, изгиб изотермы в участке A_1A_2 определяет неустойчивые, так называемые *метастабильные* состояния. Эта мысль связана с гипотезой, что процесс, изображаемый участком изгиба теоретической изотермы, означает переход жидкости в газообразное состояние *без расслоения* вещества на две фазы (хотя такой процесс никогда не был наблюден). Некоторым подтверждением этого взгляда служат действительно обнаруженные метастабильные состояния жидкости и пара. Опыт показывает, что *жидкость можно перегреть перед испарением и переохладить перед замерзанием*. Даже более того: можно сказать, что жидкость переходит в пар или в лед при нормальной для данного давления температуре лишь тогда, когда обеспечены условия, облегчающие этот переход; в противном случае закипание наступит при температуре более высокой, а замерзание — при более низкой. Загрязнение воды песчинками, а также пористость сосуда, стенки которого обычно содержат поглощенный

воздух, благоприятствуют процессу кипения. Воду, тщательно очищенную от механических примесей, можно нагреть при нормальном давлении до 140° С и даже выше, после чего она вскипает со взрывом.

Указанный сдвиг температуры закипания относится только к начальному моменту процесса закипания; когда кипение уже началось, температура быстро падает до того значения, которое является нормальным для поддерживаемого во время опыта давления.

Чтобы связать идею о метастабильных состояниях с формой изотерм Ван-дер-Ваальса, следует представить себе, что в непосредственной близости к изотерме T_5, выше нее, проведен еще ряд изотерм. Так как все они имеют изгиб, аналогичный изображенному на чертеже пунктиром, то они, очевидно, дважды пересекут прямую A_1A_2 в участке, примыкающем к точке A_1. Следовательно, точки, расположенные на прямой A_1A_2 поблизости от A_1, должны, по уравнению Ван-дер-Ваальса, соответствовать более высоким температурам, чем T_5, и перемещение точки вдоль этой прямой (в начале ее) должно означать перегрев жидкости.

Состояния, которые характеризуются участком изотермы Ван-дер-Ваальса слева от точки A_2, отличаются от насыщенного пара (A_2) повышенной плотностью и повышенным давлением. Это указывает, что может существовать *пересыщенный пар*. Действительно, опыты подтверждают, что насыщенный пар при отсутствии в нем «ядер конденсации», которыми чаще всего служат микроскопические пылинки и ионизированные молекулы газа, легко может быть уплотнен без выделения из него капель жидкости.

§ 111. Учение о соответственных состояниях

Важнейшее свойство уравнения Ван-дер-Ваальса заключается в том, что константы a и b связаны, как показано ниже, с параметрами критического состояния: $p_к$, $v_к$ и $T_к$.

Уравнение Ван-дер-Ваальса есть уравнение третьей степени относительно объема v. Перепишем его в следующем виде:

$$v^3 - \left(\frac{RT}{p} + b\right)v^2 + \frac{a}{p}\,v - \frac{ab}{p} = 0, \tag{A}$$

и будем рассматривать мольный объем v как величину, играющую роль основной переменной, а давление и температуру — как величины, определяющие совместно с константами a и b численное значение коэффициентов уравнения (А).

Очевидно, что написанное уравнение имеет, вообще говоря, три корня (v_1, v_2, v_3), значения которых зависят от значений коэффициентов. При температурах выше критической два корня являются мнимыми и только один — вещественным; в этой области газообразных состояний каждому значению давления и температуры,

заданным совместно, соответствует некоторое одно, вполне определенное значение мольного объема; графически это означает, что здесь любая из изотерм в одной лишь точке пересекает любую из изобар.

Мы видели уже, что ниже критической изотермы расположена область равновесия жидкости и пара, где изотермы, построенные по уравнению Ван-дер-Вальса, пересекаются с изобарами, отвечающими равновесию, в трех точках. Здесь, следовательно, для соответственно выбранных значений температуры и давления все три корня рассматриваемого уравнения являются вещественными и неодинаковыми. Близ критического состояния численные значения корней мало отличаются друг от друга, и в критической точке они совпадают.

Из алгебры известно, что уравнение третьей степени с коэффициентом, равным единице при старшем члене, может быть представлено в виде произведения

$$(v - v_1)(v - v_2)(v - v_3) = 0.$$

Для критического состояния, когда $v_1 = v_2 = v_3 = v_к$, имеем:

$$(v - v_к)^3 = 0,$$

или

$$v^3 - 3v_к v^2 + 3v_к^2 v - v_к^3 = 0. \tag{B}$$

Уравнение (B) тождественно с уравнением, которое получается из (A), если положить $T = T_к$ и $p = p_к$.

Приравнивая на этом основании в указанных уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях v, находим:

$$3v_к = \frac{RT_к}{p_к} + b,$$

$$3v_к^2 = \frac{a}{p_к},$$

$$v_к^3 = \frac{ab}{p_к}.$$

Остается решить эту систему уравнений относительно $v_к$, $p_к$ и $T_к$. Для этой цели можно: последнее из трех равенств разделить на предыдущее, получим $v_к$; подставить полученное значение $v_к$ во второе равенство, получим $p_к$; подставить полученные значения $v_к$ и $p_к$ в первое равенство, получим $T_к$. Таким образом, находим:

$$v_к = 3b, \quad p_к = \frac{a}{27b^2}, \quad T_к = \frac{8}{27}\frac{a}{Rb}. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что из этих соотношений вытекает:

$$\frac{RT_к}{p_к v_к} = \frac{8}{3} = 2{,}67. \tag{7}$$

Для газа, строго следующего уравнению Клапейрона, это отношение должно было бы равняться единице. Можно сказать, следовательно, что по уравнению Ван-дер-Вальса любое вещество должно занимать в критическом состоянии объем, в 2,67 раза меньший, чем тот объем, который оно занимало бы при тех же значениях температуры и давления, если бы это был газ, строго подчиненный законам Бойля и Ге-Люссака. Опыт не подтверждает этого вывода; здесь, так же как и во многих других случаях, уравнение Ван-дер-Вальса качественно оказывается близким к истине, но количественно с данными опыта расходится. Вычисления, выполненные для большого числа веществ, показывают, что в действительности в среднем

$$\frac{RT_к}{p_к v_к} \approx 3,7.$$

Для отдельных веществ это отношение колеблется в довольно широких пределах, что можно видеть из таблицы:

	Водород	Кислород	Углекислота	Ацетилен	Серный ангидрид	Этиловый спирт	Вода	Метиловый спирт	Синильная кислота	Уксусная кислота
$\frac{RT_к}{p_к v_к} =$	3,28	3,42	3,58	3,63	3,8	4,0	4,35	4,54	5,55	6,8

Выразим постоянные a и b из уравнения Ван-дер-Вальса через параметры критического состояния вещества. Из формулы (6) получаем:

$$b = \frac{1}{3} v_к,$$

$$a = 3p_к v_к^2.$$

Из формулы (7) получим выражение универсальной газовой постоянной R через те же параметры:

$$R = \frac{8}{3} \frac{p_к v_к}{T_к}.$$

Подставим найденные значения a, b и R в уравнение Ван-дер-Вальса:

$$\left(p + 3\frac{p_к v_к^2}{v^2}\right)\left(v - \frac{1}{3} v_к\right) = \frac{8}{3} p_к v_к \frac{T}{T_к}. \qquad (8)$$

Введем понятия так называемых *приведенных параметров*, представляющих собой отношение переменной величины данного параметра к его критическому значению, а именно:

$$\frac{p}{p_к} = \pi \text{ — приведенное давление,}$$

$$\frac{v}{v_к} = \omega \text{ — приведенный объем,}$$

$$\frac{T}{T_к} = \tau \text{ — приведенная температура.}$$

Тогда уравнение Ван-дер-Вальса примет вид

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau. \qquad (9)$$

Это так называемое *приведенное уравнение Ван-дер-Вальса.*

Уравнение (9) позволяет сделать важное обобщение: если два различных по своей химической природе тела взять *при соответственных температурах и при соответственных давлениях* (т. е. при одинаковых τ, когда $\frac{T_1}{T_{к1}}$ для одного тела равно $\frac{T_2}{T_{к2}}$ для другого, и при одинаковых π), то *и соответственные объемы этих тел должны быть одинаковы.*

Оказалось, что этот закон соответственных состояний в общем удовлетворительно отражает опытные данные, и во всяком случае он несравненно более точен, чем уравнение Ван-дер-Вальса, хотя бы взятое в форме (9).

Открытие закона соответственных состояний привело к развитию новой важной главы физики — *сравнительной физики*, которая ставит своей задачей исследование связи между термодинамическими свойствами веществ и их химическим строением.

В качестве примера закономерностей из области сравнительной физики отметим нижеследующие:

Правило аддитивности мольных объемов. Было показано, что при сопоставлении жидкостей, взятых в соответственных состояниях (чаще сопоставляют критические состояния), мольный объем жидкостей сложного химического строения может быть вычислен как сумма произведений из условных величин (как бы грамм-атомных объемов) на число атомов данного элемента, входящих в состав молекулы рассматриваемой жидкости.

Правило приведенных теплот парообразования. При сопоставлении жидкостей, взятых в соответственных состояниях, их мольные теплоты парообразования, деленные на абсолютную температуру (т. е. так называемые приведенные теплоты парообразования), для всех жидкостей равны.

В менее точной форме — для жидкостей, сопоставляемых просто при их температурах кипения T_s под атмосферным давлением,— это правило было открыто Пикте (в 1876 г.) и Трутоном (в 1884 г.).

Проверкой его занимались многие авторы и в особенности подробно В. Я. Курбатов, который нашел, что во многих случаях

$$\frac{r}{T_s} \approx 21. \tag{10}$$

Для ассоциированных жидкостей, т. е. для таких, у которых часть молекул соединена в комплексы (по две или несколько молекул), постоянная имеет обычно бо̀льшую величину, чем 21; например, для воды 25,8, для этилового спирта 24,0, для спиртов жирного ряда 26, тогда как для нормальных (т. е. неассоциированных) жидкостей она разнится во многих случаях менее чем на единицу. Приближенное равенство (10) принято называть правилом Трутона.

Следует отметить, что для многих жидкостей температура кипения при атмосферном давлении составляет примерно $\frac{2}{3}$ критической температуры, так что сопоставление таких жидкостей при их нормальных температурах кипения оказывается не слишком разнящимся от более верного сопоставления при соответственных состояниях.

Правило Матиаса. Как показал в 1900 г. французский ученый Матиас, сумма приведенных плотностей жидкости и ее насыщенного пара является универсальной линейной функцией приведенной температуры:

$$\frac{\rho_{ж} + \rho_{пар}}{2\rho_{к}} \approx 2 - \frac{T}{T_{к}}. \tag{11}$$

Правило Матиаса (его называют также «законом диаметров») отличается значительной точностью.

К числу важных соотношений сравнительной физики принадлежат некоторые закономерности, приведенные в последующих главах, например: формулы Этвеша и Бачинского для поверхностного натяжения жидкостей (стр. 463), закон Неймана — Коппа для теплоемкостей твердых тел (стр. 501), правило Пикте для коэффициентов теплового расширения (стр. 514).

§ 112. О качественных превращениях при тепловых процессах

Изучая молекулярно-тепловые явления, мы постоянно сталкиваемся с коренными, качественными превращениями тел, происходящими внезапно при некоторых значениях температуры и давления (при «точках» плавления, кипения, при температурах выпадения кристалла из раствора и т. п.). Это — отдельные случаи всеобщей закономерности: качественные изменения развиваются быстро, стремительно, в виде скачкообразного перехода от одного состояния к другому состоянию, и происходят вследствие постепенного накопления количественных изменений.

Количественные характеристики относятся к изменяющимся свойствам веществ или явлений, тогда как под **качеством** подразумевается совокупность основных, неотъемлемых признаков вещи, т. е. та главная определенность вещи, которая коренным образом отличает, позволяет выделить, обособить данную вещь от других вещей. Изменение качества означает коренное преобразование вещи в другую вещь. Изменение же отдельного свойства и даже полная утрата его не означает превращения вещи. Так, согнутый гвоздь остается гвоздем, намагниченное железо остается железом.

Качество выражает относительную устойчивость вещи, сохранение ее главных особенностей. **Количество** же выражает изменчивость свойств вещи, определяет отношение вещи к другим вещам. Поэтому количественные изменения являются постепенными, могут быть незначительными, незаметными, скрытыми, изменения же качественные являются прерывистыми, резкими, явными.

Физика на каждом шагу доставляет примеры перехода количественных изменений в качественные. Когда мы постепенно сообщаем какому-либо телу или отнимаем от него тепло, свойства тела — его температура, плотность, вязкость и др.— в некоторых пределах изменяются непрерывно; но после того, как посредством этих непрерывных изменений достигается определенное состояние, вдруг некоторая группа свойств изменяется скачком, что приводит к коренному, качественному превращению тела. Так, при нагревании и охлаждении всякая жидкость, достигнув определенной, характерной для нее температуры (зависящей от давления, при котором производится опыт), превращается в пар или кристаллизуется. Аналогично происходят качественные превращения: конденсация газа в жидкость, плавление твердого тела, выпадение кристаллов из раствора или расплава при охлаждении и т. д.

Энгельс отмечал, что многие константы физики представляют собой «узловые точки», где накопление количественных изменений приводит к качественным превращениям.

«Точки перехода» из одного состояния в другое, например точка кипения жидкости или точка конденсации пара, определяются молекулярным строением вещества и интенсивностью межмолекулярных сил. Явления перегрева жидкости и пересыщения пара свидетельствуют о том, что переходы жидкости в пар и пара в жидкость представляют собой сложные процессы. Начальные моменты закипания и конденсации, а также и характер протекания этих процессов перехода фактически определяются не только температурой и давлением. Когда и как произойдет вскипание жидкости или конденсация пара, это в известной мере зависит от всей конкретной обстановки эксперимента и в особенности от наличия примесей посторонних веществ, от природы и состояния стенок сосуда, от количества воздуха, растворенного в жидкости и поглощенного стенками, от природы, числа и размеров взвешенных пылинок и т. п. При определенных условиях испарение воды происходит с зеркальной поверхности воды, при других условиях вода бурно кипит; при перегреве капель воды, окруженных маслом, вода в некоторый момент с шумом взрывается.

Еще более сложно и разнообразно протекают процессы кристаллизации. В зависимости от условий эксперимента получаются весьма различающиеся по своему виду кристаллы. От условий кристаллизации зависят и размер и форма кристал-

лов. В процессе роста кристалл может причудливо изменять свой вид, отражая малейшие перемены в условиях кристаллизации.

При осторожном охлаждении некоторых жидкостей удается как бы обойти точку кристаллизации и получить аморфное (не кристаллическое) твердое тело. Так затвердевает стекло.

Большое разнообразие качественных превращений наблюдается в смесях жидкостей (однородные смеси жидкостей при определенных условиях расслаиваются), в сложных растворах, где в одном растворителе растворено несколько веществ, и в других многокомпонентных термодинамических системах.

Все химические реакции, а их существует неисчислимое множество, представляют собой качественные превращения. Так, горючая смесь паров топлива с воздухом при сжатии, когда вследствие сжатия достигается определенное повышение температуры этой смеси, внезапно воспламеняется и испытывает превращение в продукты сгорания. Ход химической реакции, как и других процессов перехода, существенно зависит от внешних обстоятельств Иногда примесь посторонних веществ, не участвующих в реакции (катализаторов), может чрезвычайно ускорить реакцию или даже вызвать ее, если до того она не происходила.

Например, горючая смесь водорода с кислородом при нагревании взрывается, когда температура достигает примерно 550° С. В присутствии мелко раздробленного фарфора или стекла взрыв происходит при 350° С, а под влиянием мелкого порошка золота — при 55° С. Чистый кусок сахара, внесенный в некоптящее пламя, не загорается, а плавится и течет; но если поверхность сахара загрязнить пеплом от папиросы, сахар легко зажечь, причем ничтожных следов пепла достаточно, чтобы обеспечить сгорание большого куска сахара. Катализатор не расходуется в процессе реакции и сам не испытывает превращения. Влияние катализаторов на ход реакций указывает на исключительную сложность любого химического превращения.

В области явлений, которые обычно относят к механике, также можно указать немало примеров качественных превращений. При деформации твердых тел, например при гнутии металлического стержня, если деформирующую силу постепенно увеличивать, упругая деформация в некоторый момент качественно изменяется и превращается в пластическую деформацию, которая в отличие от упругой деформации не исчезает при снятии нагрузки. Это явление в монокристаллах происходит в виде скачкообразных сдвигов.

Примером другой категории качественных превращений может служить внезапное изменение режима течения жидкости. При постепенном увеличении скорости жидкости, текущей по трубе, при некотором критическом значении скорости спокойное слоистое течение вдруг превращается в качественно совершенно иное течение — турбулентное.

Мы видим из всех этих примеров, что постепенное изменение температуры, давления и других величин подготовляет качественный скачок. Однако наступающее, наконец, качественное превращение может происходить по-разному в зависимости от деталей эксперимента. Часто почти неуловимое влияние, казалось бы, второстепенных факторов ускоряет, замедляет, изменяет явления, которые разыгрываются при качественном превращении.

Качественные различия в природе основываются на различном химическом с о с т а в е, или на различном внутреннем с т р о е н и и тел, или на различных формах и количествах э н е р г и и, а чаще всего — на сочетании разного состава с разным строением и разным соотношением энергии.

Изменение химического состава неизбежно сопровождается и изменением энергии на величину энергии химического сродства и внутриатомной энергии присоединенных или отделившихся частиц. Когда при сохранении состава изменяется строение тела вследствие перераспределения его частиц, это сопровождается или изменением суммарной энергии взаимодействия и движения частиц, или уменьшением одних и равным увеличением других видов внутренней энергии тела. Поэтому невозможно изменить качество тела без количественного изменения присущих телу видов энергии.

ГЛАВА XVIII

ФИЗИКА ЖИДКОСТЕЙ

§ 113. Механические и термодинамические свойства жидкостей

Главное отличие жидкости от газа состоит в том, что жидкость занимает определенный ограниченный объем, тогда как газ распространяется по всему предоставленному ему пространству. Свойство жидкостей занимать лишь ограниченный объем обусловлено двумя обстоятельствами: 1) наличием между молекулами сил притяжения, создающих внутреннее давление и обусловливающих, как пояснено ниже, прочность жидкости на разрыв при всестороннем растяжении; 2) тем, что скорость движения молекул не достигает такой величины, при которой действие сил притяжения могло бы быть преодолено; только незначительная часть молекул жидкости обладает скоростью, достаточной для того, чтобы молекула могла покинуть объем, занятый жидкостью; с повышением температуры число таких молекул увеличивается — об этом свидетельствует возрастающая скорость испарения жидкости.

Сопротивление, оказываемое жидкостями скольжению слоев, незначительно, поэтому жидкость легко может быть разделена на части и раздроблена на капли. Но было бы ошибочным заключить отсюда, что жидкость всегда должна вести себя как тело, не имеющее прочности. *Сопротивление отрыву частиц у жидкостей велико* (на это указывает обычно большая величина теплоты парообразования). Мы должны поэтому ожидать, что жидкость обнаружит значительную прочность при такой деформации, когда заведомо исключена возможность скольжения слоев жидкости, например при деформации всестороннего растяжения. Описываемый ниже опыт подтверждает это заключение.

Прочная капиллярная трубка, запаянная с одного конца, была наполнена водой при 28°, охлаждена до 18°, чтобы в нее вошел маленький пузырек воздуха, и запаяна с открытого конца. При повышении температуры, сопровождающемся увеличением давления, воздух растворился в воде. Трубка оказалась целиком наполненной водой. При новом охлаждении до 18° вода продолжала наполнять всю трубку и, следовательно, подверглась всестороннему растяжению. Очевидно, что относительная деформация в данном случае

была равна объему существовавшего ранее пузырька воздуха, разделенному на объем воды. Зная модуль объемной упругости воды, можно было вычислить напряжение, существовавшее в воде. Продолжая охлаждение дальше и доводя воду в трубке до разрыва, представилось возможным определить прочность воды на разрыв. Она оказалась порядка 50 *кГ/см²*, т. е. всего в 12 раз меньше прочности на разрыв соснового дерева.

По значениям модуля всесторонней упругости и обратной ему величины, т. е. *сжимаемости* $\left(-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{t=\text{const}}$, жидкости мало отличаются от не очень твердых кристаллических тел, таких, как натрий, калий. Сжимаемость большинства жидкостей по порядку величины равна $4 \cdot 10^{-6} \div 10^{-4}$ $\frac{1}{ат}$ (для некоторых жидкостей величины сжимаемости приведены на стр. 167).

Одним из основных физических свойств жидкости является *вязкость*. Роль вязкости, или внутреннего трения, в гидродинамике была рассмотрена в главе IX. Здесь мы остановимся на зависимости вязкости жидкостей от параметров состояния и на выводах из молекулярно-кинетических теорий вязкости жидкостей.

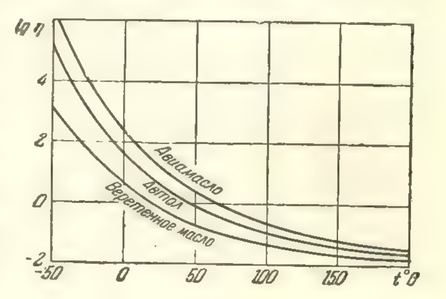


Рис. 220. Зависимость вязкости смазочных масел от температуры.

Вязкость является единственным параметром жидкостей, величина которого *изменяется в миллионы раз* при изменении температуры и давления в достаточно широких пределах. На рис. 220 изображены для примера в полулогарифмическом масштабе кривые вязкости смазочных масел по данным М. П. Воларовича (1943 г.) в интервале температур от 175 до —50°С. Как видно из рисунка, величина коэффициента вязкости, выраженного в пуазах, у этих масел изменяется в 10^5—10^7 раз. Для обычных жидкостей, например для воды, уменьшение температуры всего на 10° соответствует увеличению вязкости на 20—30%. По опытам Бриджмена, при повышении давления до 20 000 *ат* вязкость жидкости может увеличиваться в 10^5—10^6 раз.

Молекулярную теорию вязкости жидкости впервые обосновал профессор Московского университета Алексей Иосифович Бачинский в 1913 г. Он установил, что вязкость жидкостей η зависит от удельного объема v по нижеследующему закону:

$$\eta = \frac{c}{v - \omega}. \tag{1}$$

Константа ω в *законе Бачинского* представляет собой предельный объем молекул вещества, а следовательно $(v-\omega)$ — свободный объем. Экспериментально показано, что величина ω близка к константе b в уравнении Ван-дер-Вальса. Константа c связана простой зависимостью с коэффициентом a уравнения Ван-дер-Вальса и, следовательно, характеризует силы молекулярного взаимодействия в жидкостях.



Алексей Иосифович Бачинский (1877—1944).

А. И. Бачинский проверил справедливость формулы (1) для огромного числа жидкостей; при этом он установил связь величины ω и c с химической природой вещества. Если на график нанести по оси ординат удельный объем жидкости, а по оси абсцисс — текучесть $\frac{1}{\eta}$, то по закону Бачинского получается прямая линия (рис. 221).

Для ряда жидкостей вязкость изменяется с температурой по формуле

$$\eta = Ae^{\frac{U}{RT}}, \qquad (2)$$

где T — абсолютная температура, A — константа, R — газовая постоянная, а U — некоторая энергия, характерная для жидкости (стр. 477). Уравнение (2), выведенное впервые теоретически Я. И. Френкелем, было далее развито и видоизменено в работах ряда ученых.

Одни авторы полагают, что энергия U в формуле (2) соответствует теплоте плавления вещества. Для ряда жидкостей действительно наблюдается хорошее совпадение между этими двумя величинами. Другие исследователи считают, что энергия U составляет некоторую часть теплоты парообразования.

Термодинамические величины, характеризующие свойства жидкости, изучались на протяжении последнего столетия большим числом ученых. В особенности много работ было посвящено измерениям сжимаемости жидкостей, расширяемости жидкостей при нагревании и теплоемкости жидкостей. Обнаружилось, что зависимость между основными термодинамическими параметрами, а именно удельным объемом, давлением и температурой, носит очень

сложный характер и неодинакова для различных жидкостей. По этой причине результаты измерений до сих пор выражаются преимущественно эмпирическими формулами, обычно в виде многочленов. Например, *зависимость удельного объема жидкости от температуры* (при неизменном давлении) выражается формулой

$$\frac{v}{v_0} = 1 + at + bt^2 + ct^3. \qquad (3)$$

Как правило, имеющее редкое исключение, удельный объем жидкости при повышении температуры возрастает. Общеизвестным исключением является убывание удельного объема воды при нагревании ее от 0 до 4°C. Константы a, b, c в вышеприведенной формуле имеют для различных жидкостей весьма различные значения, и до сих пор не удалось найти простой зависимости между величинами этих констант и химическим составом вещества. Для большинства жидкостей все эти три константы положительны.

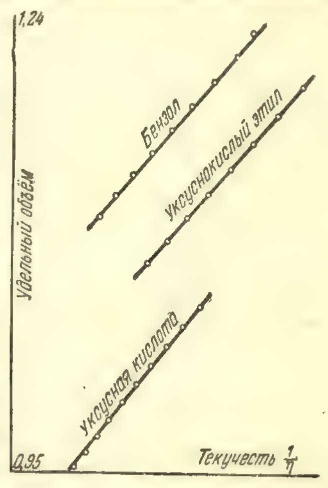


Рис. 221. Закон Бачинского.

Обширные и тщательные исследования зависимости удельного объема жидкости от температуры были проведены в конце прошлого столетия русскими учеными В. Ф. Лугининым и Д. И. Менделеевым. Менделеев обнаружил, что приближенно зависимость удельного объема жидкости от температуры может быть выражена формулой

$$v = \frac{v_0}{1 - kT}, \qquad (4)$$

от которой жидкости отступают приблизительно так же, как газы отступают от формулы Ге-Люссака. Для различных жидкостей величина k в формуле (4) имеет значение от 0,0008 до 0,0015.

Константы в формулах (3) и (4) в действительности оказываются величинами, зависящими от давления, причем для жидкостей разной природы их зависимость от давления сказывается по-разному.

Зависимость плотности жидкости от давления была экспериментально исследована с большой точностью для многих жидкостей французским академиком Э. Амага в конце прошлого и в начале этого столетия. Аппаратура, применявшаяся в его опытах, позволила доводить давление до 3000 *ат*. Результаты опытов обнаружили большое разнообразие в поведении жидкости различной природы. Обширнейшие исследования поведения тел и, в частности, жидкостей при высоких давлениях были проведены в 20—40-х годах нашего

столетия американским ученым П. В. Бриджменом. Усовершенствовав аппаратуру, он провел измерения до давления 45 000 *ат*. Бриджмен пытался выразить табличные результаты своих измерений эмпирическими формулами, но не достиг в этом успеха.

А. И. Бачинскому после тщательного изучения экспериментальных материалов, полученных Бриджменом, в 1931 г. удалось найти формулу, удовлетворительно передающую опытные данные в широком интервале давлений (500—17 000 *ат*):

$$p+K=\frac{L}{v^7}. \quad (5)$$

В этом уравнении величины K и L суть константы, зависящие от температуры. Их зависимость от температуры выражается формулами типа

$$K=K_0+kt.$$

Уравнение Бачинского (5) справедливо для самых разнообразных веществ (для воды, сероуглерода, спиртов, кислот и т. п.). Было показано (П. В. Маториным в 1958 г.), что уравнение Бачинского сохраняет точность до самых больших давлений, исследованных экспериментально, порядка 50 000 *ат*, и оказывается столь же хорошо применимым к сильно сжатым твердым телам.

Измерения *теплоемкости* жидкости, так же как и измерения плотности, в большинстве случаев приходится выражать эмпирическими формулами вида

$$c=c_0+at+bt^2. \quad (6)$$

В 1887 г. Шиф обнаружил, что для очень многих органических веществ имеет место линейная зависимость теплоемкости жидкости от температуры, т. е. $b=0$ (речь идет о теплоемкости c_p). Шиф показал, что константы c_0 и a являются общими для целого ряда органических соединений, например:

для бензола, толуола, метаксилола и параксилола

$$c=0{,}3834+0{,}001043\cdot t;$$

для кислот уксусной, пропионовой, масляной

$$c=0{,}4440+0{,}001418\cdot t.$$

В особенности сложными оказываются зависимости между термодинамическими величинами для растворов. Этому вопросу посвящено огромное число исследований, которые в настоящее время принято относить к области физической химии.

§ 114. Поверхностное натяжение

Из элементарного курса физики известен ряд наблюдений и опытов, весьма убедительно доказывающих, что *тонкий поверхностный слой жидкого тела находится в особом состоянии, напоминающем состояние натянутой резиновой перепонки.*

Подобно тому как в каждой точке натянутой нити действует сила натяжения, направленная вдоль нити, так в натянутой ленте действует подобная же сила, но приложенная не в одной точке, а распределенная по всей ширине ленты; поэтому естественно измерять напряженность этой силы той величиной натяжения, которая приходится на 1 *см* ширины ленты. Если речь идет не о ленте, а о перепонке или пленке, натянутой равномерно по всем направлениям, то на каждый линейный сантиметр, взятый по любому направлению в поверхности пленки, будет действовать сила, характеризующая своей величиной степень натянутости пленки; сила эта действует перпендикулярно к тому отрезку в 1 *см*, в точках которого она приложена, и, кроме того, она является касательной к поверхности пленки. Такая сила, рассчитанная на единицу длины, называется *поверхностным натяжением*; размерность поверхностного натяжения будет *дин/см*, или (если умножить числитель и знаменатель на *см*) *эрг/см*^{2}; таким образом, поверхностное натяжение можно рассматривать также как некоторую энергию, отнесенную к единице площади поверхности.

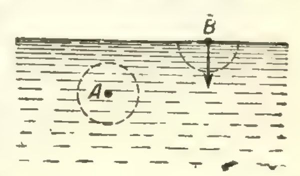


Рис. 222. К пояснению возникновения поверхностного натяжения.

Объясним поверхностное натяжение, основываясь на молекулярной теории. Атомы всех веществ состоят из положительных и отрицательных электрических зарядов. Заряды одной молекулы, взаимодействуя с зарядами другой, дают некоторое суммарное действие. С увеличением расстояния между молекулами это суммарное действие одной молекулы на другую быстро убывает, становясь незаметным, если расстояние между молекулами составляет около 10^{-7} *см* (*радиус молекулярного действия*).

Следует заметить, что среднее расстояние между молекулами в жидкостях для разных жидкостей в большинстве случаев имеет величину от $3 \cdot 10^{-8}$ до $8 \cdot 10^{-8}$ *см*. Радиус молекулярного действия немногим превосходит среднее расстояние между молекулами жидкости.

Вообразим молекулу *A* (рис. 222), лежащую под поверхностью жидкости глубже чем на 10^{-7} *см*. Она движется поступательно и вращательно, при этом она окружена со всех сторон другими молекулами, и действие этих молекул на молекулу *A* сводится в каждый данный момент к некоторому суммарному эффекту. Однако, если

мы подытожим этот суммарный эффект за конечный промежуток времени (например, за 1 сек.), то в результате получим почти нуль, потому что за конечный промежуток времени наша вращающаяся молекула почти наверное подвергалась одинаковому воздействию по всем направлениям. Совсем иное будет с молекулой B, находящейся на поверхности жидкости: такая молекула будет испытывать воздействия, исходящие лишь от молекул, лежащих глубже нее и рядом с ней. Ясно, что за конечный промежуток времени, поскольку рассматриваемая молекула не упадет глубже под поверхность, она в итоге будет испытывать силу, стремящуюся втянуть ее вглубь, другими словами, силу, нормальную к поверхности жидкости.

Очевидно, что для перемещения какой-либо молекулы из глубины жидкости на поверхность требуется примерно такая же затрата энергии против сил молекулярного поля, как и на удаление молекулы с поверхности. Поэтому, *если мы отнесем теплоту испарения жидкости к одной молекуле и возьмем половину получившейся величины*, то это даст нам приблизительное представление о том, *насколько энергия поверхностной молекулы превышает энергию молекулы внутри жидкости.*

Поверхностная молекула *B в среднем ориентирована* довольно определенным образом: она обращена к массе жидкости одной из тех своих сторон, которые всего более поддаются притягивающему воздействию со стороны остальной массы жидкости. Следовательно, в поверхностном слое толщиной около 10^{-7} *см* молекулы расположены в общем параллельно друг другу (конечно, хаотическое движение молекул заставляет то ту, то другую поверхностную молекулу перемещаться вглубь, причем ее место занимают молекулы, пришедшие из глубины).

Итак, мы видим, что поверхностный слой жидкости толщиной примерно 10^{-7} *см* находится в особом состоянии. Молекулы расположены в этом слое в известном порядке, подобно тому как они расположены в твердом теле. Этот-то слой и является тем местом, где действует поверхностное натяжение. На основании известных нам данных мы можем даже оценить величину поверхностного натяжения. Мы знаем (§ 110), что взаимное притяжение молекул сдавливает жидкость с силой примерно 1000 *ат*, или 10^9 *дин/см*^{2} (таков порядок величины внутреннего давления, вычисленного по уравнению Ван-дер-Вальса). Проведем нормальное сечение поверхностного слоя и возьмем в этом сечении прямоугольник шириной 10^{-7} *см*, длиной 1 *см*. На площадь этого прямоугольника, равную 10^{-7} *см*^{2}, будет действовать в результате молекулярного притяжения нормальная сила, равная 10^9 *дин/см*$^2 \times 10^{-7}$ *см*$^2 = 100$ динам. Эта сила, подсчитанная для одного линейного сантиметра жидкой поверхности, дает примерную величину поверхностного натяжения. В действительности поверхностное натяжение, например, ртути составляет 490 *дин/см*, воды — 73 *дин/см*, этилового спирта — 22 *дин/см* (при комнатной

температуре). Как видим, наша грубая оценка правильно определяет порядок искомой величины.

При повышении температуры поверхностное натяжение уменьшается и при критической температуре обращается в нуль.

В 1921 г. А. И. Бачинский установил, что поверхностное натяжение пропорционально четвертой степени разности плотностей жидкости и ее насыщенного пара:

$$\alpha = C(\rho_{ж} - \rho_{пар})^4, \quad (7)$$

где C — коэффициент пропорциональности.

Интересно отметить, что вопрос о зависимости поверхностного натяжения от разности плотностей жидкости и пара изучался первоначально Лапласом, а затем Ван-дер-Вальсом. Первый нашел для показателя степени число 2, второй — число 3. Однако, как показал Бачинский, с опытом согласуется только показатель, равный четырем.

Уравнение Бачинского применимо для большого интервала температур.

Как было показано впервые Этвешем, поверхностное натяжение различных жидкостей убывает с возрастанием температуры по закону:

$$\alpha = \frac{K}{v^{2/3}}(T_{к} - T). \quad (8)$$

Здесь v — мольный объем жидкости, $T_{к}$ — критическая температура и K—постоянная, которая для некоторых неассоциированных жидкостей близка к 2,1.

Отметим еще, что величина поверхностного натяжения данной жидкости несколько меняется в зависимости от того, будет ли находиться над жидкостью ее собственный насыщенный пар или же тот или другой посторонний газ, или пустое пространство.

Для границы раздела двух несмешивающихся жидкостей поверхностное натяжение имеет величину, существенно отличную от поверхностного натяжения каждой из жидкостей. Например, поверхностное натяжение на границе вода — бензол составляет 33,6 *дин/см*, тогда как для воды оно равно 73, а для бензола 29 *дин/см*.

Поверхностное натяжение расплавленных солей ($NaCl$, KBr, KNO_3 и др.) при температурах 800—900° С имеет величину порядка 90—110 *дин/см*.

Особенно велико поверхностное натяжение расплавленных металлов. Расплавленные свинец, медь и золото при температурах, немного превосходящих температуру плавления, имеют поверхностное натяжение около 500—600 *дин/см*. Для расплавленного серебра $\alpha \approx 800$ *дин/см*, для железа — более 1000 *дин/см*, для платины — около 1700 *дин/см*.

Поверхностное натяжение некоторых жидкостей при 18° С

Жидкость	α в *дин/см*	Жидкость	α в *дин/см*
Вода	73	Скипидар	26
Водный раствор NaCl 26%	82	Бензол	29
Водный раствор спирта 40%	30	Масло оливковое	34
То же 10%	50	Масло касторовое	37
Вода — бензол	33,6	Глицерин	65
Вода — эфир	12,2	Ртуть	490
Эфир	16,5	Ртуть — вода	427
Спирт	22,5		

Естественно, что ожиженные газы в связи с малой величиной молекулярного взаимодействия имеют малое поверхностное натяжение. Так, жидкий азот имеет поверхностное натяжение 8 *дин/см* (при —196° С), жидкий водород — около 3 *дин/см* (при — 259° С), жидкий гелий — менее 1 *дин/см*.

Свободная энергия жидкой поверхности. Рассмотрим изотермический процесс такой деформации жидкости, когда площадь свободной поверхности жидкости возрастает и в связи с этим приходится затрачивать работу против сил поверхностного натяжения. Пусть у проволочной рамки *ABCD* (рис. 223) одна сторона *mn* сделана очень легкой и подвижной: благодаря устроенным на концах ее петелькам она может скользить вдоль направляющих *AB* и *CD*. Между *BC* и *mn* образуем жидкую пленку (например, из мыльной воды). Если ничем не нагрузим проволочку *mn*, то жидкая пленка станет сокращаться (подобно натянутой резиновой перепонке) и потянет за собой проволочку *mn*; мы имеем здесь чрезвычайно наглядное проявление натяжения двух поверхностных слоев, имеющихся на одной и на другой сторонах жидкой пленки[1]). Чтобы уравновесить силы поверхностного натяжения, подвесим к перекладине *mn* некоторый груз (всего лучше составить этот груз из нескольких проволочных крючочков).

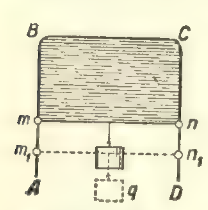


Рис. 223. Поверхностное натяжение жидкой пленки уравновешено грузом q.

При вертикальном положении рамки равновесие будет наблюдаться, когда

$$2\alpha l = q;$$

здесь α — поверхностное натяжение, l — длина перекладинки; αl — сила, с которой тянет перекладинку одна сторона жидкой пленки;

[1]) В отличие от резиновой перепонки жидкая пленка, сокращаясь, продолжает тянуть проволочку *mn* с неизменной по величине силой.

$2\alpha l$ — полная сила, с которой обе стороны пленки действуют на перекладинку; наконец, q — сила тяжести перекладинки и подвешенного груза.

Увеличим на весьма малую величину нагрузку q; перекладинка вместе с грузом станет очень медленно скользить вниз; при перемещении на x (в положение m_1n_1) сила тяжести производит работу $qx = 2\alpha lx$, причем lx равняется площади четырехугольника mnm_1n_1, а $2lx$ представляет собой приращение поверхности жидкости ΔS.

Мы видим, что *работа внешних сил, стремящихся увеличить поверхность жидкого тела, равняется* $\alpha\Delta S$, *т. е. произведению поверхностного натяжения на приращение площади поверхности.* Эта теорема является общей.

Если бы растяжение жидкой пленки было произведено быстро, адиабатно, затраченная работа пошла бы на увеличение внутренней энергии. Но при этом температура пленки не оставалась бы неизменной и соответственно изменилось бы и поверхностное натяжение α. При изотермическом процессе поверхностное натяжение α остается постоянным и работа против сил поверхностного натяжения $\alpha\Delta S$ идет на увеличение свободной энергии (§ 105).

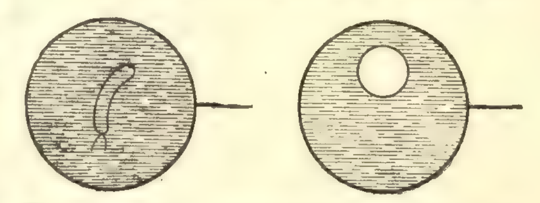


Рис. 224. Опыт, показывающий, что при равновесии площадь поверхности жидкости минимальна.

Итак, *свободная энергия жидкой поверхности равна произведению поверхностного натяжения* α *на величину* S *площади поверхности.*

В термодинамике доказывается, что свободная энергия (подобно потенциальной энергии механических систем) стремится к минимуму, но для свободной энергии условием этого является неизменность температуры.

Стремление жидкого тела прийти к возможно малому значению свободной энергии проявляется во множестве явлений. Жидкие капли, поскольку они изъяты от действия внешних сил, принимают шарообразную форму; это потому, что из всех тел равного объема шар имеет наименьшую поверхность: так как S имеет наименьшее значение, то и αS имеет наименьшее значение. Равным образом и пузырьки газа в жидкости имеют шарообразную форму; здесь опять-таки осуществляется минимум поверхности, по которой жидкость граничит с газом.

Если стеклянной палочкой деформировать масляную каплю,— она выправляется, будучи предоставлена сама себе.

Затянем пленкой из мыльной воды контур проволочного кольца и бросим на эту пленку мокрую петлю из шелковинки (рис. 224).

Затем разрушим ту часть пленки, которая находится внутри петли (это можно сделать посредством прикосновения нагретой проволокой): петля вдруг принимает форму правильной окружности. Здесь сократилась площадь пленки и уменьшилась до возможного минимума свободная энергия.

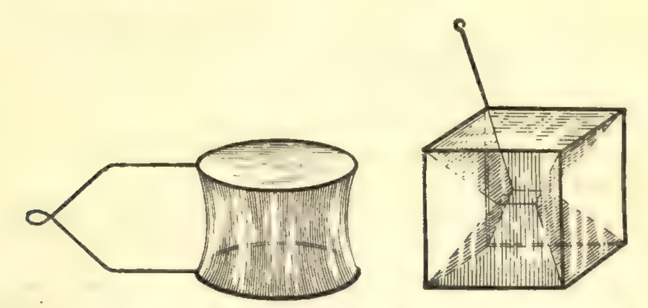


Рис. 225. Геометрическая форма некоторых поверхностей, имеющих минимальную площадь.

Погружая в мыльную воду на короткое время различные проволочные фигуры, можно наблюдать образующиеся на этих проволочных каркасах жидкие пленки красивой геометрической формы; площадь поверхности этих пленок (при заданном периметре) всегда минимальна (рис. 225).

§ 115. Формула Лапласа. Явления капиллярности и смачивания

Резиновый шар, мыльный пузырь могут оставаться в равновесии лишь при условии, чтобы давление воздуха внутри них было на определенную величину больше давления наружного воздуха. Вычислим превышение внутреннего давления над наружным.

Пусть мыльный пузырь имеет радиус R и пусть *избыток давления* внутри него над наружным давлением равняется p. Чтобы увеличить объем v пузыря на исчезающе малую величину dv, нужно затратить работу $p\,dv$, которая идет на увеличение свободной энергии поверхности пузыря и равна $2\alpha\,dS$, где α — поверхностное натяжение мыльной пленки, S — величина одной из поверхностей пузыря (разностью радиусов внутренней и наружной поверхностей для простоты пренебрегаем). Итак, имеем уравнение

$$p\,dv = 2\alpha\,dS.$$

Но

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

поэтому

$$dv = 4\pi R^2 dR;$$

с другой стороны,

$$S = 4\pi R^2,$$

отсюда

$$dS = 8\pi R\, dR.$$

Подставляя выражения для dv и dS в вышеприведенное уравнение, получаем:

$$p \cdot 4\pi R^2\, dR = 2\alpha \cdot 8\pi R\, dR,$$

отсюда

$$p = \frac{4\alpha}{R}.$$

По закону противодействия такую же величину имеет давление, производимое пузырем на воздух, находящийся внутри него.

Если вместо пузыря, имеющего две поверхностные пленки, будем рассматривать каплю, у которой только одна поверхность, то придем к выводу, что поверхностная пленка производит на внутренность капли давление, равное

$$p = \frac{2\alpha}{R}, \qquad (9)$$

где R — радиус капли.

Вообще *вследствие кривизны поверхностного слоя жидкости создается избыточное давление: положительное под выпуклой поверхностью и отрицательное под вогнутой поверхностью.* Таким образом, при наличии кривизны поверхностный слой жидкости становится источником силы, направленной от выпуклой стороны слоя к вогнутой стороне.

Лаплас дал формулу для избыточного давления p, пригодную для случая, когда поверхность жидкости имеет любую форму, допускаемую физической природой жидкого состояния. Эта *формула Лапласа* имеет следующий вид:

$$p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (10)$$

Рис. 226. К пояснению формулы Лапласа.

где R_1 и R_2 имеют следующее значение. В какой-нибудь точке M поверхности жидкости (рис. 226) нужно вообразить нормаль MN и через эту нормаль провести две взаимно перпендикулярные плоскости, которые пересекут поверхность жидкости по кривым AMB и CMD. Радиусы кривизны этих кривых в точке M и обозначаются через R_1 и R_2.

Легко видеть, что из формулы Лапласа для плоской поверхности жидкости получается $p = 0$, а для шаровой поверхности $p = \frac{2\alpha}{R}$, как это мы вывели раньше.

Если бы поверхность была «седлообразной», то кривые AMB и CMD лежали бы по разные стороны от касательной плоскости в

точке M; тогда радиусы R_1 и R_2 имели бы разные знаки. В геометрии доказывается, что у так называемых *минимальных поверхностей*, т. е. имеющих при данном контуре наименьшую возможную площадь, сумма $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ всюду равняется нулю. Как раз этим свойством обладают мыльные пленки, затягивающие какой-нибудь проволочный контур.

Пена есть собрание пузырей, имеющих общие стенки. Кривизна такой стенки (определяемая выражением $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$) пропорциональна разности давлений по обе стороны стенки.

Если конец чистой стеклянной палочки погрузить в чистую воду и вынуть палочку, то увидим на конце ее висящую каплю воды. Очевидно, что молекулы воды сильнее притягиваются к молекулам стекла, чем друг к другу.

Подобно этому медной палочкой можно поднять каплю ртути. В таких случаях говорят, что твердое тело *смачивается жидкостью.*

Иное будет, если опустим чистую стеклянную палочку в чистую ртуть или если стеклянную палочку, покрытую жиром, опустим в воду: здесь палочка, вынутая из жидкости, не уносит ни капли этой последней. В этих случаях говорят, что жидкость *не смачивает* твердого тела.

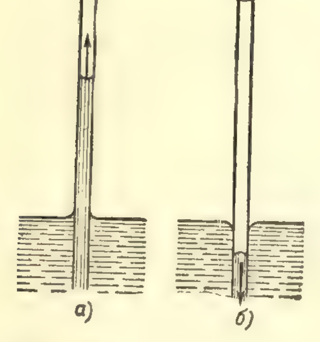


Рис. 227. Стрелками показаны направления сил, с которыми поверхностный слой действует на находящийся под ним столбик жидкости.

Если погрузить в воду узкую чистую стеклянную трубку, то вода в трубке поднимется на известную высоту вопреки силе тяжести (рис. 227, *а*). Узкие трубки называются *капиллярными* [1]), или капиллярами, а отсюда и самое явление носит название *капиллярности*. Жидкости, смачивающие стенки капиллярной трубки, претерпевают капиллярное поднятие. Жидкости, не смачивающие стенок капилляра (например, ртуть в стеклянной трубке), претерпевают, как показано на рис. 227, *б*, опускание. Капиллярные поднятия и опускания бывают тем больше, чем у́же капилляры.

Капиллярные поднятия и опускания вызываются избыточным давлением, которое возникает вследствие искривления поверхности жидкости. В самом деле, в трубке, которая смачивается жидкостью, жидкость образует вогнутый *мениск* [2]). По сказанному

---

[1]) Латинское capillus — в о л о с.

[2]) Греческое meniscos — предмет лунообразной формы.

в предыдущем параграфе поверхность такого мениска будет развивать силу, направленную снизу вверх, и эта сила будет поддерживать в трубке столбик жидкости вопреки действию тяжести. Наоборот, в трубке, которая не смачивается жидкостью, получится выпуклый мениск; он даст силу, направленную вниз и, следовательно, понижающую уровень жидкости.

Выведем зависимость между поверхностным натяжением α жидкости, ее плотностью ρ, радиусом r трубки и высотой h столбика, поднявшегося в трубке. Пусть жидкость «вполне смачивает» стенки трубки (как вода стеклянную трубку), так что в месте встречи с трубкой поверхность жидкости является касательной к поверхности трубки. Это касание имеет место по контуру, длина которого есть $2\pi r$. Благодаря поверхностному натяжению контур будет развивать силу $2\pi r\alpha$, и эта сила, приложенная к столбику, будет уравновешивать силу его тяжести, равную $\pi r^2 h\rho g$, где g — ускорение тяжести.

Таким образом,

$$2\pi r\alpha = \pi r^2 h\rho g,$$

откуда

$$h = \frac{2\alpha}{r\rho g}, \tag{11}$$

т. е. *высота капиллярного поднятия пропорциональна поверхностному натяжению и обратно пропорциональна радиусу трубки и плотности жидкости.*

Ту же формулу (11) для капиллярного поднятия можно получить как следствие формулы Лапласа (10) или (в рассматриваемом случае симметричной поверхности) формулы (9). Можно рассуждать так: в жидкости под вогнутой поверхностью давление понижено на величину $\frac{2\alpha}{r}$; поэтому при равновесии, когда давление на уровне свободной поверхности жидкости, налитой в сосуд, равно давлению жидкости в капилляре на том же уровне, столб жидкости в капилляре должен иметь такую высоту, чтобы его давление ρgh уравновешивало дефицит давления, создаваемого вогнутостью поверхности мениска. Стало быть, $\rho gh=\frac{2\alpha}{r}$, откуда и получается формула (11). Рассуждая аналогично, убеждаемся, что когда жидкость «совершенно не смачивает» стенок капилляра, при равновесии она будет находиться в капилляре на уровне, пониженном на высоту, которая определяется той же формулой (11).

Измерение капиллярного поднятия является одним из простых способов определения величины α.

На рис. 228 изображено капиллярное поднятие жидкости между двумя пластинками, составляющими двугранный угол. Нетрудно сообразить, что поднявшаяся жидкость будет сверху ограничена

гиперболой; асимптотами этой гиперболы будут служить ребра двугранного угла и линия, лежащая на уровне жидкости в сосуде.

Рассмотрим условия равновесия жидкости, соприкасающейся с твердой стенкой (рис. 229). Обозначим избыточную свободную энергию каждого квадратного сантиметра поверхности твердого тела *3*, граничащего с вакуумом или газом *2*, через α_{32}. Когда слой какой-либо жидкости *1*, смачивая поверхность твердого тела, растекается по ней, поверхность раздела твердое тело — газ заменяется поверхностью раздела твердое тело — жидкость, причем свободная энергия этой новой поверхности будет уже иная, α_{31}. Очевидно, что убыль свободной энергии каждого квадратного сантиметра поверхности твердого тела $\alpha_{32}-\alpha_{31}$ равна работе сил, под действием которых 1 *см* периметра жидкой пленки перемещается на расстояние в 1 *см* по направлению, перпендикулярному к периметру пленки. Стало быть, разность $\alpha_{32}-\alpha_{31}$ можно рассматривать как силу, приложенную к 1 *см* периметра жидкой пленки, действующую касательно к поверхности твердого тела и побуждающую жидкость продвигаться по поверхности твердого тела. Однако растекание жидкости по поверхности твердого тела сопровождается увеличением поверхности между жидкостью *1* и вакуумом или газом *2*, чему препятствует поверхностное натяжение жидкости α_{12}. В общем случае при неполном смачивании жидкостью твердого тела сила α_{12} (как это показано на рис. 229, *а*) направлена под некоторым углом φ к поверхности твердого тела; этот угол называют *краевым углом*. Мы видим, таким образом, что жидкость, граничащая с твердым телом, будет находиться в равновесии тогда, когда

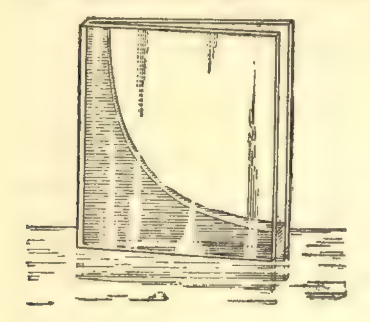


Рис. 228. Капиллярное поднятие жидкости между пластинками, составляющими двугранный угол.

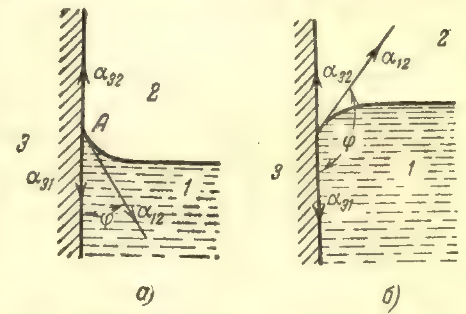


Рис. 229. Жидкость смачивает твердую стенку (*а*); не смачивает твердую стенку (*б*).

$$\alpha_{12}\cos\varphi=\alpha_{32}-\alpha_{31}.$$

Отсюда находим, что краевой угол, под которым при равновесии свободная поверхность жидкости встречает поверхность твер-

дого тела, определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_{32} - \alpha_{31}}{\alpha_{12}}. \qquad (12)$$

По смыслу вывода формулы (12) ясно, что эта формула остается справедливой и для случая, когда жидкость не смачивает твердого тела (рис. 229, *б*); тогда краевой угол φ будет тупым; отсутствие смачивания означает, что $\alpha_{32} < \alpha_{31}$ (т. е. свободная энергия твердого тела на его поверхности раздела с вакуумом или газом меньше, чем на поверхности раздела того же тела с жидкостью; иначе говоря, в этом случае при продвижении жидкости по поверхности твердого тела работа не будет производиться, но, напротив, работу нужно будет затратить, чтобы осуществить такое продвижение жидкости).

При полном смачивании краевой угол $\varphi = 0°$, а при полном отсутствии смачивания $\varphi = \pi$. Краевой угол зависит от природы соприкасающихся веществ и от температуры. Если наклонять стенку сосуда, краевой угол от этого не меняется.

Формула (12) объясняет форму капли, лежащей на горизонтальной плоскости. На твердой подставке, которая смачивается жидкостью, капля принимает форму, изображенную на рис. 230; если же подставка не смачивается, то получается форма капли, изображенная на рис. 231, где краевой угол — тупой.

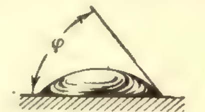


Рис. 230. Капля смачивающей жидкости.

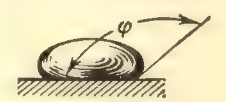


Рис. 231. Капля несмачивающей жидкости.

Совершенно чистое стекло вполне смачивается ($\varphi = 0°$) водой, этиловым спиртом, метиловым спиртом, хлороформом, бензолом. Для ртути на чистом стекле краевой угол составляет 52° (для свежеобразованной капли 41°), для скипидара 17°, для эфира 16°.

Когда жидкость вполне смачивает подставку, то капли не возникает, а жидкость растекается по всей поверхности. Это происходит, например, с каплей воды на абсолютно чистой стеклянной пластинке. Но обыкновенно стеклянная пластинка бывает несколько загрязнена, что препятствует растеканию капли и создает измеримый краевой угол.

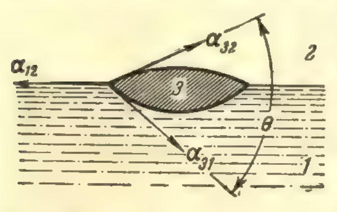


Рис. 232. Масляная капля на воде.

Соображения, на основе которых была получена формула (12), можно применить также и к случаю, когда вместо твердого тела мы имеем вторую жидкость, например, когда масляная капля плавает на поверхности воды (рис. 232). Но в этом случае направления сил α_{32} и α_{31} уже не противоположны; при соприкосновении жидкости с твердым телом нормальная составляющая поверхностного натя-

жения α_{12} уравновешивается сопротивлением твердой стенки, а при соприкосновении жидкостей это не имеет места; поэтому в данном случае условие равновесия должно быть записано иначе, а именно как равенство полной силы α_{12} и геометрической суммы (взятой с обратным знаком) сил α_{32} и α_{31}. Приравнивая квадрат величины α_{12} квадрату геометрической суммы α_{32} и α_{31}, вычисленной по известному правилу определения диагонали параллелограмма (построенного на векторах α_{32} и α_{31}), получаем:

$$\alpha_{12}^2 = \alpha_{32}^2 + \alpha_{31}^2 - 2\alpha_{32}\alpha_{31}\cos\theta.$$

Отсюда получаем формулу для *внутреннего краевого угла* θ жидкой капли:

$$\cos\theta = \frac{\alpha_{32}^2 + \alpha_{31}^2 - \alpha_{12}^2}{2\alpha_{32}\alpha_{31}}. \qquad (13)$$

Из этой формулы (да и прямо из рис. 232), в частности, следует, что когда $\alpha_{12} > \alpha_{32} + \alpha_{31}$, равновесие для плавающей капли не может иметь место, и капля жидкости *3* будет растекаться по поверхности жидкости *1*. Неравенство $\alpha_{12} > \alpha_{32} + \alpha_{31}$ означает, что свободная энергия поверхности жидкости *1* превышает сумму свободных энергий новообразующихся при растекании капли поверхностей раздела *3—2* и *3—1*. Тот факт, что в этом случае происходит растекание капли, является частным следствием общего закона термодинамики (§ 105), гласящего, что при всех изотермических процессах, происходящих самопроизвольно, суммарная свободная энергия системы всегда убывает и равновесие достигается тогда, когда свободная энергия системы становится минимальной.

Если, например, на воде плавает оливковое масло, то $\alpha_{12} = 73$ *дин/см*, $\alpha_{32} = 32$ *дин/см* и $\alpha_{32} = 20$ *дин/см*. Таким образом, здесь поверхностное натяжение на границе воздуха и воды больше суммы обоих поверхностных натяжений, которые имеет масло по отношению как к воздуху, так и к воде; мы будем поэтому иметь неограниченное растекание капли. Толщина масляного слоя дойдет до размеров одной молекулы (примерно 10^{-8} *см*), а затем слой станет распадаться. Но если вода загрязнена, то ее поверхностное натяжение делается меньше, и тогда на поверхности может оставаться большая масляная капля, после того как по воде распространился очень тонкий слой масла.

Жидкость, проникающая вследствие действия молекулярных сил в тонкий зазор между двумя поверхностями твердых тел, оказывает на эти поверхности *расклинивающее* действие. Расклинивающее действие тонких слоев жидкости было экспериментально доказано искусными опытами проф. Б. В. Дерягина, который разработал также теорию этого явления и объяснил на основе расклинивающего действия жидкости эффект Ребиндера (§ 46).

§ 116. Поверхностноактивные вещества

Как было пояснено, свободная энергия жидкой поверхности стремится принять возможно меньшее значение. Эта свободная энергия, как мы видели, выражается произведением поверхностного натяжения на величину поверхности. Каждый из этих множителей стремится уменьшиться, поскольку к этому представляется возможность. В § 114 были приведены примеры, когда уменьшается поверхность; теперь рассмотрим случай, когда уменьшается поверхностное натяжение.

Вода имеет большое поверхностное натяжение (около 70 *дин/см* при комнатной температуре); поверхностное натяжение многих других жидкостей меньше (около 20—40 *дин/см*). Примешаем к воде другую жидкость с меньшим поверхностным натяжением. Тогда молекулы этой второй жидкости заменят собой молекулы воды в поверхностной пленке, которая и будет состоять главным образом (а может быть, и целиком) из молекул примешанного вещества; в итоге свободная энергия уменьшится на значительную величину.

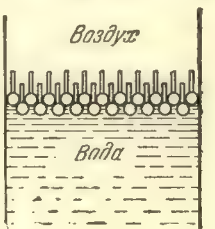


Рис. 233. «Ленгмюровский частокол» на поверхности раствора.

Вещество, которое, будучи примешано к жидкости, уменьшает поверхностное натяжение этой жидкости, называется *поверхностноактивным* по отношению к этой последней.

Наиболее обычный пример поверхностноактивного вещества представляет собой мыло. Вода, в которой растворено мыло, покрыта поверхностной пленкой, целиком состоящей из молекул мыла. Молекула мыла, имеющая довольно сложный химический состав (например, $C_{18}H_{35}KO_2$), представляет собой как бы длинную цепочку из атомов углерода, окаймленную по всей ее длине атомами водорода и оканчивающуюся с одной стороны тремя атомами водорода, с другой стороны — группой из атомов кислорода и калия (или натрия). Водородный конец «слаб»— он не обнаруживает заметного притяжения к другим атомам; наоборот, кислородно-калиевый (или натриевый) конец «силен» — он энергично притягивается, например, к атомам водорода, входящим в состав воды. В результате оказывается, что молекулы мыла как бы стоят на поверхности воды, погружаясь в нее своим «сильным», или, как говорят, *полярным* концом. Толщина поверхностной пленки мыла равняется длине одной молекулы (около 10^{-7} *см*). Такое строение поверхностной пленки было обнаружено американским физиком Ленгмюром; оно показано схематически на рис. 233.

В противоположность поверхностноактивным веществам многие вещества (сахар, различные соли) увеличивают поверхностное натяжение воды. Если на чистой водной поверхности плавает лег-

кий несмачиваемый ею порошок (тальк, ликоподий) и если поблизости прикоснуться к поверхности воды куском сахара, то плавающие тельца притягиваются к сахару вследствие того, что подсахаренная вода имеет большее поверхностное натяжение, чем чистая (если вместо сахара прикоснуться куском мыла, то плавающие тельца, наоборот, убегают от него).

Контраст в поведении веществ, понижающих поверхностное натяжение воды, и веществ, повышающих его, приводит к тому, что вещество второй категории, будучи прибавлено к водному раствору поверхностноактивного вещества, выталкивает еще новые количества этого последнего вещества на поверхность. Поэтому в технике мыловарения прибавляют соль к мыльному раствору, чтобы выделить из него мыло (такая операция называется высаливанием). Этиловый эфир имеет очень небольшое поверхностное натяжение (при комнатной температуре 16 *дин/см*) и потому по отношению к воде является поверхностноактивным. Если достаточное количество эфира примешать к воде, то прежде всего вода вытолкнет на поверхность слой эфирных молекул. Но вследствие слабости притяжения между молекулами эфира и молекулами воды здесь нет надобности прибегать к высаливанию, чтобы отделить эфир от воды: жидкость сама разделится на два резко отграниченных слоя, причем в верхнем слое будет эфир с примесью малого количества воды, а в нижнем слое — вода с примесью небольшого количества эфира.

На неодинаковой величине молекулярного притяжения друг к другу различных веществ (что, между прочим, проявляется в неодинаковом смачивании различных твердых тел различными жидкостями), а также на влиянии примеси различных солей на поверхностное натяжение растворителя основаны *флотационные* [1]) процессы, играющие важную роль в технике обогащения различных руд и в разделении различных металлов друг от друга.

Основная схема флотации дается следующим простым опытом. Нужно взять два маленьких полых стеклянных шарика, которые были бы немного тяжелее вытесняемой ими воды; один из шариков несколько тяжелее другого. Поверхность более тяжелого шарика нужно покрыть тонким слоем жира. Если затем опустить этот шарик в стакан с водой, содержащей много растворенного газа (годится содовая вода), то на шарик начнут оседать в большом количестве газовые пузырьки, которые в конце концов поднимут шарик на поверхность воды. Другой, более легкий, шарик нужно чисто вымыть мылом; опущенный в ту же воду, он будет все время оставаться на дне.

На практике флотационный процесс осуществляется так. Руда, состоящая частью из ценных металлов и соединений металлов с дру-

---

[1]) От французского flotter — п л а в а т ь.

гими элементами (как пирит FeS_2, свинцовый блеск PbS и т. д.), частью из ничего не стоящих каменных пород (известняк, кварцит и т. п.), размалывается в порошок (размер крупинок 0,1—0,01 *мм*); затем этот порошок взбалтывается (мешалкой или струей сжатого воздуха) с водой и с небольшим количеством какого-нибудь маслянистого вещества, нерастворимого в воде.

При взбалтывании эта смесь вбирает большое количество мелких воздушных пузырьков, которые вместе с жидкими составными частями смеси образуют пену; эта пена равномерно перемешана с твердыми частицами. Если теперь эту пенистую смесь оставить в покое, то каменистые и металлические частицы начинают вести себя совершенно различно. Первые лучше смачиваются водой, чем маслом; поэтому они постепенно осядут на дно сосуда, содержащего пену. Металлические же частицы лучше смачиваются маслом, чем водой; благодаря покрывающей эти частицы масляной пленке они крепко пристают к воздушным пузырькам и вместе с ними постепенно всплывают на поверхность, несмотря на свой большой удельный вес. Таким образом, разделение частей руды произведено.

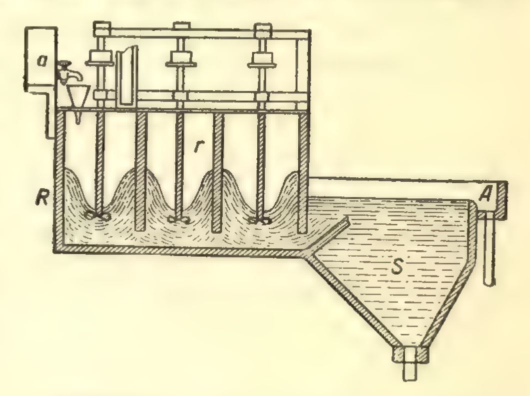


Рис. 234. Схема флотационного аппарата.

Если разделяемая руда содержит несколько металлов, то, вводя в ванну небольшое количество тех или других химических веществ, можно добиться того, чтобы всплывали кверху только частицы, содержащие определенный металл; таким образом легко разделить данную смесь на части, из которых каждая будет содержать лишь один металл.

Флотацию применяют также к разделению смесей неметаллических веществ.

Схема одного из флотационных аппаратов показана на рис. 234. В камере *R* пульпа (т. е. взмученная в воде измельченная порода) перемешивается быстро вращающимися винтовыми мешалками *r*, засасывающими в пульпу большие количества воздуха; образующаяся пена переходит в воронкообразные сосуды *S*, где каменная порода может спокойно осесть на дно, а всплывшие рудные частицы переходят постепенно через *A* в отстойные сосуды. Через *a* вводятся масло и химические вещества.

§ 117. Строение жидкостей

Картина молекулярно-теплового движения в жидкостях до сих пор остается менее изученной, чем для газов и твердых тел.

В течение многих лет предполагалось, что расположение частиц в жидкости носит совершенно неупорядоченный характер в противоположность кристаллам, где частицы остаются около узлов кристаллической решетки.

В смысле хаотичности расположения частиц на жидкость смотрели как на чрезвычайно уплотненный газ. Однако исследования последних десятилетий показали, что в жидкостях, если не постоянно, то во всяком случае в течение некоторого промежутка времени сохраняется более или менее упорядоченное размещение молекул. Первым к этому заключению пришел А. И. Бачинский в своих исследованиях явлений ассоциации в жидкостях. Если для какой-либо молекулы жидкости ближайшие к ней и окружающие ее несколько молекул расположены более или менее симметрично, то уже более удаленные от нее молекулы могут оказаться расположенными в пространстве без признаков какой-либо симметрии.

Картина мгновенного расположения молекул в жидкости напоминает сочетание самых мелких кристаллических зернышек, размытых на гранях их соприкосновения; кроме того, каждое из таких кристаллообразных зернышек является, по-видимому, неустойчивым во времени: через мгновение оно может распасться и на его месте может возникнуть новое.

Различные ученые придерживаются неодинаковой трактовки картины молекулярно-теплового движения в жидкостях. Особое внимание к этому спорному вопросу было уделено проф. Я. И. Френкелем, который впервые в подробностях развил картину «псевдокристаллического строения жидкостей».

В одной из своих статей Я. И. Френкель писал:

«В жидких телах частицы не остаются вечно связанными с одними и теми же положениями равновесия, но время от времени перескакивают из одного положения в соседнее. Время это (τ), т. е. время оседлого существования в каком-либо положении, тем больше, чем ниже температура жидкости. С повышением температуры оно чрезвычайно быстро уменьшается, тогда как при очень низких температурах оно может достигать весьма значительной величины.

Таким образом, жидкости, рассматриваемые в каждый данный момент, в сущности ничем не отличаются от твердого тела, кроме разве лишь неправильного расположения частиц или, вернее, тех временных положений равновесия, около которых они колеблются. Спрашивается, чем же с этой точки зрения объясняется текучесть жидкости, отсутствие сопротивления по отношению к силам, стремящимся изменить ее форму? На этот вопрос можно ответить так.

Если сила, стремящаяся изменить форму жидкости, т. е. расположение ее частиц, действует в одном и том же направлении достаточно длительно в сравнении с временем (τ) оседлого существования этих частиц, то за это время последние успеют неоднократно переменить свои положения равновесия, перемещаясь при этом преимущественно в направлении действующих на них сил. Эти дискретные элементарные перемещения, быстро следующие одно за другим, сливаются для наблюдателя в практически непрерывное течение...

Жидкость обладает не только текучестью, но и твердостью, которая при обычных условиях лишь замаскирована текучестью и которая может обнаружиться в случае быстро колеблющихся сил с периодом меньшим, нежели время оседлого существования частиц жидкости. Последнее условие может быть достигнуто не только сокращением периода колебаний внешних сил (например, переходом к ультразвуковым колебаниям чрезвычайно высокой частоты), но в равной мере и понижением температуры жидкости, понижением, которое, как уже указывалось выше, сопровождается резким удлинением времени оседлого существования частиц».

Время τ «оседлого» существования частиц жидкости называют *временем релаксации*. Френкель нашел, что оно связано с периодом τ_0 колебательного теплового движения, совершаемого частицей жидкости около своего временного положения равновесия, соотношением

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{U}{kT}}. \tag{14}$$

Здесь k — константа Больцмана, T — абсолютная температура и U — величина, характерная для данного вещества и его термодинамического состояния и определяющаяся энергией перехода частицы жидкости из одного своего временного положения равновесия в соседнее. При нормальных температурах τ_0 имеет порядок величины 10^{-13} сек.

По развитой Френкелем теории коэффициент вязкости η жидкостей пропорционален времени релаксации τ, а коэффициент диффузии D обратно пропорционален τ:

$$\eta = N\tau, \quad D = \frac{a^2}{6\tau},$$

где a — среднее расстояние между двумя соседними положениями равновесия (величина порядка 10^{-8} *см*), а N — величина, сходная по физическому смыслу и по порядку с модулем сдвига твердых тел.

В прежние годы господствовало предположение, что молекулы сложных веществ в жидком состоянии сохраняют вращательное движение, подобное тому, какое они имели в газовой фазе. Теперь, как утверждает Дебай, этот взгляд должен быть заменен представлением о «вращательных качаниях молекул около некоторых, более или менее неправильно (или, наоборот, более или менее

правильно) распределенных ориентацией, которые время от времени резко изменяются».

Описанная картина теплового движения в жидкостях еще продолжает находиться в стадии научного обсуждения, в итоге которого она, возможно, окажется существенно преобразованной.

§ 118. Кинетика испарения. Зависимость давления насыщенного пара от кривизны поверхности жидкости. Формула Томсона — Шиллера

Пусть некоторое количество воды или другой жидкости, находясь на открытом воздухе, постепенно испаряется. Это значит, что молекулы жидкости проникают сквозь ее границу и смешиваются с молекулами воздуха, диффундируя в нем. Но мы знаем, что между молекулами жидкости действуют довольно значительные силы притяжения. Чтобы какая-нибудь молекула A смогла вырваться из сферы притяжения других молекул и вылететь из жидкости, она должна иметь особенно большую составляющую скорости по направлению, перпендикулярному к границе жидкости, а по мере того как эта молекула A подлетает к границе и, наконец, пересекает последнюю, ее скорость значительно уменьшается (подобно движению артиллерийского снаряда, которым хотят выстрелить по вертикальному направлению с тем, чтобы он, преодолев земное притяжение, не вернулся на Землю; для этого он должен иметь очень большую начальную скорость). Таким образом, жидкость, испаряясь в свободное пространство, теряет наиболее быстрые свои молекулы, поэтому средняя кинетическая энергия ее молекул по мере испарения убывает — жидкость охлаждается.

В теоретическом отношении, однако, более важным является случай, когда испарение происходит внутри замкнутого пространства (объем которого, впрочем, может быть изменяем) и притом изотермически, т. е. температура пространства, заключающего жидкость и газовую атмосферу над ней, поддерживается неизменной (из сказанного выше очевидно, что для этого придется сообщать жидкости теплоту — теплоту парообразования).

Если несколько увеличить объем, отведенный жидкости и пару (как это происходит, например, при движении поршня в паровой машине, когда пар из котла входит в цилиндр), то сначала число молекул в единице объема пара несколько уменьшится (пар несколько удалится от насыщенного состояния), но сейчас же новое количество молекул перейдет из жидкости в пространство над ней, и состояние насыщения восстановится; наступит «равновесие» жидкости и пара. Однако это равновесие имеет особый характер: оно является не статическим, а *статистическим*, или, как иначе выражаются, *подвижным*. Дело в том, что наряду с вылетами молекул из жидкости в атмосферу пара имеет место и обратный процесс,—

процесс попадания молекул из атмосферы пара внутрь жидкости. Какая-нибудь молекула B, слишком близко подошедшая к жидкой поверхности и летящая слишком медленно, может быть поглощена жидкостью, вследствие притяжения со стороны молекул жидкости (тогда как другая молекула C, подлетевшая к жидкой поверхности с большей скоростью и отразившаяся по закону упругого удара, избегает такого пленения).

Чем выше температура жидкости, тем больше средняя кинетическая энергия ее молекул и тем больше найдется в ней таких молекул, которые благодаря большой скорости движения смогут проскочить через границу жидкости и пара. Отсюда понятно, что с повышением температуры увеличивается давление насыщенного пара, а равно увеличивается его плотность.

Обыденное наблюдение показывает, что различные жидкости отличаются весьма неодинаковой «летучестью»: так, спирт более летуч, чем вода, а эфир — более, чем спирт. Дело сводится к тому, что при комнатной температуре (20° С) давление насыщенного пара воды составляет только 17,4 *мм*, между тем как спирта 44 *мм*, а эфира 440 *мм*. В свою очередь, если жидкость при данной температуре дает большое количество пара, то, значит, силы притяжения между ее молекулами сравнительно слабы; взаимное притяжение молекул воды велико, у спирта оно меньше, а у эфира еще меньше.

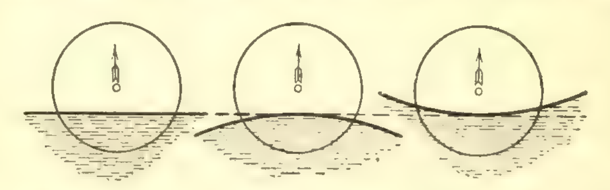


Рис. 235. Работа отрыва молекулы от поверхности, вогнутой внутрь жидкости (т. е. выпуклой наружу), меньше, чем при плоской или выгнутой наружу

Для одной и той же жидкости давление насыщенного пара не одинаково над плоской поверхностью и над поверхностью, имеющей кривизну. Эдсер поясняет это следующим образом: «Когда молекула отделяется от поверхности жидкости, то она может улететь только в том случае, если ее кинетическая энергия достаточна, чтобы унести ее из „сферы притяжения жидкости"; иначе она снова втянется внутрь жидкости. В некоторой точке своего пути молекула притягивается обратно к поверхности молекулами жидкости, которые лежат внутри сферы ее притяжения; следовательно, на данном расстоянии от поверхности жидкости сила, тянущая молекулу назад, зависит от формы поверхности жидкости (рис. 235). В случае поверхности, вогнутой внутрь жидкости, т. е. выпуклой наружу, эта сила будет меньше, а в случае вогнутой наружу — больше, чем для

плоской поверхности. Поэтому очевидно, что при определенной скорости, при которой молекула в состоянии улететь с плоской поверхности, она не будет в состоянии вырваться с поверхности, вогнутой наружу; при скорости же слишком малой для того, чтобы молекула могла улететь с плоской поверхности, она сможет улететь с поверхности выпуклой».

Если жидкая фаза ограничена вогнутым наружу мениском, то переход молекул из жидкости в пар затрудняется, а переход молекул из пара в жидкость, наоборот, облегчается. Вследствие этого *давление насыщенного пара над вогнутой наружу жидкой поверхностью окажется меньше, чем было бы над плоской поверхностью при той же температуре*, и чем больше кривизна вогнутого мениска, тем больше понизится давление пара.

В случае *выпуклой* жидкой поверхности (например, если жидкая фаза представляет собой каплю или несколько равных капель) давление пара *повышено* по сравнению с давлением пара над плоской поверхностью; чем больше кривизна поверхности (например, чем меньше радиус капель), тем большее получится давление пара.

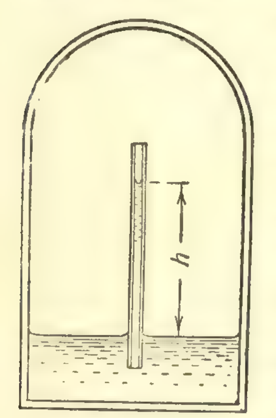
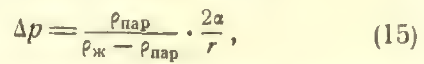


Рис. 236. При термодинамическом равновесии давление пара над вогнутой поверхностью меньше, чем над плоской на величину веса столба пара высотой h и сечением 1 $см^2$.

Очень интересен случай, когда жидкая фаза состоит из капель различного радиуса. *Над мелкими каплями давление пара больше, чем над крупными*, поэтому пар перемещается от мелких капель к крупным; на крупных он конденсируется, а на мелких образовывается вновь. В результате крупные капли растут за счет мелких.

Это явление легко наблюдать, если подышать на холодное стекло и затем следить (простым глазом или через лупу) за поведением образовавшихся капель. Аналогичное явление происходит в природе при конденсации атмосферной влаги.

Впервые зависимость давления насыщенного пара от кривизны поверхности жидкости была установлена в 1870 г. В. Томсоном (Кельвином), который доказал, что



$$\Delta p = \frac{\rho_{пар}}{\rho_ж - \rho_{пар}} \cdot \frac{2\alpha}{r}, \qquad (15)$$

где Δp есть уменьшение давления пара над вогнутой поверхностью при радиусе кривизны поверхности r, α — поверхностное натяжение, $\rho_ж$ — плотность жидкости, $\rho_{пар}$ — плотность пара.

Для вывода формулы (15) обратимся к рис. 236 и вспомним вывод формулы для капиллярного поднятия [формула (11) на стр. 469]. Формула для капиллярного поднятия h была выведена без учета

весьма малой разности барометрических давлений на высоте h. Мы исходили из того, что при смачивании жидкостью капиллярной трубки радиуса r сила поверхностного натяжения, действующего по периметру $2\pi r$, т. е. сила $2\pi r\alpha$, удерживает столбик жидкости высотой h и поперечным сечением πr^2. Мы считали тяжесть этого столбика равной $h\pi r^2 \cdot \rho_ж g$, т. е. не учитывали, что в атмосфере воздуха или же в атмосфере насыщенного пара должна иметься архимедова подъемная сила, вследствие чего истинный вес столбика жидкости будет $h\pi r^2 (\rho_ж - \rho_{пар})g$. Поэтому уточненная формула высоты капиллярного поднятия для случая, изображенного на рис. 236, т. е. в атмосфере насыщенного пара, имеет вид

$$h = \frac{2\alpha}{r(\rho_ж - \rho_{пар})g}.$$

Очевидно, что при термодинамическом равновесии давление насыщенного пара непосредственно над плоской поверхностью жидкости будет больше, чем давление пара на высоте h над вогнутой поверхностью мениска, на величину веса столбика пара высотой h, т. е. на величину

$$\Delta p = h\rho_{пар}g.$$

Подставляя сюда вышеприведенное выражение для h, получаем формулу (15).

Если бы радиус трубочки был крайне мал и высота поднятия жидкости соответственно весьма велика, то оказалось бы полезным учесть, что в поле тяжести плотность пара должна убывать с высотой по барометрическому закону (§ 98). В этом случае мы пришли бы к более точной форме уравнения Томсона:

$$RT \ln \frac{p_r}{p} = \pm \frac{2\alpha v}{r}, \qquad (16)$$

где p — давление насыщенного пара над плоской поверхностью, p_r — давление насыщенного пара над поверхностью жидкости с радиусом кривизны мениска r, v — мольный объем жидкости; знак плюс относится к случаю выпуклой наружу поверхности (когда $p_r > p$), знак минус — к случаю вогнутой поверхности.

Для воды при 0° С по формуле (16) получается, что давление насыщенного пара над каплями радиусом 10^{-7} *см* в 3,32 раза превышает давление пара над плоской поверхностью; при радиусе капель 10^{-6} *см* отношение указанных давлений равно 1,13, а при радиусе капель 10^{-5} *см* давление насыщенного пара капель превышает давление над плоской поверхностью всего на 1%.

§ 119. Понижение давления пара над раствором и повышение температуры кипения растворов. Законы Рауля

Если растворить в воде какое-нибудь нелетучее твердое или жидкое вещество и измерить давление водяного пара над раствором, то оказывается, что *давление пара над раствором всегда меньше, чем над чистой водой при той же температуре.*

Так, например, давление водяного пара над чистой водой при 70° составляет 233,7 *мм* рт. ст., но если приготовить раствор из 100 *г* воды и 53 *г* сахара, то при 70° давление насыщенного пара над таким раствором будет лишь 228 *мм* рт. ст., т. е. на 5,7 *мм* рт. ст. меньше, чем над чистой водой.

Дело происходит так, как будто растворенное вещество препятствует молекулам растворителя (например, молекулам воды) улетать из раствора в газовую атмосферу.

Для слабых растворов французский физик Рауль в 1886 г. нашел следующий закон: *понижение давления пара над раствором при данной температуре прямо пропорционально числу молекул растворенного вещества, содержащемуся в единице объема раствора, и не зависит от химического состава этих молекул.*

Часто выражают этот закон так: понижение давления пара над раствором при данной температуре пропорционально концентрации раствора и не зависит от химической природы растворенного вещества. Под «концентрацией» раствора обычно разумеют число молей растворенного вещества в 1 *л* раствора. Тот же закон для слабых растворов полнее выражается следующей формулой:

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{N}, \qquad (17)$$

где p_0 — давление над чистым растворителем при данной температуре, p — давление над раствором при той же температуре, n — число молей растворенного вещества в единице объема раствора, N — число молей растворителя в той же единице объема.

Независимость понижения давления пара от химической природы растворенного вещества весьма замечательна; причина этого явления пояснена в § 120.

Укажем одно явление, объясняемое понижением давления пара. Если взять вещество, растворяющееся в воде в больших количествах, и приготовить крепкий раствор его, то давление пара над раствором легко может оказаться меньше давления водяных паров, фактически имеющихся в воздухе. В таком случае раствор, оставленный на воздухе, не только не будет испаряться, но, наоборот, количество воды в нем будет увеличиваться за счет влаги, приходящей из воздуха. Неочищенная поваренная соль нередко «расплывается», как бы притягивая влагу из воздуха. Это объясняется наличием примешанного к соли хлористого магния $MgCl_2$, как раз обладающего описанным выше свойством.

Закон Рауля качественно справедлив не только для водных растворов, но для всех вообще растворов любых веществ в какой угодно жидкости; однако формула (17) является *точной* только в случае *весьма разбавленных растворов*, т. е. растворов малой концентрации; растворы, обладающие свойством электропроводности (электролиты), показывают отступление от формулы (17) даже в случае малой концентрации.

С понижением давления пара над раствором связано повышение температуры кипения раствора. Действительно, нагреем раствор до температуры T, при которой чистый растворитель закипел бы. Так как давление пара над раствором не достигает той величины, которая соответствует насыщению, то кипение не наступает. Чтобы оно наступило, необходимо повысить температуру до $T + \Delta T$. Так, например, если 7,5-процентный раствор хлористого калия в воде нагреть до 100°, то давление водяного пара над раствором будет только 734,1 *мм* (над чистой водой было бы 760 *мм*). Чтобы данный раствор закипел под атмосферным давлением, его нужно нагреть почти до 101°.

Повышение точки кипения раствора под данным давлением прямо пропорционально числу молекул растворенного вещества, содержащемуся в единице объема, и не зависит от химической природы растворенного вещества (этот закон тоже установлен Раулем и справедлив только для слабых растворов):

$$\Delta T = K\frac{n}{N}. \tag{18}$$

Константа K различна для различных растворителей, но не зависит от природы растворенного вещества.

С понижением давления пара над раствором связано также *понижение точки замерзания растворов* (§ 129).

§ 120. Осмотическое давление. Закон Вант-Гоффа

Если сухую, сморщенную изюминку бросить в воду, ягода набухает, делается шаровидной; она напряжена подобно оболочке резинового мячика. Содержимое ягоды осталось в ней, да, кроме того, внутрь вошла вода, очевидно, с некоторым напором. Оболочка ягоды представляет собой перепонку, проницаемую для воды и мало проницаемую для сахара и прочих веществ, содержащихся внутри ягоды. Подобные перепонки или перегородки называются *полупроницаемыми*. Полупроницаемые перегородки часто встречаются в растительном и животном мире, где их значение весьма велико. Их можно также изготовлять искусственно.

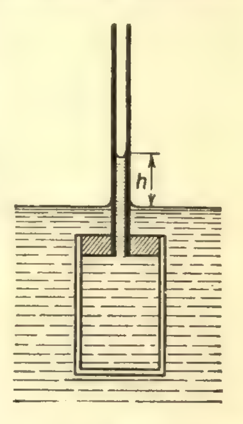


Рис. 237. К иллюстрации осмотического давления.

Положим, что имеется стакан с полупроницаемыми стенками, которые пропускают молекулы растворителя (например, воды), но не пропускают молекул растворенного вещества (скажем, сахара); стакан закрыт пробкой, в которую вставлена стеклянная трубка. Наполнив стакан водным раствором сахара, погрузим его в чистую воду (рис. 237). С течением времени мы увидим, что жидкость в трубке будет подниматься, пока не остановится на определенном уровне. Поднявшийся столбик, конечно, оказывает на раствор известное давление. Мы видим, что *раствор, отделенный от чистого растворителя перегородкой, непроницаемой для растворенного вещества, но проницаемой для растворителя, должен находиться под некоторым давлением, для того чтобы в него не проникали новые количества чистого растворителя*. Это давление называется *осмотическим*[1]) *давлением*.

Обозначим буквой π осмотическое давление, буквой v — тот объем раствора, в котором содержится 1 моль растворенного вещества, буквой R — универсальную газовую постоянную и буквой T — абсолютную температуру раствора; тогда (для растворов, не слишком крепких) оказывается:

$$\pi v = RT. \tag{19}$$

Приведенное уравнение формально тождественно с уравнением Клапейрона, следовательно, *растворенное вещество при небольшой концентрации ведет себя как идеальный газ*; *осмотическое давление* π есть не что иное, как парциальное давление растворенного вещества. Этот закон был установлен в 1886 г. голландским ученым (позже берлинским академиком) Вант-Гоффом[2]).

---

[1]) Термином «осмос» (греческое osmos — т о л ч о к) обозначается вообще процесс смешения двух жидкостей, разделенных перегородкой.

[2]) Для пояснения закона Вант-Гоффа обратимся к примеру смеси газов. Смесь газов можно рассматривать как «раствор газа в газе». Перегородка из металла

Сказанное позволяет наглядно объяснить поднятие столбика жидкости в описанном опыте (рис. 237). Молекулы растворенного вещества, как молекулы газа, наскакивают на непроницаемую для них поверхностную пленку жидкого столбика и отражаются от нее; отсюда возникает сила, заставляющая эту пленку подобно поршню двигаться кверху. Но так как пленка тянет за собой и весь столбик, то в конце концов сила давления молекул растворенного вещества уравновешивается тяжестью столбика.

С помощью уравнения $\pi v = RT$ легко вычислить для любого раствора осмотическое давление. Пусть, например, в 1 *л* содержится 0,1 моля растворенного вещества, не являющегося электролитом (например, сахара), при температуре 27° С. В таком случае v равняется 10 *л/моль*, и осмотическое давление

$$\pi = \frac{RT}{v} = \frac{0{,}082 \cdot 300}{10} = 2{,}46 \text{ ат}.$$

Мы видим, что осмотическое давление не зависит от химической природы ни растворителя, ни растворенного вещества (если это последнее не является электролитом).

Руководствуясь законом Вант-Гоффа, можно следующим образом объяснить понижение давления пара над раствором нелетучего вещества. Молекулы растворенного вещества, наскочив на поверхностную пленку и отразившись от нее, встречают молекулы растворителя, движущиеся навстречу им, т. е. по направлению к пленке. Некоторые из этих молекул растворителя могли бы прорвать поверхностную пленку и вылететь в атмосферу пара, но встретившимися молекулами растворенного вещества они отбрасываются вниз. Поэтому численность молекул в паре, а значит, и давление пара уменьшаются.

Так как понижение давления пара над раствором и осмотическое давление сводятся к одной и той же причине, то между величиной осмотического давления и понижением давления пара над раствором существует количественная связь: *для разведенных растворов относительное уменьшение давления пара, повышение точки кипения и понижение точки замерзания прямо пропорциональны осмотическому давлению.*

§ 121. Электролитическая диссоциация. Закон Оствальда

Совершенно чистая вода не проводит электрического тока. Хлористоводородный газ HCl (как вообще газы) также является непроводником электрического тока. Но если растворить в воде некоторое количество хлористоводородного газа, то полученный раствор будет хорошо проводить электричество. Можно было бы заменить в предыдущем примере хлористоводородный газ каким-нибудь другим веществом (твердым, жидким или газообразным), принадлежащим к обширному классу так называемых электролитов [1]).

Сильными электролитами называют вещества, которые при растворении в воде почти полностью диссоциируют на ионы; вещества, у которых при растворении в воде только часть молекул распадается на ионы, называют *слабыми электролитами.*

палладия непроницаема для азота, но проницаема для водорода. Вообразим замкнутый цилиндр, разделенный на два отделения легкоподвижным поршнем из палладия, причем по одну сторону поршня помещен азот, а по другую — водород. Водород проникает сквозь поршень; в результате поршень начинает передвигаться от азота к водороду. Для равновесия поршня нужно приложить к нему в сторону азота силу, равную парциальному давлению азота (при этом водород, для которого атмосфера азота, по закону Дальтона, равносильна пустоте, будет распределен равномерно по всему цилиндру). Водород аналогичен растворителю, азот — растворенному веществу. Сила, уравновешивающая поршень, представляет собой парциальное давление азота, которое можно также рассматривать как осмотическое давление.

[1]) Греческое слово lyo — р а з л а г а ю.

Не следует думать, что ионы возникают лишь тогда, когда, например, кристаллик соли попадает в воду. У многих твердых тел в узлах кристаллической решетки находятся не молекулы, а ионы. В химических реакциях образование ионов сопровождается обменом электронов между атомами. При *электронном обмене* одни атомы отдают электроны, превращаясь в положительные ионы, а другие принимают электроны, становясь отрицательными ионами, после чего те и другие вследствие взаимного электрического притяжения образуют электрополярную, или, как говорят иначе, *гетерополярную* молекулу. Число электронов, которое при этом отдается или принимается атомом того или иного элемента, определяется его *валентностью.*

Действие растворителя заключается лишь в том, что он расщепляет молекулу сложного вещества на те ионы, которые в ней уже заранее содержатся. Распад молекул на ионы совершается по следующим схемам:

Кислоты диссоциируются на ионы водорода (*протоны*) и ионы кислотного остатка. Например,

$$HNO_3 \rightleftarrows H^+ + NO_3^-.$$

Ионы H^+ при этом *гидратируются*, т. е. соединяются с молекулами воды, образуя сложные («комплексные») ионы H_3O^+ — так называемые *ионы гидроксония.* Именно ионы гидроксония являются носителями «кислотных» свойств растворов кислот (а не свободные протоны).

Щелочи диссоциируют на ионы металла и ионы *гидроксила* (водного остатка). Например,

$$NaOH \rightleftarrows Na^+ + OH^-.$$

Соли диссоциируют на ионы металла и ионы кислотного остатка. Например,

$$NaNO_3 \rightleftarrows Na^+ + NO_3^-.$$

Вода также в незначительной степени диссоциирует по уравнению

$$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-.$$

Основной причиной разрушительного действия воды на молекулы (электролита) является ее способность уменьшать напряженность электростатического поля в определенное число раз, равное ее *диэлектрической постоянной* (для воды $\varepsilon = 81$). В отношении диэлектрической постоянной, а отсюда и по диссоциирующей способности вода превосходит почти все известные жидкости. Из последних сравнительно большую диэлектрическую постоянную имеют глицерин, метиловый спирт, этилен-гликоль и винный (этиловый) спирт; большинство же жидкостей имеет диэлектрические постоянные, мало превосходящие единицу, т. е. эти жидкости почти совершенно не «экранируют» электрических сил, например диэлектрическая постоянная бензола 2,3, бензина — еще меньше. Поэтому в этих жидкостях соли, кислоты и щелочи почти не растворяются и не диссоциируют на ионы.

При равновесии в растворе число молекул, возникающих в единицу времени благодаря случайным столкновениям противоположно заряженных ионов, равно числу молекул, распадающихся в тот же промежуток времени на ионы. Обозначим общее число молекул растворенного вещества в единице объема буквой N. *Степень диссоциации*, т. е. отношение числа молекул, распавшихся на ионы, к общему числу молекул растворенного вещества, обозначим α. Число молекул, не подвергнувшихся распаду, равно, очевидно, $(1 - \alpha)N$, число положительных ионов равно αN и таково же число отрицательных ионов (в том случае, конечно, если молекула при диссоциации распадается только на два иона).

Вероятность соударения какого-либо отрицательного иона с одним из положительных ионов пропорциональна числу положительных ионов αN. Общее число соударений ионов, а значит, и число молекул, в о з н и к а ю щ и х в единицу времени, пропорционально, во-первых, вероятности, что данный отрицательный ион встретится с каким-либо положительным ионом, и, во-вторых, числу отри-

цательных ионов; следовательно, оно пропорционально произведению $\alpha N \cdot \alpha N$. Если коэффициент пропорциональности обозначить буквой K_1, то мы можем написать, что число молекул, возникающих в единицу времени, равно $K_1\alpha^2N^2$.

С другой стороны, очевидно, что число молекул, распадающихся в единицу времени на ионы в связи с ионизирующим действием растворителя, будет тем больше, чем больше при прочих равных условиях общее число нераспавшихся молекул. Если в данном случае коэффициент пропорциональности мы обозначим буквой K_2, то мы можем написать, что число молекул, распадающихся в единицу времени на ионы, равно:

$$K_2(1-\alpha)N.$$

Так как при равновесии процесс диссоциации должен уравновешиваться процессом воссоединения ионов, то

$$K_1\alpha^2N^2 = K_2(1-\alpha)N,$$

откуда

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha}N = \text{const}. \tag{20}$$

Это уравнение известно под названием *закона Оствальда*.

Влияние температуры на интенсивность процессов воссоединения ионов и диссоциации в предыдущих рассуждениях не было учтено, поэтому правую часть написанного уравнения, которую мы назвали константой, в действительности следует рассматривать как величину, неизменную только в том случае, если температура раствора постоянна. Закон Оствальда связывает, таким образом, степень диссоциации α с числом молекул N растворенного вещества в единице объема, т. е. с концентрацией раствора, но он не устанавливает зависимости степени диссоциации от температуры.

Нетрудно видеть, что если N в законе Оствальда убывает, то $\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)}$ должно возрастать, следовательно, α должна приближаться к единице. Это означает, что *при разведении раствора степень диссоциации растет*. В пределе в бесконечно разбавленном растворе степень диссоциации должна быть равна единице, т. е. все молекулы растворенного вещества должны быть диссоциированы на ионы. В разбавленном растворе ионы более удалены друг от друга, и возможность образования недиссоциированных молекул понижена.

Закон Оствальда может быть выведен также термодинамическим путем в предположении, что молекулы растворенного вещества и ионы в растворах не взаимодействуют друг с другом. Однако взаимодействием ионов можно пренебречь лишь в случае весьма разбавленного раствора, когда ионы достаточно удалены друг от друга. Поэтому закон Оствальда является предельным законом. Закон Оствальда относится к слабым электролитам; для сильных же электролитов диссоциацию считают почти полной.

Теория сильных электролитов была построена в 1923 г. и в последующие годы Дебаем и Хюккелем. В основе теории Дебая и Хюккеля лежит представление, что каждый ион растворенного вещества окружен в растворе некоторым числом ионов противоположного знака, которые удерживаются силами электролитического притяжения и составляют как бы *ионную атмосферу*. Эту ионную атмосферу, однако, не следует представлять себе как вполне устойчивое образование; она легко разрушается, но вместе с тем и легко восстанавливается.

Теория Дебая — Хюккеля получила детальное математическое развитие и объяснила ряд отступлений сильных электролитов от простых законов слабых электролитов. Однако некоторые факты не охватываются теорией Дебая — Хюккеля, что, возможно, является следствием недооценки роли взаимодействия растворенного вещества с молекулами растворителя.

От проницательного взгляда Дмитрия Ивановича Менделеева не ускользнул факт, что взаимодействие растворителя с растворяемыми веществами имеет характер химического взаимодействия; молекулы растворенного вещества и раство-

рителя (например, серной кислоты и воды) могут образовать в растворе нестойкие химические соединения (*гидраты*) Указанный Д И. Менделеевым химический подход к растворам приобретает все большее значение.

Считают, что ион растворенного вещества, притягивая к себе молекулы растворителя, оказывается окруженным этими молекулами, как некоторой оболочкой; ее называют *сольватной оболочкой*, а для водных растворов — *гидратной оболочкой*.

В весьма концентрированных растворах явления еще более осложняются. Частые встречи и столкновения ионов приводят здесь, даже в случае сильных электролитов, к наличию значительного числа недиссоциированных молекул и даже к возникновению двойных — *ассоциировинных молекул* растворенного вещества. Кроме того, могут возникать сложные *комплексные ионы*, образующиеся в результате присоединения ионов к недиссоциированным молекулам

§ 122. Абсорбция. Закон Генри

Газ, не действующий химически на жидкость, может тем не менее поглощаться ею при соприкосновении с ней. Такое явление называется *абсорбцией* [1]).

Для конкретности представим себе, что на дне закрытого сосуда находится вода, а над водой — газообразный кислород. Некоторые молекулы кислорода будут проникать в воду и странствовать между ее молекулами. Другие кислородные молекулы будут, наоборот, вылетать из жидкости в газовую атмосферу над ней. Когда вода и кислород находятся в равновесии, то число молекул кислорода, переходящих за единицу времени из газообразной фазы в жидкую, будет равно числу молекул, переходящих за то же время из жидкой фазы в газообразную.

Если давление кислорода увеличим вдвое, то число кислородных молекул, имеющих шансы быть поглощенными жидкостью, увеличится вдвое (если поглощенное ранее количество молекул газа не так велико, чтобы препятствовать дальнейшему поглощению его).

Отсюда вытекает закон, установленный английским ученым Генри в 1803 г.: *при не слишком больших давлениях газа абсорбируемое количество газа (при данной температуре) пропорционально его давлению.*

Легко сообразить, что, поскольку справедлив закон Генри, *объем газа, абсорбированного* при данной температуре *данным количеством жидкости*, будет при всяком давлении выражаться одним и тем же числом. Например, 1 объем воды поглощает при 15° С 1 объем углекислого газа, 0,035 объема кислорода, 0,017 объема азота и т. д. Числа эти называют *коэффициентами абсорбции*.

В связи с относительно большим поглощением водой углекислоты до недавнего времени предполагали, что водяные растения дышат кислородом, который они усваивают из поглощенной водой углекислоты. Однако в 1940 г. советские ученые Виноградов и Тейсс показали, что зеленые растения в воде дышат кислородом воды, а не CO_2.

Вследствие того, что коэффициент абсорбции, т. е. растворимость, кислорода в воде в два раза больше, чем коэффициент абсорбции азота, состав воздуха в воде («водяного воздуха») существенно отличается от состава атмосферного воздуха. Атмосферный воздух содержит по объему 78% азота и 21% кислорода; воздух, выделяемый из воды, содержит 63% азота и 36% кислорода. Обогащенность «водяного воздуха» кислородом имеет, по-видимому, большое биологическое значение.

Подобно тому как в системе жидкости и ее насыщенного пара повышение температуры благоприятствует переходу молекул из жидкой фазы в парообразную, так в системе жидкости и газа, ею абсорбируемого, повышение температуры благоприятствует переходу молекул газа из жидкости в газообразную фазу; это значит, что с повышением температуры коэффициент абсорбции уменьшается. Впрочем, многие металлы представляют собой исключение из этого правила.

---

[1]) Латинское слово absorbtio — поглощение.

Способностью воды абсорбировать при пониженной температуре и повышенном давлении значительное количество углекислоты широко пользуются для изготовления шипучих напитков

Известно, что при постепенном нагревании воды из нее выделяется все больше и больше газовых пузырьков; это — результат уменьшения коэффициента абсорбции. Кипячением можно совершенно освободить воду от абсорбированных ею газов.

Из смеси газов жидкость поглощает такое количество каждого газа, какое соответствует его парциальному давлению. Поэтому, например, количество поглощаемой углекислоты не возрастет, если в занимаемое ею над водой пространство накачать воздух.

Твердые металлы также обладают способностью поглощать газы. Так, платина, железо и другие металлы в калильном жару поглощают водород, а железо легко поглощает также окись углерода CO; газы эти удерживаются металлами и по охлаждении последних (это явление называется *окклюзией* [1])).

Строго говоря, под абсорбцией понимают только те случаи поглощения газов, когда поглощаемый газ растворяется в объеме поглощающего вещества (безразлично — жидкости или твердого тела). При поглощении газов твердыми мелкозернистыми или пористыми телами бóльшая часть поглощенного газа не распределяется по всему объему, а удерживается в весьма уплотненном виде на поверхности пор и зерен; такое поглощение газа называют *адсорбцией* (§ 131). Таким образом, абсорбция — это, в сущности, растворение газа, а адсорбция — его уплотнение на микроповерхности тел. Следует отметить, однако, что при поглощении газов металлами, имеющими микрозернистое строение, явления адсорбции и абсорбции не всегда могут быть точно разграничены.

§ 123. О столкновении противоположных процессов в молекулярно-тепловых явлениях

Физика дает неисчерпаемое число примеров, иллюстрирующих положения диалектического материализма. Так, изучая молекулярно-тепловые явления, мы замечаем, что все разновидности этих явлений (диффузия, испарение, конденсация, растворение и т. д.) в основе своей представляют сосуществование, борьбу двух противоположных направлений в развитии явлений. Здесь обнаруживается всеобщий закон диалектики природы: всем явлениям свойственны внутренние противоречия, все они имеют свою отрицательную и положительную сторону; процесс развития от низшего к высшему протекает в борьбе противоположных тенденций.

Ленин подчеркивал, что единство противоположностей имеет относительный, временный характер в отличие от постоянного столкновения и неисчерпаемой борьбы противоположностей. «Единство (совпадение, тождество, равнодействие) противоположностей условно, временно, преходяще, релятивно. Борьба взаимоисключающих противоположностей абсолютна, как абсолютно развитие, движение» (Ленин, «Философские тетради», Госполитиздат, 1947, стр. 328).

Кто механистически подходит к явлениям природы, тот или не видит, как саморазвитие явлений вызывается борьбой противоположностей, или же трактует противоположности плоско как силы, направленные в разные стороны и проявляющие свое «единство» якобы в том, что при равенстве и прямом антагонизме они взаимно уравновешиваются.

Если мы хотим иллюстрировать борьбу противоречий примерами из области механики, то нужно обратиться не к случаю простого равновесия сил, а к содержанию третьего закона механики, который вместе с тем является одним из самых общих законов физики. *Действие* всегда порождает равное *противодействие*.

---

[1]) От латинского слова occludo — з а п и р а ю.

Здесь утверждается полная неразрывность, обязательное сосуществование, и в этом смысле единство действия и противодействия. Действие и противодействие являются двумя неотъемлемыми сторонами взаимодействия тел; в совокупности они и составляют взаимодействие. Поскольку действие и противодействие приложены к разным телам, которые взаимодействуют, а не к одному телу, то, очевидно, ни о каком уравновешивании действия и противодействия не может быть и речи. Когда имеется о д н о действие и противодействие, т. е. одно взаимодействие, равновесие вообще невозможно; здесь неизбежно развивается движение обоих взаимодействующих тел. Только в особых частных случаях, когда имеется по меньшей мере д в а равных и антагонистических взаимодействия, создается равновесие. Так, взаимное притяжение магнита и куска железа при их полном сближении порождает упругую деформацию прижатых друг к другу поверхностей магнита и железа, что вызывает между магнитом и железом упругое взаимоотталкивание; магнитное взаимодействие в данном случае уравновешивается упругим взаимодействием.

Молекулярно-тепловые явления дают нам особенно показательные примеры борьбы и единства противоположностей в природе. Во всех молекулярно-тепловых явлениях всегда происходит столкновение двух противоположных процессов, причем пока преобладает один из них, то явление развивается, когда же устанавливается одинаковая интенсивность встречных процессов, то система приходит к термодинамическому равновесию, которое по сути дела представляет собой равновесие статистическое (§ 118).

Обратимся, например, к явлению самодиффузии газа (§ 92). Выделим мысленно некоторую часть объема, занятого газом. Из этой части газа молекулы распространяются, диффундируют во все стороны; однако и внутрь этой части газа также устремляются молекулы, которые самодиффундируют из окружающего объема. Здесь один процесс состоит в *рассеивании молекул* из рассматриваемой нами части, другой —в *концентрировании молекул.* При термодинамическом равновесии указанные процессы компенсируют друг друга. Но если в выделенной части газа имелось относительное сгущение молекул, то число молекул, покидающих эту часть газа, окажется больше, чем число молекул, вступающих в нее. В итоге избыток молекул из местного сгущения постепенно распространится по всему газу.

Такова же картина диффузии одного газа в другой. Молекулы диффундирующего газа, сконцентрированные в одной части объема, рассеиваются в другие части объема, а те, которые попали туда раньше, движутся обратно, т. е. концентрируются.

Процесс испарения жидкости также *слагается из двух молекулярных потоков*: потока молекул из жидкости в пар и обратного потока молекул из пара в жидкость. Когда преобладает первый поток, происходит испарение, при преобладании второго потока — конденсация, при их равенстве имеет место равновесие жидкости и ее насыщенного пара.

Аналогично протекают молекулярные процессы при сублимации и плавлении твердого тела, при растворении кристалла в жидкости и т. д. При всех этих так называемых фазовых превращениях явление развивается вследствие столкновения двух противоположных молекулярных потоков.

В явлениях теплопередачи теплопроводностью и излучением всегда создаются *два встречных потока энергии* (энергии молекулярных колебаний, энергии излучения). Преобладание одного из этих потоков над другим приводит к тепловому переносу энергии по законам Фурье и Стефана — Больцмана.

В химических реакциях также разыгрывается борьба двух противоположных процессов: исходные вещества, химически реагируя между собой, *превращаются в продукты реакции*, а образовавшиеся продукты реакции, реагируя между собой, *обратно превращаются в исходные вещества.* Эти два противоположных процесса в конце реакции уравновешивают друг друга; к этому моменту достигается определенная, зависящая от температуры и давления пропорция между исходными веществами и продуктами реакции. В некоторых случаях прямой про-

цесс настолько преобладает над обратным, что реакция проходит до практически полного превращения исходных веществ в продукты реакции.

В явлениях термической и электрохимической диссоциации молекул происходит борьба процессов *распада* и *восстановления* молекул. Относительное, подвижное равновесие между этими процессами определяет, как было показано в § 121, степень диссоциации.

Изучая распределение газа в поле тяжести, изучая распределение растворенного вещества между двумя соприкасающимися растворителями и другие явления такого рода, мы наблюдаем борьбу между процессами теплового рассеяния молекул и встречным процессом концентрирования молекул в поле сил. *Подвижное равновесие* между этими противоположными процессами определяется одним из важнейших законов молекулярно-теплового движения — e-положением Больцмана (§ 98).

Молекулярно-тепловые процессы являются всеобщими. Испарение, конденсация, растворение, диссоциация молекул, перераспределение молекул, химические реакции, теплообмен и т. д.— все эти явления входят в более сложные геологические, биологические, физиологические процессы. В таких более сложных явлениях природы, а также и во всех технологических процессах тоже разыгрывается борьба противоположностей. Но понятно, что по мере сочетания многих явлений в одно более сложное усложняется и сущность противоположных начал в развитии такого более сложного явления.

ГЛАВА XIX

ФИЗИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 124. Строение кристаллов

В настоящее время термином *твердое тело* принято пользоваться для обозначения тел кристаллического строения. Аморфные (некристаллические) тела — стекло, смолу, вар и т. п. — рассматривают как переохлажденную жидкость. Действительно, свойства аморфных тел в общем сходны со свойствами весьма вязких жидкостей, тогда как свойства тел кристаллического строения глубоко отличны от свойств жидкостей.

Жидкости и аморфные тела *изотропны*, т. е. физические свойства этих тел по всем направлениям одинаковы. Главная особенность кристаллических тел заключается в их *анизотропности*, т. е. в том, что у кристаллов физические свойства неодинаковы для различных направлений. Анизотропность кристаллов, в частности, сказывается в том, что по некоторым плоскостям кристалл легко может быть расколот (эти плоскости называют *плоскостями спайности*), тогда как по другим направлениям прочность кристаллов на сдвиг может оказаться весьма значительной. Кристалл проявляет неодинаковую упругость при растяжении перпендикулярно к граням и под углом к граням. В кристалле имеются направления наибольшей и наименьшей упругости. Теплопроводность кристалла также неодинакова для различных направлений.

У некоторых тел кристаллического строения, например у металлов, анизотропность не всегда является резко выраженной. При ближайшем рассмотрении оказывается, что такие тела состоят из множества мелких кристаллов (*кристаллитов* или *зерен*), расположенных беспорядочно; такие тела называют *поликристаллами* в отличие от *монокристаллов*[1]). В прокатанном металле, в оттянутой проволоке замечается некоторая упорядоченность в расположении кристаллов, и в связи с этим, несмотря на поликристаллическое строение, металл обнаруживает анизотропность.

Резко выраженная анизотропность монокристаллов является следствием упорядоченного размещения частиц кристалла в узлах

---

[1]) От греческого слова monos — один, единый.

кристаллической решетки (стр. 298). Кристаллическая решетка слагается из *ячеек*; под ячейкой понимают такую часть кристаллической решетки, перемещение которой параллельно самой себе (рис. 238) позволяет получить всю кристаллическую решетку.

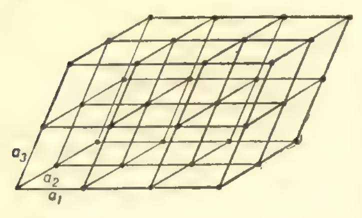


Рис. 238. Пространственную решетку можно получить, перемещая ячейку (с ребрами a_1, a_2, a_3) параллельно самой себе.

Представление об упорядоченном расположении частиц в кристаллах было высказано в виде гипотезы Браве в 1848 г. В строгую научную систему кристаллография была впервые приведена трудами замечательного русского ученого Евграфа Степановича Федорова, который создал математическое учение о симметрии и исследовал все мыслимые пространственные расположения частиц кристалла, исходя из того, что плотное заполнение пространства ячейками возможно только при определенной форме ячеек. В 1881 г. Федоров и вслед за ним (в том же году) Шенфлис разработали систематику возможных упорядоченных расположений частиц, исходя из соображений о симметрии. Федоровым и Шенфлисом было установлено, что может существовать 230 различных «пространственных групп», объединяемых по признакам симметрии в 32 класса симметрии.



Евграф Степанович Федоров (1853—1917)

В 1913—1914 гг. английские ученые У. Г. и У. Л. Брэгги и русский ученый Юрий Викторович Вульф, просвечивая кристаллы лучами Рентгена (по способам, предложенным Лауэ и Дебаем), доказали, что гипотеза кристаллических решеток является правильной, и положили начало *рентгеноструктурному анализу*, который в настоящее время позволяет с уверенностью говорить о расположении частиц в кристаллах (методы рентгеноструктурного анализа будут пояснены во втором томе курса).

Исследование кристаллов посредством лучей Рентгена показало, что некоторые типы кристаллических решеток встречаются в природе особенно часто. Три весьма важных вида решеток показаны на

рис. 239—242. Решетка, изображенная на рис. 240, отличается от простой кубической решетки (рис. 239) тем, что узлами являются не только вершины куба, но также и центры всех граней куба, поэтому указанную решетку называют *кубической решеткой с центрированными гранями*. В случае, показанном на рис. 241, частицы расположены в вершинах элементарных кубов и в центре каждого куба,— это решетка с *центрированными кубами* (иначе ту же решетку называют *кубической пространственно-центрированной*). В случае, показанном на рис. 242, частицы расположены в вершинах параллелепипеда и одна частица на каждый параллелепипед —

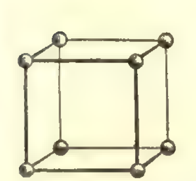


Рис. 239. Простая кубическая решетка.

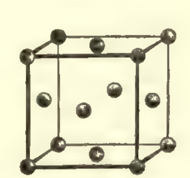


Рис. 240. Кубическая решетка с центрированными гранями.

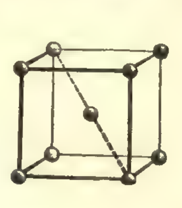


Рис. 241. Решетка с центрированными кубами.

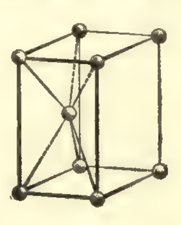


Рис. 242. Гексагональная решетка.

в вершине четырехгранной пирамиды, основанием которой служит половина нижней грани параллелепипеда,— это *гексагональная решетка*[1]).

Кубическая пространственно-центрированная и гексагональная решетки замечательны в том отношении, что обе эти решетки получаются при плотнейшей упаковке шаров. Представим себе, что мы плотно уложили два слоя шаров; если посмотреть сверху, то некоторые лунки между шарами окажутся «сквозными», под другими лунками будет находиться один из шаров нижнего слоя (такие лунки назовем «глухими»); если шары третьего слоя уложить в глухие лунки и по такому принципу продолжать укладку последующих слоев, то получается модель кубической пространственно-центрированной решетки; если шары третьего слоя уложить в сквозные лунки и

---

[1]) По форме ячейки различают семь *кристаллографических систем*. Обозначим ребра ячейки (параллелепипеда) через a, b и c, углы между ребрами — через α, β и γ. Семь кристаллографических систем соответствуют нижеследующим формам ячеек:

1) кубическая	$a=b=c$;	$\alpha=\beta=\gamma=90°$.
2) тетрагональная	$a=b\neq c$;	$\alpha=\beta=\gamma=90°$.
3) ромбическая	$a\neq b\neq c$;	$\alpha=\beta=\gamma=90°$.
4) ромбоэдрическая . . .	$a=b=c$;	$\alpha=\beta=\gamma\neq 90°$.
5) гексагональная	$a=b\neq c$;	$\alpha=\beta=90°$; $\gamma=60°$
6) моноклинная	$a\neq b\neq c$;	$\alpha=\gamma=90°$; $\beta\neq 90°$.
7) триклинная	$a\neq b\neq c$;	$\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq 90°$.

так продолжать укладку верхних слоев, то получается модель гексагональной решетки (рис. 243).

В кубической решетке с центрированными гранями кристаллизуются медь, серебро, золото, свинец, никель, платина, железо (эту кристаллическую модификацию железа обозначают γ-Fe), алюминий и многие другие металлические и неметаллические вещества.

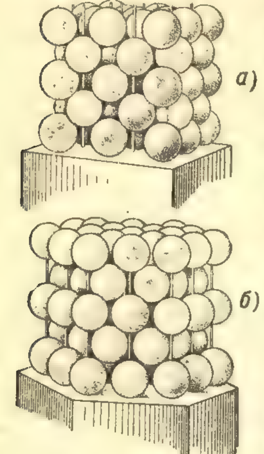


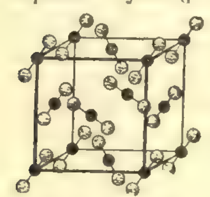
Рис. 243. Два способа простейшей укладки шаров: *а* — модель решетки центрированных кубов; *б*— модель гексагональной решетки.

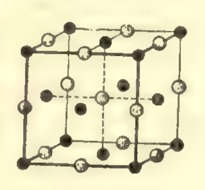
В решетке с центрированными кубами кристаллизуются щелочные металлы (литий, натрий, калий, рубидий, цезий), хром, молибден, вольфрам, железо (эту модификацию железа обозначают α-Fe), многие сплавы и многие другие вещества.

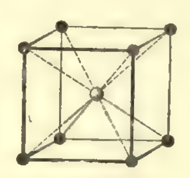
В гексагональной решетке кристаллизуются магний, цинк, другие металлы и многие сплавы.

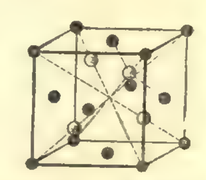
У металлов в узлах кристаллической решетки находятся положительные ионы металла (катионы). Между ними реют электроны, образуя как бы *электронный газ*, заполняющий объем, занятый кристаллической решеткой ионов металла.

У некоторых веществ в узлах кристаллической решетки расположены молекулы, — таково, например, строение кристаллов углекислоты; атомы углерода, входящие в состав молекул углекислоты, образуют кубическую решетку с центрированными гранями; атомы кислорода расположены по обе стороны атомов углерода на отрезках прямых, определенным образом ориентированных относительно ребер элементарного куба (рис. 244).


Рис. 244. Строение кристаллов углекислоты.


Рис. 245. Решетка каменной соли NaCl.


Рис. 246. Решетка хлористого цезия CsCl.


Рис. 247. Решетка цинковой обманки ZnS.

У большинства химических соединений (неорганических) в узлах кристаллической решетки расположены ионы; такое строение имеет большинство минералов. На рис. 245 показано весьма распространенное в природе строение кристаллов каменной соли

$NaCl$; ионы натрия (будем считать, что они изображены на рис. 245 черными шариками) образуют кубическую решетку с центрированными гранями, аналогично расположены и ионы хлора; таким образом, решетка $NaCl$ представляет собой сочетание двух как бы вставленных друг в друга кубических решеток с центрированными гранями.

Кристаллы хлористого цезия $CsCl$ построены из двух вставленных друг в друга простых кубических решеток (рис. 246); решетку $CsCl$ можно рассматривать также как кубическую решетку одного рода ионов (например, цезия), пространственно-центрированную ионами другого рода (хлора).

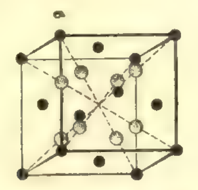


Рис. 248. Решетка флюорита CaF_2.

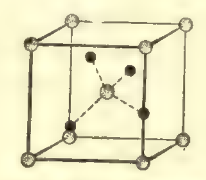


Рис. 249. Решетка куприта Cu_2O.

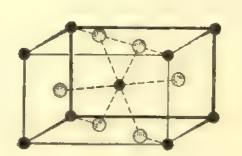


Рис. 250. Решетка рутила TiO_2.

Несколько сложнее решетка цинковой обманки ZnS. Здесь ионы одного рода образуют куб с центрированными гранями; ионы другого рода расположены на четырех диагоналях куба, на равных расстояниях от четырех ближайших ионов противоположного знака (рис. 247).

На рис. 248—250 показано: весьма распространенное в мире кристаллов строение флюорита CaF_2, решетки куприта Cu_2O и рутила TiO_2 (черные шарики изображают положение: в первом случае — ионов кальция, во втором — ионов меди, в третьем — ионоз титана).

§ 125. Понятие о кристаллохимии

Раньше предполагали, что причиной упорядоченного размещения частиц в кристаллах является анизотропность самих атомов: думали, что взаимодействие между атомами в сильной мере зависит от взаимной ориентации атомов. Однако оказалось, что главная причина упорядоченного размещения частиц в кристаллах более проста — это *принцип плотнейшей упаковки*. Вследствие взаимного притяжения частицы стремятся разместиться возможно ближе друг к другу, но при чрезмерном сближении проявляются силы отталкивания, вследствие чего каждая частица может быть уподоблена как бы непроницаемому шарику определенного радиуса. В случае однородных частиц часто получаются, как было пояснено в предыдущем параграфе, решетки плотнейшей упаковки шаров (решетка с центрированными кубами и гексагональная). При плотнейшей упаковке шаров 26% объема приходится на пустоты между шарами.

В кристаллах химических соединений положительные и отрицательные ионы могут быть уподоблены шарикам *неодинакового радиуса*; в этом случае плотная упаковка шаров будет соответствовать (в зависимости от соотношения радиусов положительного и отрицательного ионов) тому или другому типу кристаллической решетки. Основываясь на новейших данных о радиусах ионов, норвежский ученый Гольдшмидт показал, что правило плотнейшей упаковки позволяет, исходя из химической формулы вещества, теоретически предвидеть кристаллическое строение вещества.

Исследования Гольдшмидта и его предшественников Косселя и Магнуса привели к созданию и быстрому развитию новой научной дисциплины — *кристаллохимии*. В основе кристаллохимии лежат наглядные геометрические соображения о том, какие виды кристаллических решеток могут получиться при том или ином способе плотной укладки шариков неодинакового радиуса. Анизотропность силового поля ионов сказывается, во-первых, в том, что в одних случаях осуществляется один способ плотной упаковки атомов, в других случаях — другой, во-вторых, в некоторых закономерных отступлениях от принципа плотной упаковки.

Принятое в кристаллохимии уподобление атомов и ионов несжимаемым шарикам, конечно, является условным — это только «модель» междуатомных взаимодействий, геометрическое изображение явлений динамического характера. Истинные радиусы атомов и ионов меньше принимаемых в кристаллохимии. В действительности атомы (или ионы) в кристалле не соприкасаются друг с другом и не являются неподвижными, но колеблются относительно положений равновесия в узлах кристаллической решетки. В связи с тепловым расширением кристалла приходится считать, что кристаллохимический радиус атома при повышении температуры возрастает. Более того, одному и тому же атому в кристаллохимии приходится приписывать в некоторых случаях не вполне одинаковые размеры. Это является следствием того обстоятельства, что кристаллохимический радиус атома геометрически изображает эффект взаимодействия не только соседних атомов, но и суммарный эффект взаимодействия всех атомов.

Исследования Гольдшмидта показали, что важнейшим признаком физической систематики кристаллов является число ближайших равноудаленных частиц, окружающих какую-либо из частиц кристалла. Это число называют *координационным числом решетки*, или, иначе, *антуражем*. Для пояснения понятия «антураж» [1]) обратимся к рис. 240, где изображена кубическая решетка с центрированными гранями. Вообразим в пространстве ряд соприкасающихся ячеек, подобных той, которая показана на рис. 240; нетрудно сообразить, что в указанной решетке каждый атом окружен две-

[1]) Французское слово entourage — окружение, среда.

надцатью равноудаленными соседями, иначе говоря, указанная решетка характеризуется антуражем 12. Рассматривая рисунки других решеток, нетрудно убедиться в справедливости нижеследующей таблицы антуражей:

Координационное число решетки (антураж)	Тип решетки
12	Кубическая с центрированными гранями
8	Гексагональная плотнейшая Кубическая пространственно-центрированная Решетка хлористого цезия CsCl
6	Простая кубическая Решетка каменной соли NaCl
4	Решетка цинковой обманки ZnS
8 и 4	Решетка флюорита CaF_2
6 и 3	Решетка рутила TiO_2
4 и 2	Решетка куприта Cu_2O
3 и 1	Молекулярные решетки, например решетка CO_2

Для пояснения характера кристаллохимических закономерностей приведем в качестве примера одно из простейших кристаллохимических правил, касающееся того типа соединений, с которыми физику чаше всего приходится иметь дело, а именно бинарных соединений: AX и AX_2 (где обычно A — металл, X — металлоид). Основываясь на геометрических расчетах Магнуса условий плотной упаковки, Гольдшмидт установил и на большом числе примеров проверил нижеследующее правило:

Когда отношение радиусов ионов $\left(\frac{R_A}{R_X}\text{ или же }\frac{R_X}{R_A}\right)$ лежит в пределах		осуществляется решетка с антуражем
0,225	4,45	4
0,415	2,4	6
0,732	1,37	8
1	1	12

Так, из 16 соединений

MgO	CaO	SrO	BaO
MgS	CaS	SrS	BaS
MgSe	CaSe	SrSe	BaSe
MgTe	CaTe	SrTe	BaTe

для 15 соединений, а именно для всех перечисленных, кроме MgTe, отношение радиусов ионов лежит в пределах от 0,41 до 1,06. Согласно приведенному правилу это означает, что указанные 15 соединений должны кристаллизоваться в решетке с антуражем 6, т. е.

в решетке типа NaCl. И действительно, рентгенографическое изучение перечисленных кристаллов показало, что все они имеют структуру каменной соли. Для MgTe отношение радиуса иона магния к радиусу иона теллура равно 0,37. По вышеприведенному правилу Гольдшмидта это указывает на то, что MgTe должен кристаллизоваться в решетке с антуражем 4, т. е. в решетке типа CsCl. И действительно установлено, что MgTe имеет структуру CsCl.

Вышеприведенное правило, как и другие кристаллохимические правила, допускает некоторые исключения, которые, однако, в большинстве случаев можно предвидеть, если, помимо принципа плотной упаковки, принять во внимание учение о «поляризуемости ионов» (об этом будет речь во втором томе).

Геометрические представления, положенные Гольдшмидтом в основу кристаллохимии, в 1933 г. проф. Анатолий Федорович Капустинский дополнил некоторыми энергетическими выводами. Кристаллохимические закономерности, установленные Гольдшмидтом и Капустинским, были широко и продуктивно использованы акад. Александром Евгеньевичем Ферсманом (в 1934—1944 гг.) для придания нового направления геохимии — науке о распределении и истории химических элементов в земной коре.

Методы современной кристаллохимии послужили также основой для особого направления в теоретической химии, которое было развито в течение последних десятилетий проф. Юрием Владимировичем Ходаковым, доказавшим, что для предсказания возможных химических соединений и некоторых их свойств можно руководствоваться принципами, в которых идея о формообразующей роли антуража согласована с учетом влияния химической среды.

§ 126. Форма и рост кристаллов

Нередко можно наблюдать кристаллы симметричной, правильно ограненной формы. Однако чаще встречаются кристаллы неправильной формы — кристаллы, у которых чрезмерное развитие одних граней подавило в ущерб симметрии развитие других граней. Внешний вид кристалла зависит от условий его роста. Однако, каков бы ни был внешний вид кристалла, *углы между гранями всегда имеют величину, вполне определенную для данного типа кристаллов.* Этот основной закон кристаллизации — *закон постоянства углов между гранями кристалла* — был впервые установлен еще в 1669 г. датчанином Стеноном и вновь открыт и доказан спустя 100 лет французом Роме.

Методика экспериментального изучения огранения кристаллов была в высокой мере усовершенствована Е. С. Федоровым, который первый ввел в употребление универсальный гониометр и столики с двумя и тремя осями вращения. (Будучи выдающимся теоретиком, Федоров вместе с тем своими экспериментальными

исследованиями много сделал для выяснения минеральных и рудных богатств России.)

Чтобы получить кристалл в форме правильного многогранника с нормально развитыми гранями, нужно проводить кристаллизацию медленно и осторожно, не переохлаждая сильно раствора или расплава, из которого производится кристаллизация. При сильных переохлаждениях жидкой фазы кристаллы растут в виде причудливо сплетенных нитей и игл (такие кристаллы называют *дендритами*; рис. 251 и 252).

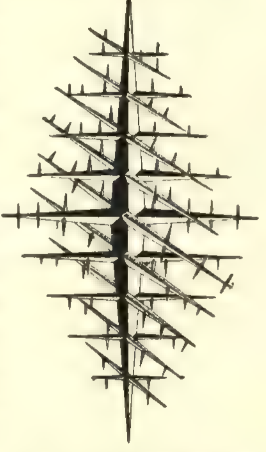


Рис. 251. Дендрит чугуна.

Строение снежинок свидетельствует, что когда воздух насыщен водяными парами и переохлажден, рост снежинок идет быстро в направлении лучей, которые соответствуют гексагональной форме кристаллов льда, и на вспомогательных ветвях, образующих с указанными лучами угол в 60°. Если при своем падении снежинка попадает в слой воздуха с меньшей плотностью пара или с более высокой температурой, от концов ветвей снежинки отрываются молекулы (происходит сублимация), ветви укорачиваются, вслед за этим может произойти утолщение центральной части. Неисчерпаемое разнообразие форм снежинок соответствует раз-

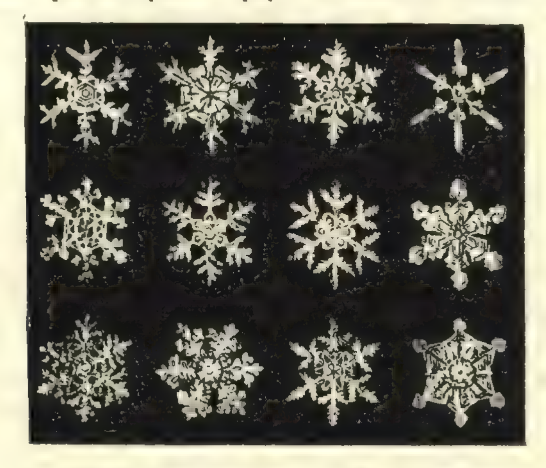


Рис. 252. Коллекция снежинок. Среди множества снежинок редко встречаются тождественные.

личию атмосферных условий в слоях воздуха, сквозь которые падает снежинка.

Для выращивания из раствора крупных монокристаллов в форме правильно развитых многогранников небольшой «зародышевый» кристаллик подвешивают внутри насыщенного раствора и очень медленно испаряют раствор. Если приняты все необходимые меры предосторожности, чтобы конвекционные токи не искажали роста кристалла, то форма вырастающего монокристалла будет зависеть только от химической природы кристаллизуемого вещества. В этом случае, как теоретически доказал Гиббс (1878 г.), выращиваемый кристалл приобретает такую форму, при которой *поверхностная энергия кристалла минимальна.* Для одного и того же вещества поверхностная энергия (или, что то же, изотермическая работа образования 1 $см^2$ поверхности) имеет одно значение, например, для граней, ограничивающих куб, другое значение — для граней, ограничивающих октаэдр (восьмигранник), третье значение — для граней какого-либо иного правильного многогранника и т. д. Гиббс показал, что, руководствуясь принципом минимума поверхностной энергии и зная величину поверхностной энергии для граней разного рода, можно предсказать, какую форму будет иметь равновесно выращиваемый кристалл. Аналогичные соображения о росте кристаллов были развиты П. Кюри (1885 г.) и русским ученым Ю. В. Вульфом (1895 г.); поэтому упомянутый принцип минимума поверхностной энергии кристалла часто называют п р и н ц и п о м Г и б б с а — К ю р и — В у л ь ф а.

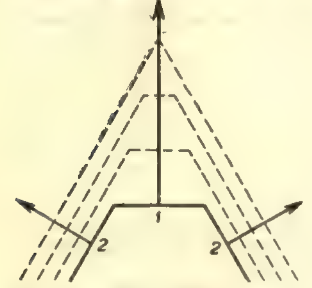


Рис 253. В кристалле наиболее развиты медленно растущие грани.

Скорость роста какой-либо грани кристалла (скорость перемещения этой грани при кристаллизации параллельно самой себе), как показал Вульф, тем более велика, чем больше поверхностная энергия этой грани. Обратимся к рис. 253, где сплошной линией схематически изображено исходное очертание кристалла (с большим значением поверхностной энергии для граней *1* и с малым — для граней *2*). Легко видеть, что при росте кристалла наибольшее развитие получают медленно растущие грани, характеризуемые малой величиной поверхностной энергии, тогда как быстрорастущие грани «зарастают». Основываясь на этом, Вульф предложил следующий способ для нахождения нормальной формы кристалла: «на нормалях к граням, проведенных из одной точки, откладываются от этой точки отрезки, пропорциональные поверхностным энергиям граней, и через концы полученных отрезков проводятся перпендикулярные плоскости; своим взаимным пересечением эти плоскости определят вокруг точки многогранник, указывающий нормальную форму кристалла по принципу Гиббса — Кюри».

§ 127. Теплоемкость твердых тел

При равномерном распределении энергии по степеням свободы часть внутренней энергии твердого тела, зависящая от температуры, должна быть равна, как было пояснено в § 86,

$$U = \frac{i}{2} kNT, \tag{1}$$

где N — число частиц, k — константа Больцмана и i — число степеней свободы.

Каждая частица, находящаяся в узле кристаллической решетки, способна совершать колебания в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Так как каждое колебание характеризуется двумя степенями свободы, то, следовательно, каждая частица твердого тела имеет шесть степеней свободы. Поэтому *грамм-атомная теплоемкость C_v всякого простого вещества в твердом состоянии должна быть равна* 6 *кал* ($\frac{6}{2}kN = 3R \approx 6$ *кал*), а для твердых химически сложных веществ теплоемкость 1 моля C_v должна равняться $6n$ *кал*, где n — число атомов в молекуле.

При обычных температурах грамм-атомная теплоемкость (C_v) большинства химически простых твердых веществ действительно близка к 6 *кал*. Этот факт известен физикам почти 150 лет и носит название закона Дюлонга и Пти.

Для твердых химических соединений существует закон, найденный в 1831 г. Нейманом и позже (в 1864 г.) тщательно проверенный Коппом: *грамм-молекулярная теплоемкость химического соединения, взятого в твердом состоянии, равна сумме грамм-атомных теплоемкостей элементов, его составляющих*. Однако для приложимости закона Неймана — Коппа во многих случаях приходится считать грамм-атомную теплоемкость элемента отличной от 6 *кал*.

При низких температурах законы Дюлонга — Пти и Неймана — Коппа совершенно не оправдываются. *При понижении температуры теплоемкость кристаллов убывает и при температуре, близкой к абсолютному нулю, становится исчезающе малой.* Таким образом, при низких температурах уже не существует пропорциональности между внутренней энергией твердого тела и абсолютной температурой T.

Следовательно, в области низких температур или неверен принцип равномерного распределения энергии по степеням свободы, или происходит изменение (уменьшение) числа степеней свободы. Обе эти возможности приводят к необходимости пересмотра классической статистики. Этот пересмотр впервые был произведен в 1907 г. Эйнштейном на основе развитой Планком теории квантов,

а позже — многими другими авторами. Значительного успеха достиг Дебай, установивший, в частности, что при крайне низких температурах внутренняя энергия твердого тела пропорциональна четвертой степени температуры T, отсчитанной от абсолютного нуля, т. е. здесь

$$U = aT^4, \tag{2}$$

где a — постоянный множитель.

Для вычисления теплоемкости C_v нужно высчитать приращение внутренней энергии dU при элементарно малом приращении температуры dT и разделить dU на dT; получится:

$$C_v = \frac{dU}{dT} = 4aT^3. \tag{3}$$

Таким образом, при крайне низких температурах теплоемкость C_v оказывается пропорциональной кубу абсолютной температуры. Отсюда видно, что близ абсолютного нуля теплоемкость твердого вещества крайне мала, поэтому здесь сообщение твердому телу ничтожно малого количества теплоты производит весьма заметное повышение температуры тела.

Закон кубов Дебая [формула (3)] только при самых низких температурах — вблизи абсолютного нуля — правильно передает зависимость теплоемкости от температуры. Исследования Нернста показали, что зависимость теплоемкости от температуры является сложной. На рис. 254 приведены для некоторых элементов кривые $C_v = f(T)$, вычерченные по данным опытов Нернста. По оси ординат отложены значения грамм-атомной теплоемкости твердых элементов (каждое деление этой оси соответствует 1 *кал*); по оси абсцисс отложены температуры, отсчитанные от абсолютного нуля. Мы видим, что только при 250—300° абсолютной шкалы, т. е. только близ 0° С, грамм-атомная теплоемкость приближается к тому значению (6 *кал*), которое она должна была бы иметь неизменно при всех температурах, если бы для всех температур был верен максвеллов закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.

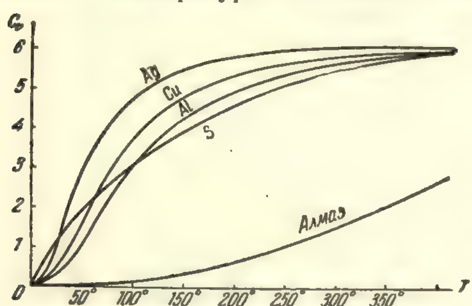


Рис. 254. Изменение грамм-атомных теплоемкостей в зависимости от абсолютной температуры.

Большого успеха в теоретическом исследовании теплоемкости твердых тел достиг проф. Василий Васильевич Тарасов (1945—1959 гг.). Тарасов установил, что температурное изменение тепло-

емкости при низких температурах существенно зависит от динамически анизотропных свойств кристалла. А именно, у кристаллов, имеющих слоистую структуру (когда частицы, лежащие в одной плоскости, связаны значительными силами взаимодействия, а их взаимодействие с частицами смежных слоев относительно невелико), температурный ход теплоемкости иной, чем у тел, имеющих обычное строение. При крайне низких температурах для тел, имеющих слоистую структуру, вместо закона кубов Дебая по теории Тарасова получается пропорциональность теплоемкости квадрату абсолютной температуры. Закон квадратов Тарасова подтвердился для графита, галлия и др. тел. Для твердых тел, у которых преобладает цепочечная связь частиц, что имеет место, например, в кристаллах селена (винтовые цепи), в кристаллах HF, BiO_3, $MgSiO_3$, в стеклообразном Na_2SiO_3, по выводам Тарасова получается зависимость теплоемкости от температуры, приводящая вблизи абсолютного нуля к пропорциональности теплоемкости *первой степени* температуры.

При понижении температуры параллельно уменьшению теплоемкости убывает коэффициент теплового расширения α [$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ при $p=\text{const}$]; отношение теплоемкости к коэффициенту теплового расширения остается при этом почти неизменным:

$$\frac{C_v}{\alpha} = \text{const} \ (\text{не зависит от } T).$$

Этот закон был установлен эмпирически Грюнейзеном.

§ 128. Сублимация твердых тел. Тройная точка

Есть немало твердых кристаллических веществ, которые, будучи оставлены на открытом воздухе, более или менее быстро улетучиваются. Общеизвестные примеры — нафталин, камфора. Таким же свойством обладает лед, поэтому мокрое белье, будучи повешено на морозе и, следовательно, сначала обледенев, через несколько времени оказывается сухим: лед испарился. Для нафталина, камфоры, льда давление пара над твердым веществом может быть легко измерено. С другой стороны, многие твердые вещества не обнаруживают заметного улетучивания и не дают измеримого давления пара; однако, несомненно, во всяком твердом веществе хаотическое движение молекул или атомов приводит к тому, что время от времени то тот, то другой атом отрывается с поверхности тела и улетает в окружающую газовую атмосферу (а иногда, наоборот, улавливается твердым телом из этой атмосферы).

Испарение твердого вещества носит название *сублимации* [1]. Законы сублимации вполне аналогичны законам испарения

[1]) От латинского слова sublimis — высоко поднятый.

жидкостей. Теплота сублимации соответствует сумме теплоты плавления и теплоты парообразования. Подобно тому как процессу парообразования соответствует обратный процесс — конденсация пара в жидкость, так процессу сублимации также соответствует обратный процесс — конденсация пара в твердое состояние.

Теплота сублимации льда 12 *ккал/моль*. Теплота сублимации большинства других молекулярно-кристаллических тел (т. е. тел, у которых по узлам кристаллической решетки размещены молекулы) меньше, чем у льда, например углекислоты 8,2 *ккал/моль*, аммиака 6,3 *ккал/моль*. Металлы имеют теплоты сублимации от 26 (натрий) до 210 (вольфрам) *ккал/грамм-атом*. Теплоты сублимации ионных кристаллов в случае одновалентных ионов (например, NaCl, AgCl и т. д.) составляют 50—60 *ккал/моль*, а в случае двухвалентных ионов 80—120 *ккал/моль*. Чем больше теплота сублимации, тем значительнее силы связи частиц в теле и тем выше температура плавления тела (для тел сходного кристаллического строения).

В таблице приведены теплоты сублимации некоторых твердых тел в килокалориях на 1 грамм-атом или грамм-моль. Мы видим, что особенно велики теплоты сублимации тугоплавких металлов, а также таких кристаллов, где частицы, расположенные по узлам кристаллической решетки, связаны химическими ковалентными силами между нейтральными атомами (алмаз, кремний и др.).

Теплота сублимации некоторых кристаллических тел при 18° С

Вещество	r в *ккал/моль*	Вещество	r в *ккал/моль*
Металлы			
Натрий	25,9	Медь	81,2
Цинк	27,4	Железо	94
Свинец	47,5	Платина	127
Алюминий	55	Молибден	160
Серебро	68	Вольфрам	210
Ионные кристаллы			
Хлористый калий	52	Окись бария	93
» натрий	57,1	» кальция	123
Хлористое серебро	56,8	» алюминия	120
Ковалентные кристаллы			
Алмаз	~170	Карбид кремния	283
Кремний	85	Двуокись »	405
Молекулярные кристаллы			
Лед	12	Хлор	6,0
Углекислота	8,2	Кислород	1,7
Аммиак	6,3	Азот	1,5

В § 118 был пояснен молекулярный механизм подвижного равновесия системы, состоящей из жидкости и пара. Равновесие такой системы возможно при разнообразных температурах, не превышающих, однако, критической температуры. Чем выше температура, тем больше давление и плотность насыщенного пара, а значит, и число молекул, пролетающих в единицу времени через единицу поверхности, разграничивающей жидкость и пар. Откладывая для определенного вещества по оси абсцисс температуры T, по оси ординат давления p (рис. 255), мы получим геометрическое место точек, соответствующих равновесию жидкости и пара, в виде кривой PK, причем K — критическая точка; кривая PK называется *кривой парообразования*.

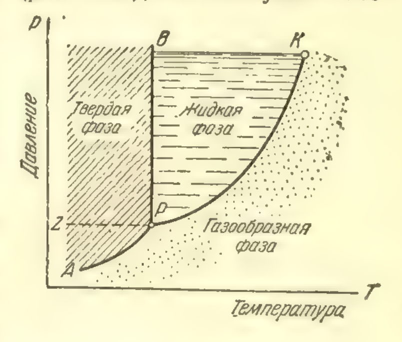


Рис. 255. Диаграмма состояния.

Для того же самого вещества будем рассматривать явление равновесия между твердой и жидкой фазой (здесь опять-таки число молекул, переходящих в единицу времени из твердой фазы в жидкую, будет равно числу молекул, переходящих за то же время из жидкости в твердую фазу). Геометрическим местом точек равновесия твердой и жидкой фаз будет кривая BP, называемая *кривой плавления*. Она идет почти вертикально, потому что нужно сильно изменить давление, чтобы температура плавления вещества немного изменилась. Кривая парообразования и кривая плавления встречаются друг с другом в точке P.

Кривая AP есть *кривая сублимации*, т. е. геометрическое место точек, соответствующих равновесию твердой и парообразной фаз. Она проходит через точку P. Точка P есть единственная общая точка указанных кривых; она называется *тройной точкой*, ибо только здесь мы имеем равновесие трех фаз. Что касается пунктирной кривой PZ, составляющей продолжение кривой парообразования PK, то она соответствует мало устойчивому равновесию переохлажденной жидкости и ее пара.

Так как кривая плавления почти вертикальна, то очевидно, что *температура тройной точки незначительно отличается от обычной температуры плавления под атмосферным давлением*. Удельные объемы жидкости и твердой фазы в тройной точке также весьма мало отличаются от объемов при обычной температуре плавления. Наиболее характерным является давление тройной точки — давление насыщенного пара над жидкой и твердой фазами в их равновесии.

Как видно из приводимой таблицы, *давление тройной точки в большинстве случаев значительно ниже атмосферного.*

Тройные точки некоторых веществ

Вещество	Абсолютная температура в тройной точке в °К	Давление в тройной точке в *ат*
Углекислота	216,5	5,11
Окись углерода . . .	66,1	$\sim$0,12
Аммиак	195,4	$6\cdot10^{-2}$
Двуокись серы . . .	204,4	$2,15\cdot10^{-2}$
Вода	273,1	$6,02\cdot10^{-3}$
Ацетон	178,9	$2,2\cdot10^{-5}$
Эфир этиловый . . .	152,9	$8,5\cdot10^{-6}$

Тройная точка углекислоты находится *выше атмосферного давления*:

$$t_{\text{тр. т}} = -56,6^\circ\text{C} \quad \text{и} \quad p_{\text{тр. т}} = 5,11 \; am.$$

При давлении ниже 5,11 *ат* жидкая углекислота не может существовать; при нормальном давлении мы наблюдаем сублимацию «сухого льда» углекислоты. *Тройная точка воды* характеризуется температурой 0,0075°С и давлением 4,58 *мм* рт. ст. Кривая плавления льда в отличие от кривых плавления большинства других веществ несколько наклонена в сторону оси давлений; это означает, что *под повышенным давлением плавление льда происходит при более низкой температуре*; под давлением в 1500 *ат* лед плавится при —14,1°С. На рис. 256, где представлена диаграмма состояния воды и льда, кривая парообразования не изображена, так как, начинаясь в точке P, она (при принятом масштабе давлений) едва возвышается над осью абсцисс.

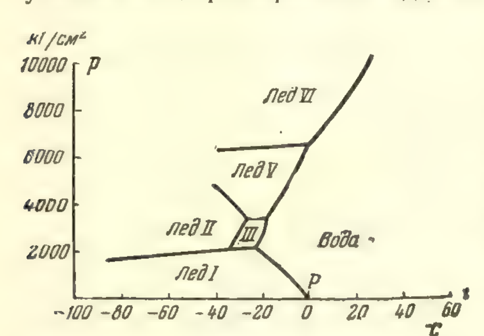


Рис. 256. Диаграмма состояния H_2O.

Существует несколько *кристаллических модификаций льда.* Вода и кристаллические модификации лед I и лед III могут находиться в равновесии при давлении 2175 *ат* и температуре — 22°С. Кривая плавления имеет переломы, соответствующие разным кристаллическим модификациям льда. При давлениях выше 2175 *ат*

наклон кривой плавления меняется на противоположный в сторону от оси давлений, как у всех нормальных веществ; это соответствует возрастанию температуры плавления с повышением давления. При давлении 20 000 *ат* температура плавления льда повышается до $+80°$ С (т. е. может существовать «горячий лед»).

§ 129. Кристаллизация растворов. Диаграмма плавкости

Если сравнить положение тройной точки для какого-либо химически чистого вещества с положением тройной точки для раствора (в том же веществе каких-либо других веществ), то оказывается, что тройная точка для раствора всегда смещена в сторону меньших температур и давлений. Этот факт связан с понижением давления пара над раствором (закон Рауля, § 119). На рис. 257 P есть тройная точка чистого растворителя; в ней сходятся кривая сублимации AP, кривая плавления BP и кривая парообразования CP. Кривая парообразования для раствора (т. е. кривая равновесия раствора и пара) будет идти примерно как $C'P'$. Таким образом, в P' она встретится с кривой сублимации. Отсюда следует, что P' для раствора будет играть роль тройной точки; здесь будут находиться в равновесии раствор, его пар и вымерзающий из раствора чистый растворитель (в случае водных растворов — лед [1])). Из этого, далее, следует, что равновесие раствора со льдом должно иметь место по кривой, проходящей через P', т. е. по некоторой кривой $B'P'$. А так как эта кривая лежит левее кривой BP, то мы видим, что при данном давлении температура плавления (или, что то же, замерзания) раствора понижается по сравнению с температурой плавления (замерзания) чистого растворителя. Таким образом, наличие растворенного вещества как бы мешает замерзанию (например, морская вода замерзает при более низкой температуре, чем пресная).

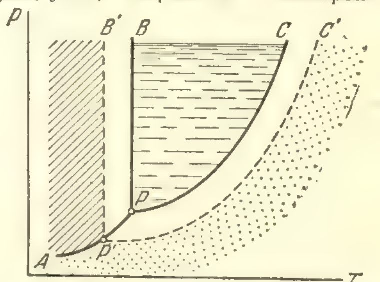


Рис. 257. Сравнение положений тройных точек чистого вещества (P) и раствора (P').

Для слабых растворов Рауль в 1884 г. нашел следующий закон: *понижение точки замерзания раствора пропорционально числу молекул растворенного вещества, содержащемуся в единице объема раствора, и не зависит от химической природы этого вещества.* На понижении точки замерзания растворов основано приготовление охлаждающих смесей. Так, прибавляя к измельченному льду достаточное количество поваренной соли, можно понизить температуру смеси до $-21°$.

Понижение точки замерзания слабых водных растворов определяется, по закону Рауля, формулой

$$\Delta T = 18{,}4\,\frac{g}{M}, \tag{4}$$

где g — число граммов растворенного вещества в 100 *г* воды и M — молекулярный вес растворенного вещества.

Постоянную в законе Рауля (для воды 18,4) называют *криоскопической постоянной.* Для слабых растворов в бензоле криоскопическая постоянная равна 49, в нитробензоле 70, в бензофеноле 95, в бромистом этилене 125.

На законе Рауля основан весьма важный *метод физико-химического анализа сплавов.* Измеряют температуры кристаллизации сплавов в зависимости от состава

[1]) При замерзании большинства растворов выделяющиеся кристаллы состоят из чистого растворителя.

сплава и результаты измерений изображают графически в виде так называемых *диаграмм плавкости*.

Для измерения температуры кристаллизации сплава следят при медленном охлаждении за падением температуры расплава. Эти наблюдения также изображают графически, откладывая на оси абсцисс время, а на оси ординат — температуру; полученные кривые называют *кривыми охлаждения*. На рис. 258 показан типичный вид кривой охлаждения; ветвь *ab* соответствует охлаждению жидкого расплава; при температуре $T_{пл}$ должна была бы начаться кристаллизация, но почти всегда наблюдается некоторое переохлаждение расплава (на рис. 258 — до температуры T_a). В момент времени, соответствующий точке *b*, начинается кристаллизация, и температура быстро возвращается к уровню $T_{пл}$, на котором и удерживается до тех пор, пока не закончится кристаллизация (участок *cd*).

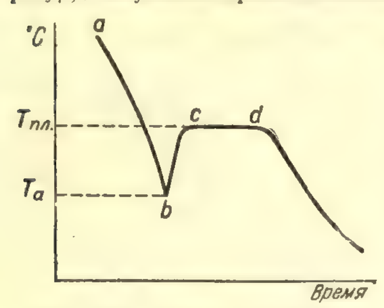


Рис. 258. Кривая охлаждения расплава.

Для построения одной диаграммы плавкости (например, диаграммы плавкости системы свинец — сурьма) получают ряд кривых охлаждения для сплавов различного состава (для чистого свинца, для сплава с 5% Sb, с 10% Sb и т. д., вплоть до чистой сурьмы). Найденные температуры кристаллизации откладывают по оси ординат, а процентный состав сплава (концентрацию исходного сплава) — по оси абсцисс.

На рис. 259 показана диаграмма плавкости сплавов свинца с сурьмой. Температура кристаллизации (или, что то же, температура плавления) чистого свинца

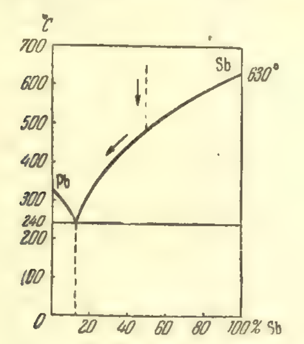


Рис. 259. Диаграмма плавкости для системы свинец — сурьма.

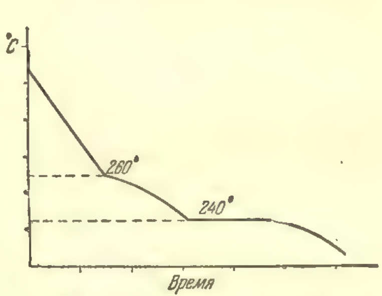


Рис. 260. Кривая охлаждения расплава свинца с 10% сурьмы.

равна 327° С. Прибавление сурьмы снижает температуру кристаллизации свинца почти пропорционально концентрации сурьмы. Температура кристаллизации чистой сурьмы равна 630° С. Прибавление свинца к сурьме понижает температуру кристаллизации сурьмы. При определенном составе сплава (около 14% Sb) температура кристаллизации свинца в присутствии сурьмы равна температуре кристаллизации сурьмы в присутствии свинца (240° С). Сплав такого состава кристаллизуется в виде тонкой смеси кристалликов свинца и сурьмы,— это так называемая *эвтектика* [1]).

---

[1]) От греческих слов eu — х о р о ш о и tektos — р а с п л а в л е н н ы й.

На рис. 260 показана одна из кривых охлаждения сплава свинца с сурьмой (при 10% Sb). При температуре 260° С начинается выпадение кристалликов свинца и остающийся расплав оказывается обогащенным сурьмой. Когда вследствие постепенной кристаллизации свинца состав сплава оказывается соответствующим эвтектике, то закристаллизовывается весь расплав; об этом на кривой охлаждения свидетельствует прямолинейный участок при температуре 240° С. Если исходный расплав содержит сурьмы больше, чем соответствует эвтектике, то при охлаждении выпадают кристаллики сурьмы и остающийся расплав постепенно обогащается свинцом, пока не будет достигнут состав эвтектики.

Нередки случаи, когда при охлаждении из расплава выпадают не чистые кристаллы веществ, входящих в состав расплава, а кристаллы, представляющие собой *твердый раствор*. У металлов способность к образованию твердых растворов в большинстве случаев ограничена несколькими процентами, однако имеются случаи и полной растворимости металлов в твердом состоянии: атомы одного металла в любой пропорции заменяют в кристаллической решетке атомы другого металла. При полной растворимости в твердом состоянии диаграмма плавкости имеет вид, показанный на рис. 261. Здесь верхняя кривая определяет зависимость температуры кристаллизации расплава от состава расплава; нижняя кривая дает зависимость между температурой кристаллизации и составом образующихся твердых растворов. Если мы возьмем, например, расплав, содержащий 40% сурьмы и 60% висмута, и станем этот расплав медленно охлаждать, то при температуре около 530° начнут выпадать кристаллики, представляющие собой твердый раствор 8% висмута в сурьме (состав этого твердого раствора на рис. 261 определяется абсциссой точки S, тогда как состав жидкой фазы при той же температуре определяется абсциссой точки L). По мере выпадения кристалликов твердого раствора остающийся расплав вследствие малого содержания висмута в твердом растворе постепенно обогащается висмутом. В связи с этим температура кристаллизации понизится; точка, характеризующая состояние расплава, будет перемещаться по верхней кривой вниз; состав выпадающих кристалликов будет по мере понижения температуры изменяться соответственно абсциссам точек нижней кривой. Когда температура кристаллизации понизится настолько, что состав твердого раствора окажется таким, каков был состав исходного расплава, весь расплав закристаллизуется. В последние десятилетия метод физико-химического анализа был расширен на область минералов и глубоко обоснован теоретическими и экспериментальными исследованиями акад. Николая Семеновича Курнакова и его школы.

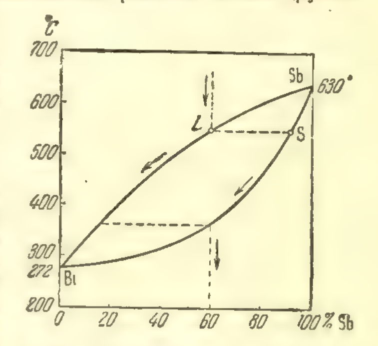


Рис. 261. Диаграмма плавкости для системы висмут — сурьма.

Физико-химическое и рентгеноструктурное изучение сплавов показало, что многие металлы образуют *интерметаллические соединения*, причем кристаллическое строение таких соединений подчинено некоторым простым правилам. Так, например, если к меди добавлять цинк, то до тех пор, пока количество цинка по атомному содержанию не превысит 36%, цинк входит в состав кристаллов меди в качестве твердого раствора. При содержании цинка от 45 до 48% образуется сплав, который кристаллизуется в решетке типа CsCl, причем атомы меди располагаются в вершинах кубов, а атомы цинка — в их центрах; это так называемая β-латунь.

Когда содержание цинка по атомной концентрации достигает 62—68%, образуется так называемая γ-латунь, кристаллическое строение которой довольно сложно (каждая элементарная ячейка состоит из 52 атомов).

При содержании цинка от 79 до 85% образуется другое интерметаллическое соединение, которое кристаллизуется в простейшей гексагональной решетке. Наконец, при содержании цинка выше 98% имеется твердый раствор меди в кристаллах цинка.

В совершенно такой же последовательности возникают интерметаллические соединения в сплавах серебра и цинка, а также меди и олова или меди и алюминия и др.

Если сопоставить, при каких концентрациях возникает β-фаза (аналогичная β-латуни), то обнаруживается, что условием ее возникновения является отношение числа свободных электронов в металле к числу атомов металла, равное $^3/_2$. Это правило было установлено Юм-Розери в 1926 г. Помещенная ниже таблица поясняет правило Юм-Розери (следует отметить, что валентность «переходных» металлов — железа, кобальта и никеля — приходится считать практически равной нулю).

Состав β-фазы

	Число валентных электронов	Отношение числа электронов к числу атомов
CuZn	1 + 2	3:2
AgZn	1 + 2	3:2
Cu_3Al	3·1 + 3	6:4 = 3:2
Cu_5Sn	5·1 + 4	9:6 = 3:2
FeAl	0·1 + 3	3:2
CoAl	0·1 + 3	3:2

Аналогично γ-фаза возникает, когда отношение числа электронов в металле к числу атомов равно 21 : 13. Это видно из следующих примеров:

Состав γ-фазы

	Число валентных электронов	Отношение числа электронов к числу атомов
Cu_5Zn_8	5·1 + 8·2	21:13
Cu_9Al_4	9·1 + 4·3	21:13
$Cu_{31}Sn_8$	31·1 + 8·4	21:13
Fe_5Zn_{21}	5·0 + 21·2	42:26 = 21:13
Co_5Zn_{21}	5·0 + 21·2	42:26 = 21:13

Кристаллическая фаза с гексагональной решеткой плотной упаковки возникает при электроно-атомной концентрации $^7/_4$, что соответствует составу $CuZn_3$, $AgZn_3$, Cu_3Sn, Au_5Al_3 и др.

§ 130. Силы связи в кристаллах

О силах молекулярного взаимодействия в газах мы можем судить главным образом по характеру и величине отклонений действительных свойств газа от законов идеального газа. На основе такого ограниченного материала трудно раскрыть природу молекулярных сил. Что касается жидкостей, то их строение недостаточно изучено, чтобы из свойств жидкостей можно было сделать надежные заключения о законах взаимодействия частиц. Кристаллы, напротив, за последние 3—4 десятилетия благодаря применению рентгеновых лучей исследованы весьма детально. Поэтому наши сведения о силах взаимодействия частиц более всего основаны на выводах кристаллофизики.

Какие физические свойства твердых тел могут дать представление о силах связи частиц в кристаллах? Казалось бы, что на первое место тут нужно поставить величину прочности тела. Но прочность тела, как было указано в § 46, определяется двумя другими величинами: сопротивлением отрыву частиц и сопротивлением скольжению, причем сопротивление скольжению в величайшей мере зависит от взаиморасположения и величины кристаллических зерен. Прочность металлов сильно возрастает при повторных пластических деформациях (при «наклепе» — § 44). У хрупких тел прочность в высокой мере зависит от наличия поверхностных трещин (§ 46). По всем этим причинам величина прочности тела не может служить непосредственным мерилом сил, действующих между частицами, расположенными в узлах кристаллической решетки.

Если вспомнить сказанное в § 46 об условности применяемых измерений твердости, то придется признать, что и твердость может дать только косвенное представление о силах связи в кристаллах.

Наиболее надежные заключения об этих силах можно сделать посредством некоторых несложных вычислений из величины модуля объемной упругости или из обратной ему величины сжимаемости.

Прямую характеристику связи частиц в кристаллах дает теплота сублимации при наинизшей возможной температуре, когда вся эта теплота расходуется на преодоление взаимодействия частиц, еще не осложненного температурным влиянием. Если в узлах кристаллической решетки расположены не молекулы, а ионы, то действительная энергия их взаимодействия — *энергия кристалла* — будет, понятно, больше теплоты сублимации на величину энергии, которую нужно затратить, чтобы диссоциировать молекулы пара на ионы.

Сопоставление кристаллов по их строению, по их энергии и сжимаемости показывает, что существует как бы несколько «видов» сил связи:

1) взаимодействие ионов по закону Кулона для электрических зарядов;

2) химическая валентная связь между нейтральными атомами;

3) взаимодействие молекул, вызываемое асимметрией их электрического строения (дипольное взаимодействие);

4) притяжение частиц, вызываемое их взаимовлиянием на их внутреннее строение (дисперсионный эффект);

5) взаимоотталкивание любых частиц — молекул, атомов, ионов, которое создает подобие непроницаемости этих частиц друг для друга;

6) особый вид связи частиц в металлах, где одноименно заряженные положительные ионы металла притягиваются к электронам, которые реют между ними.

Каждый атом или ион представляет собой сложную электрическую систему, в которой поведение электронов, связанных с ядром, определяется законами новейшего раздела теоретической физики — квантовой механики. При вычислении взаимодействия между частицами по уравнениям квантовой механики расчленение взаимодействия на «виды связи» может быть сделано по-разному; оно в известной мере является искусственным.

Для громадного количества кристаллических веществ, входящих в состав горных пород, характерно ионное строение. Кристаллы, построенные из ионов, отличаются малой сжимаемостью, большой твердостью и хрупкостью разлома. Большая упругость и твердость этих кристаллов, их высокая температура плавления, большая энергия сублимации объясняются прочностью электростатических сил, связующих ионы при их плотной упаковке. Чем больше заряды ионов, т. е. чем больше их валентность, и чем меньше их радиус, тем тверже кристалл, тем выше его температура плавления и больше энергия сублимации.

Энергия взаимодействия ионов может быть определена формулой

$$\varphi = \mp \frac{e_+ e_-}{r} + \frac{A}{r^9}. \qquad (5)$$

Здесь первый член — «кулоновская» энергия электрического притяжения разноименных ионов (знак минус) или отталкивания одноименных ионов (знак плюс); e_+ и e_- — электрические заряды ионов, r — расстояние между центрами ионов. Второй член представляет собой энергию отталкивательного взаимодействия электронных оболочек ионов.

На рис. 262 показано изменение по формуле (5) потенциальной энергии разноименных ионов в зависимости от расстояния; равновесному расположению ионов соответствует минимум φ; на том же рисунке показано изменение силы притяжения с расстоянием: $f = -\frac{d\varphi}{dr}$.

Формула (5) сыграла большую роль в развитии учения о кристаллах. Грюнейзен (1912 г.), исходя из указанной формулы, но оставляя вначале открытым вопрос о показателе степени при r в члене, выражающем отталкивание, объяснил некоторые свойства твердых тел. При этом и обнаружилось из вычисления модулей упругости, что *энергия отталкивания частиц обратно пропорциональна примерно девятой степени расстояния.* Талантливый физик Сергей Анатольевич Богуславский (в 1915 г.) применил формулу (5) для анализа характера теплового движения в кристаллах. Борн подробно развил метод Богуславского.

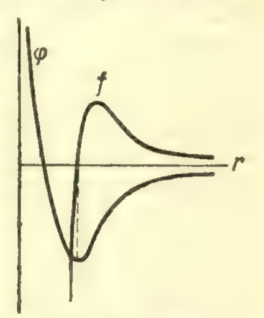


Рис. 262. Потенциальная энергия φ и сила f взаимодействия разноименных ионов в зависимости от расстояния r между ними

Для вычисления энергии кристаллических решеток, построенных из ионов, проводится суммирование уравнения (5) для всех пар частиц в кристалле. Такое вычисление энергии для важнейших систем кристаллических решеток было выполнено Маделунгом и др.

Если U — получившаяся в итоге суммирования энергия кристалла, а N — число молекул, то энергия, отнесенная к одной молекуле в кристалле, оказывается равной

$$\frac{U}{N} = -\alpha \frac{n_+ n_- e^2}{r_0} + \beta \frac{A}{r_0^9}.$$

Здесь n_+ и n_- — валентность положительных и отрицательных ионов, из которых построен кристалл, e — заряд электрона, r_0 — кратчайшее расстояние между соседними разноименными ионами, α и β — *константы Маделунга*, характеризующие строение кристалла. Поскольку энергия отталкивания убывает с увеличением расстояния очень быстро, то при суммировании достаточно рассмотреть взаимодействие иона с ближайшими его соседями. Поэтому обычно β приравнивают антуражу.

Константы Маделунга для кристаллов некоторых типов

Константы Маделунга	Кристаллы типа				
	NaCl	CsCl	ZnS	CaF_2	CuO_2
α	1,75	1,76	1,64	2,52	2,06
β	6	8	4	8	8

Изменение энергии иона в кристалле в зависимости от среднего расстояния между ионами изображается кривой, вид которой аналогичен линии φ на рис. 262. Равновесное расстояние между ионами соответствует минимуму потенциальной энергии; такое расстояние реализуется при абсолютном нуле. При повышении температуры происходит тепловое расширение кристалла, и потенциальная энергия возрастает. При сжатии под действием большого давления энергия кристалла резко увеличивается. Линия f на рис. 262 указывает величину квазиупругой силы, которая действует на ион, когда равновесное расстояние между ионами нарушено, например, вследствие теплового расширения кристалла. Можно предположить, как показал В. В. Тарасов (1927 г.), что при расстоянии между ионами, которое соответствует максимуму квазиупругой силы f, происходит плавление кристалла. Такое предположение приводит к выводу, что *произведение среднего коэффициента теплового расширения кристалла на температуру плавления одинаково для кристаллов сходного строения*; эта закономерность действительно наблюдается и известна под именем правила Пикте.

Теория ионных кристаллов, основанная на формуле (5), нашла себе применение в решении разнообразнейших вопросов физики и физической химии.

Поскольку для применений важно было знать величину константы A в уравнении (5) для разных пар ионов, ряд теоретических исследований был направлен, однако без особого успеха, на выяснение этого вопроса. Сопоставляя данные опыта, К. А. Путилов (в 1926 и в 1932 гг.) показал, что константа A, определяющая энергию отталкивания электронных оболочек атомов, пропорциональна произведению чисел электронов в атомах.

В последнее время вместо члена с девятой степенью расстояния для энергии отталкивания часто применяют выражение

$$\varphi_{\text{отт}} = Ae^{-\frac{r}{\rho}}. \tag{6}$$

Считают, что это выражение лучше согласуется с выводами квантовой механики, хотя оно тоже только заменяет в приближенном виде предполагаемые законы отталкивания. Величины A и ρ представляют собой постоянные, которые подбираются так, чтобы формула (6) приближенно передавала зависимость $\varphi_{\text{отт}}$ от r, получаемую посредством трудоемких и все же не вполне строгих теоретических вычислений.

Силы связи в ионных кристаллах представляют собой в сущности *химические электровалентные* силы. Чем больше валентность ионов, тем больше энергия кристалла, как это видно из помещенной ниже таблицы.

Энергия связи кристаллов — энергия расщепления ионных кристаллов на ионы

Вещество		U в *ккал моль*	Вещество		U в *ккал моль*
$M^{+}R^{-}$	KCl	164	$M^{++}R^{--}$	PbS . . .	731
	NaCl	183		ZnS . . .	851
	LiCl	198		ZnO . . .	972
	NaF	215		BaO . . .	747
	AgCl	207		CaO . . .	842
	AgF	223		MgO . . .	940
	CuCl	226	$M_2^{+++}R_3^{--}$	Al_2O_3 . .	3617
				Cr_2O_3 . .	3627

У некоторых относительно немногих тел, например у алмаза, кремния и бора, в узлах кристаллической решетки расположены электрически нейтральные атомы и силами связи являются *химические ковалентные* силы. Углерод четырехвалентен, и соответственно в алмазе каждый атом окружен четырьмя атомами углерода. Одинарная связь атомов углерода С—С в органических соединениях отличается большой прочностью. Для разрыва ее требуется (по расчету на авогадрово число молекул) около 70 *ккал*. Столь же прочной является связь атомов углерода в кристаллах алмаза. Об этом свидетельствуют исключительная твердость алмаза и его большая теплота сублимации. Еще более прочна химическая связь кремния с кислородом; это отражается в чрезвычайно большой теплоте сублимации двуокиси кремния (порядка 400 *ккал/моль*).

Показательным является факт, что атомные решетки, скрепленные жесткой химической связью, образуются не какими-либо другими элементами, но именно углеродом, кремнием и бором, которые отличаются необычайным богатством и разнообразием химических соединений.

У множества тел, в особенности органических соединений, в узлах кристаллической решетки расположены молекулы. Для таких кристаллов является характерной относительно слабая связь частиц, что сказывается в более низкой, чем у ионных и ковалентных кристаллов, твердости, низкой температуре плавления и небольшой теплоте сублимации.

Силы отталкивания между молекулами такие же, как и между атомами или ионами. Силы притяжения между молекулами, по теории Ван-дер-Вальса, должны создавать внутреннее давление, пропорциональное квадрату плотности, что соответствует потенциальной энергии $\frac{a}{v}$. Ван-дер-вальсова трактовка молекулярных сил (стр. 445) оставляла открытым вопрос о законе изменения

силы притяжения между молекулами в зависимости от расстояния между ними. Эта сторона теории Ван-дер-Вальса постоянно вызывала возражения.

Кеезом (в 1912 г.) показал, что молекулярное притяжение, объясняющее внутреннее давление $\frac{a}{v^2}$, в основном происходит вследствие электрической асимметрии молекул. Когда молекула построена из ионов, «центр массы» всех ее положительных зарядов — *полюс* положительных зарядов — не совпадает с центром отрицательных зарядов — с отрицательным полюсом, но между ними имеется некоторое расстояние λ, которое в простейшем случае молекул типа A^+B^- равно расстоянию между ионами. Произведение электрического заряда молекулы (арифметической суммы ее положительных или же одних отрицательных зарядов) на упомянутое расстояние λ между центрами распределения (полюсами) зарядов называют электрическим *дипольным моментом* молекулы μ:

$$\mu = \left(\sum e_+\right)\lambda.$$

Несмотря на то, что в целом молекула электрически нейтральна ($\sum e_+ = \sum e_-$), вследствие ее электрической асимметрии она будет электрически взаимодействовать с другой такой же дипольной молекулой. Понятно, что молекулы, обращенные друг к другу одноименными полюсами, будут отталкиваться, так как кулоново отталкивание одноименных полюсов этих молекул будет преобладать над притяжением более удаленных (на расстояние λ) разноименных полюсов. Напротив, молекулы, обращенные друг к другу разноименными полюсами, будут притягиваться. Вычисление показывает, что в обоих случаях энергия взаимодействия пропорциональна произведению электрических моментов молекул и убывает обратно пропорционально кубу расстояния между молекулами. В промежуточном положении, когда электрические оси молекул расположены под некоторым углом друг к другу, который отличается от 0 и 180°, сила взаимодействия будет зависеть также от тригонометрических функций этого угла.

Важно, что предоставленные самим себе две полярные молекулы всегда повернутся друг к другу разноименными полюсами, так как в таком положении их потенциальная энергия минимальна, после чего молекулы будут сближаться до тех пор, пока быстро возрастающие с уменьшением расстояния силы отталкивания не уравновесят их дипольного притяжения. Энергия взаимодействия дипольных молекул, обращенных друг к другу разноименными полюсами, выражается формулой

$$\varphi = -\frac{2\mu_1 \cdot \mu_2}{r^3}. \qquad (7)$$

Куб среднего расстояния между молекулами соответствует первой степени удельного объема. Стало быть, вследствие дипольного

притяжения потенциальная энергия молекул будет выражаться, как и в теории Ван-дер-Вальса, величиной

$$\Pi = -\frac{a}{v},$$

причем константа a должна быть пропорциональна квадрату дипольного момента.

Тепловое движение расстраивает благоприятную для притяжения ориентацию молекул. Кеезом показал, что вследствие теплового движения потенциальная энергия взаимодействия дипольных молекул для достаточно высоких температур вместо формулы (7) выражается уравнением

$$\varphi = -\frac{2}{3}\left(\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}\right)^2\frac{1}{kT}. \qquad (8)$$

Здесь k — больцманова постоянная, T — абсолютная температура.

Формула (7) справедлива для малых температур, когда $\frac{\mu_1\mu_2}{r^3} \gg kT$; в противоположность этому формула (8) справедлива, когда $kT \gg \frac{\mu_1\mu_2}{r^3}$.

Вследствие зависимости дипольного взаимодействия от ориентации молекул этот вид взаимодействия называют *ориентационным*.

Расстояние между полюсами в дипольных молекулах соизмеримо с размерами молекулы, т. е. имеет порядок 10^{-8} *см*; электрическая асимметрия молекул сказывается обычно в перераспределении валентных электронов, а заряд электрона $e = 4{,}8.10^{-10}$ электростатических единиц электричества; поэтому дипольный момент многих молекул имеет порядок 10^{-18} эл.-ст. ед. $\times$ *см*. Дипольные моменты определяют расчетом из измерений диэлектрических постоянных и некоторых оптических величин (т. II, § 24).

Дипольные моменты некоторых полярных молекул

Вещество	Формула	$\mu \cdot 10^{18}$	Вещество	Формула	$\mu \cdot 10^{18}$
Вода	H_2O	1,84	Спирт метиловый	CH_3OH	1,65
Хлористый водород	HCl	1,04	Ацетон	C_3H_6O	2,75
Перекись водорода	H_2O_2	2,1	Уксусная кислота	$C_2H_4O_2$	1,73
Аммиак	NH_3	1,46	Фенол	C_6H_6O	1,56
Спирт этиловый	C_2H_5OH	1,70	*p*-нитрофенол	$C_6H_6NO_3$	5,02
			Нитробензол	$C_6H_6NO_2$	3,95

Множество веществ не обнаруживает заметных дипольных моментов или имеет весьма малый дипольный момент. Например, молекулы окиси углерода (CO) имеют момент в десять раз меньший, чем молекулы HCl, а молекулы двуокиси углерода (CO_2)

не обнаруживают никакого дипольного момента. Не имеют постоянного дипольного момента двухатомные молекулы азота, кислорода, водорода, хлора, брома, иода, молекулы CS_2, $AlCl_3$, PCl_5, CH_4, CCl_4, C_6H_6 и т. д.

Отсутствие постоянного дипольного момента у веществ, называемых по этой причине *неполярными*, не означает, однако, что молекулы этих веществ всегда, т. е. при всех воздействиях, остаются электрически симметричными. Напротив, когда какая-либо неполярная молекула оказывается под воздействием электрической силы F, немедленно происходит смещение электрических зарядов в молекуле, и она приобретает так называемый *индуцированный* дипольный момент:

$$\mu = \alpha F.$$

Коэффициент пропорциональности α называют *поляризуемостью* молекулы, атома или иона. Как будет пояснено в т. II, от величины поляризуемости частиц среды и от их постоянного дипольного момента, если он имеется, зависят диэлектрическая постоянная среды и показатель преломления света.

Две молекулы, не имеющие постоянного дипольного момента, но обладающие большой поляризуемостью, при случайном сближении могут приобрести благодаря взаимному влиянию индуцированные дипольные моменты, что вызовет их взаимное притяжение. Аналогичное притяжение в еще большей мере возникает при сближении молекул, обладающих постоянными моментами.

Как показал Дебай в 1920 г., энергия *индуцированного* взаимодействия молекул определяется уравнениями

$$\varphi = -\frac{2\alpha\mu^2}{r^6} \tag{9}$$

и

$$\varphi = -\frac{2}{3}\,\frac{\alpha\tau^2}{r^8}. \tag{10}$$

Первое из этих уравнений относится к молекулам, имеющим постоянный момент μ; в этом случае индуцированное взаимодействие по уравнению (9) дополняет ориентационное взаимодействие по (8); с ростом температуры ориентационное взаимодействие уменьшается, индуцированное — не зависит от температуры.

Уравнение (10) относится к молекулам, не имеющим постоянного дипольного момента, но обладающим такой электрической симметрией, которую можно представить по схеме $\pm\mp$, т. е. как бы два равных, но противоположно направленных и близко расположенных друг от друга диполя. Такое строение называют *квадрупольным*. В уравнении (10) величина τ представляет собой квадрупольный момент молекулы.

Одно время многие физики предполагали, что теория Дебая удовлетворительно объяснит происхождение молекулярного при-

тяжения у неполярных веществ. Однако обнаружилось, что энергия индуцированного взаимодействия в десятки, а иногда и в сотни раз меньше наблюдаемой энергии молекулярного притяжения.

В 1930 г. Ф. Лондон, исходя из положений квантовой механики, показал, что во многих случаях наибольшую роль играет особый вид молекулярного взаимодействия, возникающего также вследствие поляризации молекул, но поляризации, имеющей характер быстрых колебаний, пульсаций. Дело в том, что каждый атом имеет некоторую не исчезающую при абсолютном нуле температуры энергию колебаний, которую называют *нулевой энергией*. Она равна:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} h\nu_0,$$

где h — постоянная Планка (стр. 361). Электрические пульсации с частотой ν_0 вызывают в соседних атомах строго согласованные по фазе электрические смещения, т. е. переменные по величине и направлению дипольные моменты. Этим создается притяжение между атомами или молекулами, причем энергия притяжения, как установил Лондон, пропорциональна квадрату поляризуемости, частоте колебаний и обратно пропорциональна шестой степени расстояния между частицами:

$$\varphi = -\frac{3}{4} \frac{h\nu_0\alpha^2}{r^6}. \tag{11}$$

Аналогичное взаимодействие неодинаковых частиц, имеющих разные поляризуемости α_1 и α_2 и частоты колебаний ν_1 и ν_2, определяется такой же формулой, в которую, однако, вместо α^2 входит произведение $\alpha_1\alpha_2$ и вместо частоты ν_0 — среднегармоническая частота:

$$\varphi = -\frac{3}{2} \frac{h\frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1+\nu_2}\alpha_1\alpha_2}{r^6}. \tag{12}$$

Эти формулы усложняются, когда небходимо учитывать для каждой молекулы колебания нескольких характерных для нее частот. Здесь приходится принимать во внимание те же частоты, которые проявляются в оптических свойствах среды, состоящей из рассматриваемых молекул. Дисперсия (расчленение света на волны, распространяющиеся в среде с разной скоростью при разных частотах) вызывается теми же электрическими внутримолекулярными колебаниями, которые проявляются в указанном выше притяжении частиц. Поэтому Лондон назвал этот вид молекулярного взаимодействия *дисперсионным* взаимодействием.

Следует отметить, что впервые задача о взаимодействии молекул как результате согласованности их электромагнитных колебаний была решена русским ученым Б. Б. Голицыным в 1894 г., т. е. задолго до возникновения квантовой механики. Голицын установил, что согласованность колебаний должна вызывать между

молекулами притяжение, величина которого обратно пропорциональна шестой степени расстояния.

Ниже приведена таблица, где указано, какую долю общей энергии связи молекул составляют ориентационное, индуцированное и дисперсионное взаимодействия.

Три составляющие энергии молекулярного взаимодействия (в процентах)

Вещество	Ориентационный эффект	Дисперсионный эффект	Индукционный эффект
Вода	77	19	4
Аммиак	45	50	5
Хлористый водород	15	81	4
Окись углерода	—	100	—

Мы видим, что индуцированное взаимодействие (по формулам Дебая) во всех случаях мало́. У полярных веществ энергия связи в молекулярных кристаллах на $^3/_4$ или на $1/2$ представляет собой энергию взаимодействия постоянных (или, как их называют также, «жестких») диполей. Энергия молекулярной связи у неполярных веществ практически полностью представляет собой энергию дисперсионного взаимодействия.

У ионных кристаллов энергия дисперсионного взаимодействия, как показывают вычисления, составляет 1—5% энергии кристалла.

Высокие механические свойства металлов (их большая упругость и прочность на разрыв), высокая температура плавления многих металлов и большая теплота сублимации свидетельствуют об интенсивности сил связи в металлах. Силы связи здесь имеют почти такое же происхождение, что и в ионных кристаллах,— это кулоново притяжение разноименных электрических зарядов. Однако в отличие от ионных кристаллов у металлов нет знакопеременности зарядов, расположенных в узлах кристаллической решетки. У металлов в узлах решетки расположены одноименно заряженные положительные ионы. Дисперсионное притяжение между ними незначительно в сравнении с их кулоновым отталкиванием и отталкиванием их электронных оболочек по формуле (6). Прочная связь между положительными ионами металла обеспечивается их притяжением к электронам, которые движутся между ионами.

Внешние, периферические, валентные электроны металла — у натрия, калия по одному, у бария, цинка по два, у алюминия три — в металлическом кристалле утрачивают свою принадлежность одному иону и, перебрасываясь из сферы влияния одного иона в

сферу влияния других ионов, движутся с большими скоростями по всему объему кристалла. Эти «свободные» электроны и обеспечивают высокую электропроводность металлов; их подвижность является также причиной большой теплопроводности металлов.

Даже при плотной упаковке положительных ионов металла, что имеет место в кристаллах меди, серебра, притяжение между электронами и ионами преобладает над отталкиванием ионов, так как траектории электронов близко охватывают ионы.

При абсолютном нуле температуры сохраняется быстрое движение электронов в металле, как это имеет место и для движения электронов по их невозмущенным орбитам в атомах. Благодаря быстрому движению электронов плотность отрицательного заряда между ионами металла в среднем по времени оказывается примерно одинаковой для всего не занятого ионами объема металла; решетка ионов погружена в «размазанное» отрицательное электричество, которое стремится сгуститься вокруг ионов и вследствие этого тесно стягивает ионы. В итоге обеспечивается большая энергия связи — порядка 30—60 *ккал* на 1 *г-атом* для относительно легкоплавких металлов и порядка 100—200 *ккал* для тугоплавких (это видно из таблицы теплот сублимации, приведенной на стр. 504).

§ 131. Адсорбция

Явление *адсорбции* [1]) заключается (в наиболее характерном случае) в том, что если твердое тело окружено газовой средой, то на его поверхности образуется тончайший слой уплотненного газа, как бы прилипающий к телу. Если тело имеет много мелких пор (пример: древесный уголь) или представляет собой тонкий порошок, то количество «адсорбируемого» газа на единицу массы тела может быть очень велико. Так, самшитовый уголь поглощает объем аммиака, в 90 раз превышающий его собственный объем; он поглощает 55 объемов сероводорода и 9 объемов кислорода. Свежеприготовленный кизилевый уголь (применяемый для приготовления пороха), будучи растерт в порошок, часто сам собой воспламеняется. Причиной здесь является то, что при адсорбции углем кислорода молекулярные силы притяжения совершают работу; при этом имеет место переход потенциальной энергии в кинетическую молекулярную энергию, что сопровождается повышением температуры, достаточным для воспламенения [2]).

Способностью свежеприготовленного порошкообразного угля сильно адсорбировать газы пользуются в вакуумной технике для удаления последних остатков воздуха из пустотных приборов.

---

[1]) От латинских слов ad — к и sorbeo — поглощаю.

[2]) Подобным образом объясняется самовозгорание некоторых мелкораспыленных веществ, например мучной пыли, если большое количество ее взвешено в воздухе (такие случаи бывали на больших мельницах).

Адсорбционная способность древесного угля сильно возрастает при особой его обработке, например сильном обжиге в присутствии водяного пара; такой уголь называется «активированным»; он применяется как в технике, так и в военном деле — для приготовления противогазов, созданных в годы первой мировой войны акад. Николаем Дмитриевичем Зелинским. Изучение адсорбции газов и паров активированными углями и методов активизации угля проводилось многими учеными (А. Титовым, Мак-Беном и др.); с наибольшей полнотой и тщательностью эти исследования были проведены акад. М. М. Дубининым.

Уголь способен также адсорбировать жидкие и растворенные вещества. Так, фильтруя жидкости через порошок древесного угля (или взбалтывая с ним), можно удалять из них органические краски, например индиго, лакмус. Органические вещества, растворенные в питьевой воде, также адсорбируются древесным углем, но он скоро теряет свою активность.

Для объяснения адсорбции было предложено несколько теорий (Ленгмюром, Эйкеном, Б. В. Ильиным, Полани). Одна из этих теорий, развитая Ленгмюром и проф. Борисом Владимировичем Ильиным, заключается в следующем.

Подобно тому как и у жидкости, у твердого тела ряды частиц, лежащих на самой поверхности, находятся в особом состоянии вследствие того, что они с одной стороны не имеют соседей. Каждый положительный электрический заряд, входящий в состав какого-нибудь атома, является источником силовых линий, а каждый отрицательный — «стоком» этих линий. Силовая линия, имеющая один свой конец на атоме, расположенном внутри тела, непременно имеет другой конец на каком-нибудь из соседних атомов. Но у атомов, лежащих на поверхности, дело обстоит иначе: здесь некоторые силовые линии оказываются «ненасыщенными», т. е. их второй конец не примыкает ни к какому атому данного тела. Такие силовые линии являются как бы удочками, при помощи которых тело улавливает из окружающей газовой среды отдельные молекулы (из которых каждая обладает положительными и отрицательными электрическими зарядами) и притягивает их к себе, устанавливая их так, чтобы к заряду, лежащему на поверхности, непосредственно примыкал противоположный ему заряд притянутой молекулы.

На рис. 263 схематически показан адсорбированный слой газа на поверхности твердого тела. Эта поверхность показана штриховкой; знаками $+$ и $-$ показаны заряды атомов, лежащих на поверхности. Газовые молекулы для простоты рассматриваются как «диполи», т. е. каждой молекуле приписывается только два заряда, или «полюса».

Притягивая газовые молекулы к поверхности твердого тела, электрические силы совершают работу; в результате в системе выделяется эквивалентное количество теплоты. Это — так называемая

теплота адсорбции. Эта теплота довольно значительна: она составляет несколько тысяч калорий на каждый моль адсорбированного газа.

На основе только что указанных электростатических представлений В. В. Тарасов вывел формулу, связывающую мольную теплоту адсорбции с диэлектрической постоянной адсорбируемого газа. Оказывается, что с увеличением одной из этих величин увеличивается и другая. Опыт подтверждает такую зависимость.

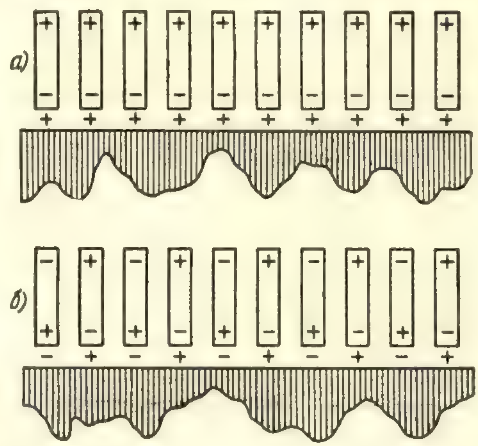


Рис. 263. Адсорбция слоя газа на поверхности твердого тела: *а*—заряды атомов, лежащих на поверхности, одноименны; *б* — заряды того и другого знака чередуются.

Когда твердое тело достаточно долгое время находится в атмосфере газа, то между адсорбированным и свободным газом устанавливается статистическое (подвижное) равновесие. Количество газа Γ, адсорбированного каждым квадратным сантиметром истинной поверхности адсорбента, зависит от температуры и давления. При увеличении давления количество адсорбированного газа возрастает (однако оно возрастает медленнее, чем это следовало бы по закону Генри); при повышении температуры количество адсорбированного газа быстро убывает (рис. 264).

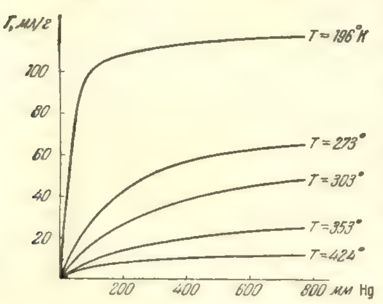


Рис. 264. Изотермы адсорбции углекислоты на угле.

Зависимость адсорбции от давления газа приближенно подчиняется *формуле Ленгмюра* («изотерма адсорбции»):

$$\Gamma = \Gamma_\infty \frac{p}{p+b}. \qquad (13)$$

Из этой формулы следует, что при малых давлениях $p \ll b$ оправдывается закон Генри $\Gamma = \frac{\Gamma_\infty}{b} p$, при больших же давлениях $p \gg b$ достигается некоторый предел адсорбции $\Gamma = \Gamma_\infty = \text{const}$.

Зная количество газа Γ, адсорбированного 1 *см*², можно определить истинную поверхность адсорбента. Таким образом найдено,

что 1 *г* угля (применяемого в технике для целей адсорбции) благодаря большой пористости имеет истинную поверхность, равную примерно 10^5 *см*^{2}.

Теория Полани предусматривает возможность ожижения адсорбированного газа в микроскопических порах твердого тела, где (как в капиллярах, стенки которых смачиваются жидкостью) давление насыщенного пара должно иметь тем меньшую величину, чем меньше диаметр пор (§ 118). Указанная *капиллярная конденсация* хотя и является возможной (при температурах ниже критической), но при давлениях в газовой фазе, далеких от насыщения, она является, по-видимому, незначительной.

Лондон (основываясь на волновой механике) показал, что адсорбционный потенциал, характеризующий силы, притягивающие газовые молекулы к поверхности твердого тела, и определяющий величину теплоты адсорбции, убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния от поверхности твердого тела и мало зависит от температуры.

Адсорбции газов посвящено большое число научных исследований, тем не менее до сих пор нет полной ясности в одной из главных проблем этой области: в явлениях адсорбции как средства катализа (катализ — это ускорение химических реакций, имеющее громадное практическое значение для промышленности).

При погружении твердых тел в раствор на поверхности твердого тела обычно происходит адсорбция растворенных веществ, что широко используется в различных химико-технологических процессах. Например, посредством особой обработки приготовляют уголь, адсорбирующий кислоты и не адсорбирующий щелочи, а также приготовляют и такой уголь, который адсорбирует только щелочи. Адсорбция растворенных веществ пористыми и мелкозернистыми телами в теоретическом отношении важна для понимания разнообразных явлений, составляющих предмет изучения особой научной дисциплины — физико-химии дисперсных систем.

ГЛАВА XX

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ДВИГАТЕЛЯХ И СВЕРХЗВУКОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 132. Основное уравнение газодинамики. Адиабатный теплоперепад

Для исследования движений при больших скоростях, когда нельзя пренебрегать сжимаемостью газа, необходимо руководствоваться *сочетанием законов механики с законами термодинамики*. Научную дисциплину, возникшую в результате уточнения и развития аэродинамики на основе применения термодинамики, стали называть *газодинамикой*.

Выводы газодинамики приобрели руководящее значение: для современной скоростной авиации, для проектирования паровых и газовых турбин, для реактивной техники, а также для внутренней и внешней баллистики (т. е. учения о движении снаряда внутри орудийного ствола и в атмосфере).

Рассмотрим процессы, происходящие в газовом потоке, с точки зрения законов термодинамики.

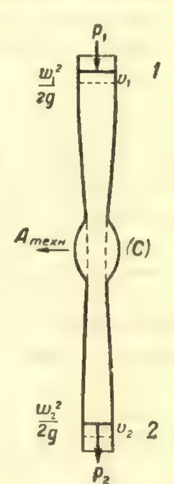


Рис. 265.

Представим себе стационарный газовый поток, схематически изображенный на рис. 265, где выделена часть этого потока. «Профиль» трубопровода (т. е. характер изменения его поперечного сечения) может быть любым, но для простоты рассуждения мы допустим, что начальный и конечный участки выделенной части потока имеют цилиндрическую форму. На пути газового потока могут иметься устройства, преобразующие энергию потока в работу (например, подвижные лопатки турбины) или же, наоборот, сообщающие газовому потоку энергию за счет работы, подводимой извне (например, подвижные лопатки компрессора); на рис. 265 устройства подобного рода схематически обозначены фигурой C.

Поскольку поток стационарен, параметры состояния потока для любого его сечения остаются неизменными во времени, но они, конечно, могут быть неодинаковыми для разных сечений. Пусть в

начальном участке газ имеет давление p_1, удельный объем v_1 и движется со скоростью w_1, а в конечном участке те же параметры пусть имеют значения p_2, v_2 и w_2.

Проследим перемещение выделенной части газового потока за промежуток времени, в течение которого через любое сечение потока протекает 1 *кг* газа (было бы формально строже отнести рассуждения к бесконечно малому промежутку времени dt, когда через любое сечение проходит $G\,dt$ *кг* газа, где G — «секундный расход» газа; но по существу это не меняет всех последующих выводов, избавляя нас только от сделанных допущений, что начальный и конечный участки потока цилиндричны).

По первому началу термодинамики количество тепла Q, подведенного к рассматриваемой системе (в данном случае ко всей выделенной части газового потока за указанный выше промежуток времени), равно приросту полной энергии (она в данном случае слагается из прироста внутренней и кинетической энергии газа) плюс производимая работа (которая в данном случае в свою очередь слагается из работы сил давления A_p на торцовые поверхности выделенной части газового потока, технической работы $A_{\text{техн}}$ в устройстве C и работы трения $A_{\text{трения}}$). Таким образом,

$$Q = \Delta U + \Delta E_{\text{кин}} + A_p + A_{\text{техн}} + A_{\text{трения}}.$$

Согласно сделанному допущению это уравнение отнесено нами ко времени, в течение которого через любое поперечное сечение трубопровода проходит 1 *кг* газа. Стало быть, изменение внутренней энергии рассматриваемой части потока вызвано тем, что количество газа в начальном участке (с термодинамическим состоянием *1*) уменьшилось на 1 *кг*, тогда как количество газа в конечном участке (с термодинамическим состоянием *2*) увеличилось на 1 *кг* (для всех промежуточных участков трубопровода вследствие стационарности потока $U = \text{const}$). Таким образом,

$$\Delta U = u_2 - u_1,$$

где u_1 и u_2 — удельные внутренние энергии газа.

По аналогичным соображениям

$$\Delta E_{\text{кин}} = \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g},$$

где $\frac{w^2}{2g}$ — кинетическая энергия 1 *кг* газа.

Что касается работы сил давления на торцовые поверхности выделенной части потока, то в участке *1* воображаемый поршень (или поверхность, отграничивающая сзади лежащие слои газа) описывает объем v_1 (объем 1 *кг* газа), и, стало быть, здесь затрачивается работа p_1v_1, тогда как в участке *2* производится работа p_2v_2, т. е.

$$A_p = p_2v_2 - p_1v_1.$$

Итак,

$$Q = i_2 - i_1 + \left(\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g}\right) + A_{\text{техн}} + A_{\text{трения}}, \tag{1}$$

где $i = u + pv$ есть теплосодержание 1 *кг* газа (§ 107, стр. 429).

Это уравнение является основным в газодинамике. Уравнение (1) показывает, что главенствующую роль в термодинамической характеристике газового потока и в определении работы, которая может быть получена от газового потока, играет теплосодержание газа. Теплосодержание, которое в случае агрегатных и фазовых превращений связано (как было пояснено в § 107) со скрытой теплотой фазового превращения (например, с теплотой парообразования, плавления и т. д.), в рассматриваемом нами сейчас случае движения газов, а также и в рабочих процессах тепловых машин определяет работоспособность газа. Действительно, когда течение газа происходит адиабатно, а также когда адиабатно происходят процессы в рабочей полости C (в любой машине — поршневой или в турбине), т. е. когда $Q = 0$, то

$$A_{\text{техн}} + A_{\text{трения}} = -\Delta i + \left(\frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_2^2}{2g}\right), \tag{2}$$

где $-\Delta i$ есть убыль теплосодержания: $-\Delta i = i_1 - i_2$, тогда как второй член правой части формулы представляет собой убыль кинетической энергии.

Таким образом, без притока и отдачи тепла газовый поток производит работу за счет убыли кинетической энергии и убыли теплосодержания. Во многих тепловых машинах (в двигателях внутреннего сгорания, в паровых поршневых машинах, в некоторых случаях и в турбинах) кинетической энергией отработавших газов или пара часто можно пренебречь в сравнении с изменением теплосодержания, так же как и начальными значениями кинетической энергии газа или пара (в котле); *во всех этих случаях наибольшая техническая работа, которая может быть получена при адиабатном расширении газа или пара, определяется убылью теплосодержания*, или, как говорят, *адиабатным теплоперепадом* ($-\Delta i$); по уравнению (2) при $w_1 = w_2$ и $A_{\text{трения}} = 0$ имеем:

$$A_{\text{техн}} = -\Delta i = i_{\text{нач}} - i_{\text{выхл}}.$$

Это заключение нуждается в пояснении, поскольку известно, что абсолютная работа $A_{\text{абс}}$ адиабатного расширения равна убыли внутренней энергии (стр. 403), а не убыли теплосодержания:

$$A_{\text{абс}} = -\Delta u.$$

На рис. 266 заштрихованная площадь показывает *абсолютную работу* адиабатного расширения газа или пара. Но, с одной стороны, для технического использования указанной работы в любом

возможном устройстве тепловой машины нужно преодолевать противодавление, которое испытывает поршень машины или газовый поток; на это затрачивается работа (считая на 1 *кг* газа или пара), равная p_0v_0, где v_0 — удельный объем отработавшего газа или пара. С другой стороны, при непрерывном поступлении рабочего газа или пара (например, при наполнении цилиндров поршневой машины паром, который образуется в котле), кроме работы расширения, можно использовать также и «работу наполнения» (в двигателях внутреннего сгорания — работу изобарного сжигания топлива); эта работа равна pv, где v — удельный объем газа или пара к началу расширения.

Если, снова обратившись к рис. 266, мы представим себе, что к заштрихованной площади, изображающей абсолютную работу

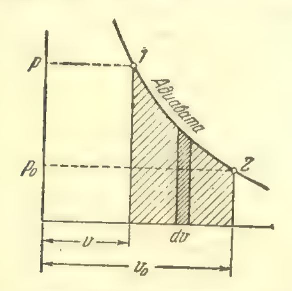


Рис. 266. Абсолютная адиабатная работа (определяется изменением внутренней энергии).

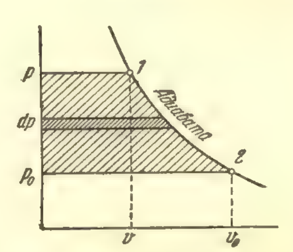


Рис. 267. Техническая адиабатная работа (определяется изменением теплосодержания, «адиабатным теплоперепадом»).

адиабатного расширения, прибавлена площадь прямоугольника pv и вычтена площадь p_0v_0, то получим графическое изображение адиабатной *технической работы*, показанное на рис. 267. Площадь, заштрихованная на рис. 266, определяет убыль внутренней энергии, тогда как площадь под той же адиабатой, взятая по отношению к оси давлений на рис. 267, определяет убыль теплосодержания ($u-u_0+pv-p_0v_0=i-i_0$).

Абсолютная работа адиабатного расширения

$$A_{\text{абс}}=-\Delta u=\int_1^2 p\,dv,$$

что в графической интерпретации означает, что площадь, заштрихованную на рис. 266, мы рассматриваем как сумму бесконечно большого числа элементарно малых вертикальных полосок pdv.

Если аналогично графическое изображение технической адиабатной работы, показанной на рис. 267, рассматривать как сумму эле-

ментарных горизонтальных полосок $v\,dp$, то обнаруживается, что

$$A_{\text{техн}} = -\Delta i = -\int_1^2 v\,dp. \qquad (3)$$

Эту формулу, обоснованную нами графически, нетрудно получить и аналитически. Действительно, $di = d\,(u+pv) = du + p\,dv + v\,dp$; здесь первые два члена в правой части в сумме равны δQ. Стало быть, при $\delta Q = 0$, т. е. для адиабатных изменений,

$$di = v\,dp,$$

что и приводит к формуле (3).

§ 133. Адиабатное течение газа

Для многих технических приложений газодинамики весьма важным случаем является течение газа по трубопроводу переменного сечения без притока или отдачи тепла (т. е. адиабатно) и без производства работы. В этом случае, когда $Q=0$ и $A_{\text{техн}}=0$ (для упрощения положим, что и $A_{\text{трения}}=0$), основное уравнение газодинамики преобразуется в уравнение, которое является *термодинамическим обобщением уравнения Бернулли:*

$$i_1 + \frac{w_1^2}{2g} = i_2 + \frac{w_2^2}{2g} = \text{const}. \qquad (4)$$

Здесь в отличие от уравнения Бернулли (§ 49) вместо давления, деленного на плотность, фигурирует теплосодержание; но $i = u + pv$, и очевидно, что для потока несжимаемой жидкости, когда нет необходимости учитывать изменение термодинамического состояния (т. е. когда внутренняя энергия жидкости предполагается постоянной, $u_1 = u_2$ и когда плотность $\frac{1}{v}$ неизменна), уравнение (4) переходит в уравнение Бернулли.

Из термодинамического обобщения уравнения Бернулли мы видим, что *сумма теплосодержания и кинетической энергии газового потока при стационарном адиабатном течении без производства работы одинакова для всех сечений потока.*

Течение, при котором скорость газа убывает, а плотность, давление и температура растут, называется *течением со сжатием.* (Следует подчеркнуть, что здесь слово «сжатие» относится к термодинамическому состоянию потока, к удельному объему газа, а отнюдь не к площади поперечного сечения трубопровода; при не слишком больших начальных скоростях газа в расширяющемся трубопроводе газ затормаживается, кинетическая энергия его уменьшается, а температура и плотность растут, т. е. имеет место течение со сжатием.)

Течение, при котором кинетическая энергия потока растет, а плотность, давление и температура уменьшаются, называется *течением с расширением*. Рассмотрим оба случая течения в отдельности.

Течение с расширением имеет место, например, при истечении пара из котла или при истечении газа из камеры реактивного двигателя.

При адиабатном течении с расширением прирост кинетической энергии $\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}$ вызывается убылью теплосодержания i_1-i_2 и падением температуры:

$$\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}=i_1-i_2\approx c_p(T_1-T_2). \tag{5}$$

Падение температуры [1]) сопровождается уменьшением давления p и плотности газа γ; когда расширение газа происходит равновесно, можно воспользоваться уравнением Пуассона

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}=\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\varkappa-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}=c_pT_1\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]. \tag{6}$$

Здесь согласно уравнению Майера $c_p=\frac{\varkappa R}{\varkappa-1}$.

Представим себе, что из баллона, где давление газа p_1 и температура T_1 (а w_1 вследствие большого поперечного сечения баллона приближенно можно принять равной нулю), газ адиабатно вытекает через отверстие площадью S в резервуар, в котором давление («противодавление») p_0. *При небольших перепадах давления* (когда p_1 превышает p_0 на несколько процентов или десятков процентов, но не более чем в 1,8—1,9 раза) *давление газа в вытекающей струе p_2 равно противодавлению p_0*. В этом случае согласно уравнению (6) *скорость истечения* определяется формулой

$$w_2=\sqrt{\frac{2g\varkappa RT_1}{\varkappa-1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}. \tag{7}$$

Здесь p_2 — статическое давление в вытекающей струе.

Весовой расход газа G (в *кг/сек*) равен произведению площади поперечного сечения отверстия (в $м^2$) на скорость истечения (в *м/сек*) и на плотность вытекающего газа (в $кг/м^3$):

$$G=\gamma_2 w_2 S.$$

По мере уменьшения противодавления p_0 давление в вытекающей струе p_2 будет уменьшаться, а вместе с ним будет адиабатно уменьшаться по закону Пуассона и плотность вытекающего газа; скорость истечения будет расти.

Весовой расход газа через данное отверстие S определяется двумя величинами: плотностью и скоростью истечения газа. Первая из этих величин, γ_2, с уменьшением противодавления убывает, а вторая, w_2, наоборот, растет. *Расход газа с уменьшением противодавления p_0 первое время увеличивается* за счет быстрого увеличения скорости; затем расход замедляется за счет заметного уменьшения плотности и, наконец, *становится постоянным*: каким бы малым ни было противодавление, расход газа будет иметь одну и ту же величину.

[1]) Понятно, что правая часть уравнения (5) справедлива только при $c_p\approx$const, т. е. для не слишком больших перепадов температуры.

Таким образом, оказывается, что когда противодавление составляет примерно половину давления в баллоне (более точное соотношение указано ниже), то дальнейшее уменьшение противодавления является бесполезным для повышения скорости истечения и расхода газа. В струе устанавливаются некоторые так называемые *критические* значения скорости истечения, давления, температуры и плотности газа, которые уже более не изменяются, как бы мы дальше ни уменьшали противодавление. Если до этого момента давление на выходе в струе, как было упомянуто выше, оставалось равным противодавлению ($p_2 = p_0$), то с указанного момента *при истечении газа с критической скоростью у выходного отверстия устанавливается скачок давления* ($p_2 > p_0$), так как уменьшение p_0 уже не будет больше вызывать уменьшения p_2.

Пусть, например, в баллоне заключен газ под давлением в 80 *ат*; можно выпускать этот газ в пустоту, в атмосферу или перепускать этот газ в другой баллон, где давление составляет несколько атмосфер; во всех случаях расход газа, скорость его истечения и давление в вытекающей струе будут одинаковы и будут оставаться постоянными до тех пор, пока противодавление не достигнет 42 *ат* (при дальнейшем росте противодавления расход и скорость истечения будут уменьшаться)

Можно доказать (см. примечание на стр. 532—533), что отношение давления в баллоне перед истечением к *критическому давлению* в струе равно:

$$\frac{p_1}{p_к} = \left(\frac{\varkappa + 1}{2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}, \quad \text{где} \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_v} \tag{8}$$

(для воздуха $p_1/p_к = 1{,}89$).

Скорость газа, вытекающего из отверстия или из сужающегося насадка, не может быть больше *критической скорости*:

$$w_к = \sqrt{\frac{2g\varkappa R}{\varkappa + 1} T_1}. \tag{9}$$

Понижение температуры в струе при критическом истечении согласно уравнению Пуассона и формуле (8) равно:

$$\frac{T_к}{T_1} = \left(\frac{p_к}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \frac{2}{\varkappa + 1}.$$

Таким образом $T_1 \frac{2}{\varkappa + 1} = T_к$, и, стало быть, формулу (9) можно переписать так:

$$w_к = \sqrt{g\varkappa R T_к}.$$

Критическая скорость равна скорости, с которой распространяется звук при имеющейся в струе температуре $T_к$. Ни при каком сколь угодно большом давлении в баллоне газ не может вытекать из отверстия со скоростью, большей, чем скорость звука.

Когда давление в струе равно критическому давлению, а скорость истечения равна скорости звука, то расход газа G будет иметь наибольшую величину, возможную при начальных термодинамических параметрах газа в баллоне.

Вычисление показывает, что *максимальный расход газа* при критическом течении определяется формулой

$$G = S\sqrt{\frac{g\varkappa}{R}\left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}}} \cdot \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}.$$

Для воздуха при $R = 29{,}3$ и $\varkappa = 1{,}4$ $G \approx 0{,}4 \frac{S_2 p_1}{\sqrt{T_1}}$.

Чтобы понять физические причины, обусловливающие существование критических параметров в струе вытекающего газа, представим себе, что противодавление вдруг резко снижено (хотя бы до нуля); если скорость истечения уже достигла перед тем скорости звука, то «весть» об указанном событии никогда не будет передана возникшей звуковой волной разрежения в струю выходящего газа, и, стало быть, это событие не отразится на термодинамическом состоянии газа, вытекающего со скоростью распространения звуковых волн [1]).

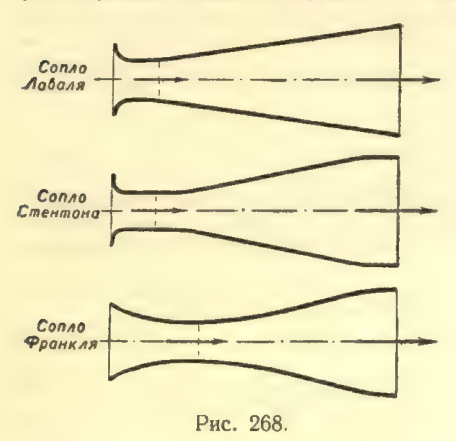


Рис. 268.

Регулируя режим течения газа определенным выбором профиля трубопровода, можно использовать избыточное давление, возникающее в струе при критическом истечении, и реализовать *скорости течения, превышающие скорость звука*. Физически эта задача заключается в том, чтобы изыскать условия, при которых неупорядоченное молекулярно-тепловое движение в газе, который уже движется со скоростью звука, частично превратить в упорядоченное движение и, таким образом, сообщить массе газа скорость, превышающую критическую скорость истечения. С указанной целью Лавалем, Стентоном и советским ученым Франклем были разработаны сверхзвуковые сопла (рис. 268).

В сопле Лаваля скорость газа непрерывно растет: в сужающейся части сопла скорость возрастает от нуля до звуковой величины (рис. 269); в расширяющейся части сопла скорость возрастает от звуковой до сверхзвуковой величины.

Весовой расход воздуха через любое сечение выходного сопла имеет одну и ту же величину:

$$w_1 S_1 \gamma_1 = w_2 S_2 \gamma_2. \tag{10}$$

Это — *уравнение неразрывности для потока сжимаемого газа*. Отсюда может быть найдено соотношение между любыми двумя сечениями сопла.

---

[1]) Для вывода уравнений (8) и (9), определяющих критические значения скорости и давления, выразим расход газа как функцию относительного изменения давления в струе $\pi = \frac{p_2}{p_1}$, допустив, что $w_1 = 0$:

$$G = S\gamma_2 w_2 = S\gamma_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\frac{2g\varkappa R}{\varkappa - 1} T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}.$$

По уравнению состояния $\gamma_1 = \frac{p_1}{RT_1}$. После преобразования получаем:

$$G = Sp_1 \sqrt{\frac{2g\varkappa}{(\varkappa - 1) RT_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}.$$

Чтобы найти относительное уменьшение давления $\pi = \frac{p_2}{p_1}$, при котором рас-

Давление газа по мере приближения к выходу из сопла падает, как показано на рис. 269; при уменьшении давления (за критическую величину) скорость истечения растет медленнее, чем уменьшается плотность: поэтому увеличение скорости должно обеспечиваться расширением сопла; выходное сечение больше критического. Следует обратить внимание на различие между течением несжимаемой жидкости и течением газа при сверхкритическом перепаде давления: скорость несжимаемой жидкости (как и скорость газа при докритическом давлении) увеличивается в сужающихся трубах; наоборот, скорость при сверхкритических перепадах давления *после перехода за звуковую величину* увеличивается в расширяющихся соплах.

Расширяющиеся сопла применяются в паровых и газовых турбинах, в реактивных двигателях и некоторых других устройствах.

При больших относительных перепадах давления понижение температуры газа, текущего по расширяющемуся соплу, бывает очень значительным. Так, например, когда $\frac{p_1}{p_2} = 100$, $t_1 = 15°$ C, то температура вытекающей струи воздуха понижается почти на 80°.

Рис. 269. Изменение давления и скорости в расширяющемся сопле для сверхзвукового течения воздуха.

Течение со сжатием характеризуется уменьшением скорости потока и возрастанием давления, плотности и температуры газа. Согласно уравнению (4) убыль кинетической энергии $\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}$ вызывает прирост теплосодержания $i_2 - i_1$ и повышение температуры:

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} = i_2 - i_1 \approx c_p (T_2 - T_1). \qquad (11)$$

ход газа будет наибольшим, приравняем нулю первую производную от расхода газа G по изменению давления π:

$$\frac{dG}{d\pi} = 0.$$

Учитывая, что p_1 и T_1 от π не зависят, получаем:

$$\frac{dG}{d\pi} = \pi_к^{\frac{2}{x}} - \pi_к^{\frac{x+1}{x}} = 0.$$

Это уравнение приводит нас к формуле (8):

$$\pi_к = \frac{p_k}{p_1} = \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}.$$

Подставляя это значение $\pi_к$ в формулу (7) для скорости истечения, получаем формулу (9).

Отсюда относительное повышение теплосодержания при адиабатном течении со сжатием до полного затормаживания потока ($w_2=0$) получается равным

$$\frac{i_2}{i_1}=1+\frac{w_1^2}{2gi_1}.$$

Здесь величина gi_1 пропорциональна квадрату скорости звука. [Действительно, по формуле (2) (стр. 265) $c_1^2=g\varkappa RT_1$; с другой стороны, $gi_1=gc_pT_1=g\frac{\varkappa R}{\varkappa-1}T_1$; следовательно, $gi_1=\frac{c_1^2}{\varkappa-1}$.]

Итак, *относительное повышение теплосодержания зависит только от отношения начальной скорости газа к скорости звука в потоке до торможения газа.*

Отношение скорости течения к скорости звука (от которого зависит изменение параметров газа при сжатии) называют *числом Маха*, или *числом Берстоу*, и обозначают символом M:

$$\mathrm{M}=\frac{w}{c}=\frac{w}{\sqrt{g\varkappa RT}}.$$

Вводя это обозначение в предыдущее уравнение, получаем

$$\frac{i_2}{i_1}=\frac{\varkappa-1}{2}\mathrm{M}_1^2. \qquad (12)$$

Когда изменения теплосодержания не слишком велики, так что теплоемкость можно считать постоянной, то

$$\frac{i_2}{i_1}=\frac{T_2}{T_1}.$$

Все, что было сказано выше для течения с расширением, вследствие *обратимости течения* можно применить и к течению со сжатием, переменив только знаки скоростей (т. е. считая, например, для рис. 269, что течение происходит справа налево). Когда начальная скорость превосходит скорость звука, в сужающейся части сопла происходит торможение сверхзвукового потока. В самом узком — *критическом* — сечении сопла скорость потока снижается до *местной скорости звука*, т. е. до величины скорости звука при той температуре, которая имеется в данном сечении (а температура в критическом сечении для течения со сжатием, понятно, больше начальной температуры). В расширяющемся участке сопла происходит дальнейшее торможение потока, при котором скорость понижается от звуковой до той или иной величины, иногда близкой к нулю, в зависимости от длины и геометрической формы сопла.

При больших начальных скоростях повышение температуры и увеличение давления при торможении намного превосходит те, которые имеют место при работе компрессоров. Так, для полета в стратосфере при M=4 и $T=216{,}5°$ K давление при равновесном торможении повышается более чем в 150 раз, т. е. гораздо значительнее, чем в двигателе внутреннего сгорания При M=7 давление при торможении повышается более чем в 5000 раз, а температура становится выше, чем внутри мартеновской печи. Боевые головки баллистических ракет для защиты от чрезмерного нагрева покрывают жаростойкими составами которые при движении падающей ракеты в нижних слоях атмосферы частично оплавляются.

Когда газ затормаживается до полной остановки ($w_2=0$), то по уравнению (12) при равновесном торможении получаются следующие значения для повышения температуры и давления:

$\mathrm{M}=$	3	5	7	10
$\frac{\Delta T}{T_1}=$	1,8	4,5	8,4	15
$\frac{p_2}{p_1}=$	37	602	5900	95 000[1]).

[1]) В действительности вследствие неравновесности торможения повышение давления при M=5 бывает примерно в 3 раза, а при M=10 в десятки раз меньше.

§ 134. Ударные волны и скачки уплотнения. Адиабата Гюгонио

Адиабатные процессы в действительности всегда в той или иной мере неравновесны (необратимы). При внезапных, резких адиабатных сжатиях газа возникают *ударные волны*. Ударная волна представляет собой *поверхность разрыва непрерывности физических свойств среды*. Ударные волны возникают: при разрыве бомб, когда уплотнение окружающего воздуха вызывается выделением газообразных продуктов взрывной реакции; при взрывном горении (волны детонации), когда продукты горения вызывают уплотнение горючей смеси; при всех быстрых и сильных сжатиях газа. Ударные волны образуются также при полете снарядов и вообще при набегании газа со сверхзвуковой скоростью на какие-либо препятствия (в этом случае ударную волну называют скачком уплотнения).

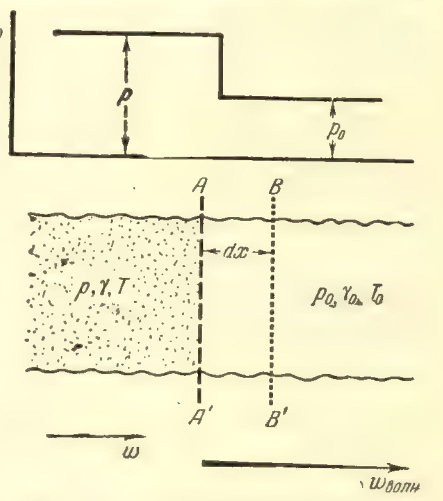


Рис. 270. К выводу уравнений Римана для ударной волны.

Ударные волны распространяются со скоростью $w_{\text{волн}}$, которая всегда больше скорости звука c. Возникновение и распространение ударной волны связано с перемещением сжатого газа вслед за фронтом волны, причем газ перемещается в ту же сторону, куда распространяется волна; скорость перемещения сжатого газа w всегда меньше скорости движения фронта ударной волны.

Начальная скорость распространения ударной волны тем более велика, чем бо́льшим изменением давления вызвана волна. Немецкий ученый Риман в 1860 г., основываясь на законах сохранения массы и количества движения, показал, что в любой момент скорость ударной волны определяется скачками давления и плотности в волне.

Пусть, как показано на рис. 270, AA' есть фронт ударной волны в момент времени t, BB' — положение фронта через промежуток времени dt, S — площадь сечения рассматриваемой части фронта волны. Давление и весовую плотность «невозмущенного» газа перед фронтом волны обозначим через p_0 и γ_0, а те же параметры для «возмущенного» газа, т. е. для газа позади фронта волны, обозначим через p и γ. За время dt в слое толщиной dx между поверхностями

AA' и BB' произошло уплотнение газа; количество газа в этом слое увеличилось на величину $dG=(\gamma-\gamma_0)S\,dx$; это количество dG газа переместилось в рассматриваемый слой за время dt (слева направо через поверхность AA') со скоростью w, следовательно, $dG=\gamma Sw\,dt$. Таким образом, из закона сохранения массы получаем:

$$(\gamma-\gamma_0)S\,dx=\gamma Sw\,dt.$$

Но $\frac{dx}{dt}$ есть скорость распространения ударной волны. Стало быть,

$$w_{\text{волн}}=\frac{\gamma}{\gamma-\gamma_0}w. \qquad \text{(a)}$$

За время dt газ в слое dx, ранее покоившийся, приобрел количество движения $w\,\frac{\gamma_0}{g}S\,dx$, созданное импульсом силы $(p-p_0)S\,dt$:

$$w\,\frac{\gamma_0}{g}S\,dx=(p-p_0)S\,dt.$$

Отсюда получаем второе уравнение для скорости ударной волны:

$$w_{\text{волн}}=g\frac{p-p_0}{\gamma_0}\frac{1}{w}. \qquad \text{(b)}$$

Перемножая выражения (a) и (b), а затем разделив одно из них на другое, получаем *два уравнения Римана*:

$$w_{\text{волн}}=\sqrt{g\frac{p-p_0}{\gamma-\gamma_0}\frac{\gamma}{\gamma_0}}, \qquad (13)$$

$$w=\sqrt{g\frac{p-p_0}{\gamma_0}\frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma}}. \qquad (14)$$

Часто эти уравнения Римана записывают, вводя вместо плотности удельные объемы невозмущенного (v_0) и сжатого газа (v):

$$w_{\text{волн}}=v_0\sqrt{g\frac{p-p_0}{v_0-v}}, \qquad (13')$$

$$w=(v_0-v)\sqrt{g\frac{p-p_0}{v_0-v}}. \qquad (14')$$

Для весьма малых скачков давления формула (13') в пределе переходит в лапласово уравнение для скорости звука. Действительно, отношение элементарно малого повышения давления ∂p к относительному уменьшению объема (т. е. к $-\partial v/v$) представляет собой не что иное, как модуль упругости K всестороннего сжатия, а величина $gv=\frac{g}{\gamma}=\frac{1}{\rho}$, где ρ — массовая плотность среды. Поэтому для звуковых волн формулу (13') можно представить в виде формулы (1) § 66: $c=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$. Здесь K — адиабатный (а не изотермический) модуль упругости; он больше изотермического модуля упругости

во столько раз, во сколько раз теплоемкость при постоянном давлении больше теплоемкости при постоянном объеме [1]): $K_S = \frac{c_p}{c_v} K_T$.

Для газов из уравнения Клапейрона $p = \frac{RT}{v}$ следует, что $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\frac{RT}{v^2}$ и, стало быть, $K_T = \frac{RT}{v} = p$. Поэтому

$$c = \sqrt{\frac{K_S}{\rho}} = \sqrt{g \frac{c_p}{c_v} v K_T} = \sqrt{g \varkappa v p} = \sqrt{g \varkappa RT}.$$

Это выражение для скорости звука в газах было рассмотрено в § 66.

Формулы Римана указывают на непостоянство скорости распространения ударной волны (а также и скорости перемещения газа вслед за фронтом волны): *скорость ударной волны тем более велика, чем больше скачок давления в волне*, поддерживающий распространение волны; по мере уменьшения этого скачка давления скорость ударной волны убывает (от нескольких тысяч метров в секунду при взрывах) до скорости звука.

Если совместить уравнения Римана с законом сохранения энергии (или с основным уравнением газодинамики), как это было сделано французским инженером Гюгонио в 1888 г., то получается соотношение, устанавливающее связь между термодинамическими параметрами газа при ударном адиабатическом сжатии газа. Опять обращаясь к рис. 270, представим себе, что ударная волна распро-

---

[1]) Чтобы убедиться в этом, представим элемент сообщаемой телу теплоты как сумму теплот, сообщаемых при изобарном и изохорном процессах:

$$\delta Q = \left.\frac{\delta Q}{\partial v}\right|_p dv + \left.\frac{\delta Q}{\partial p}\right|_v dp = \left.\frac{\delta Q}{\partial T}\right|_p \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + \left.\frac{\delta Q}{\partial T}\right|_v \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp = \\ = c_p \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + c_v \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp.$$

Рассматривая это выражение для равновесного процесса при $\delta Q = 0$ (т. е. при неизменности энтропии), получаем:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S = -\frac{c_p}{c_v} \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v}.$$

С другой стороны, из уравнения полного дифференциала температуры

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp$$

при $T = \text{const}$ обнаруживается, что отношение частных производных, стоящее в правой части предыдущего уравнения, равно $-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$. Следовательно, $v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S = \frac{c_p}{c_v} v \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$, или, что то же, $K_S = \varkappa K_T$, где $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$.

страняется в газе, который в целом движется с той же скоростью $w_1 = w_{волн}$ в обратном направлении, т. е. для случая, показанного на рис. 270, справа налево. Тогда все явление представится нам как перемещение возмущенного газа от неподвижной поверхности волны AA' влево со скоростью $w_2 = w_{волн} - w$. Подставив эти значения скоростей w_1 и w_2 в уравнение (4) и обозначая теплосодержание невозмущенного газа через i_0 $(i_1 = i_0)$, а возмущенного газа через i $(i_2 = i)$, получаем:

$$i - i_0 = \frac{w_{волн}^2}{2g} - \frac{(w_{волн} - w)^2}{2g}.$$

Заменяя в этом уравнении $w_{волн}$ и w выражениями указанных величин по формулам Римана (13') и (14') и учитывая, что появляющийся в правой части множитель, содержащий удельные объемы, можно представить в виде $v_0^2 - [v_0 - (v_0 - v)]^2 = v_0^2 - v^2 = (v_0 - v)(v_0 + v)$, приходим к у р а в н е н и ю Г ю г о н и о для ударного адиабатного сжатия любой среды:

$$i - i_0 = \frac{1}{2}(p - p_0)(v + v_0). \tag{15}$$

Чтобы сопоставить применительно к газам изменение давления в зависимости от плотности при адиабатном ударном сжатии (по Гюгонио) и при равновесном сжатии (по Пуассону), заменим в уравнении (15) i через $\frac{pv}{\varkappa - 1}$ и i_0 через $\frac{p_0 v_0}{\varkappa - 1}$. После несложных преобразований получаем уравнение адиабаты Гюгонио для газов:

$$\frac{v_0}{v} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}\frac{p}{p_0} + 1}{\frac{p}{p_0} + \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}}. \tag{16}$$

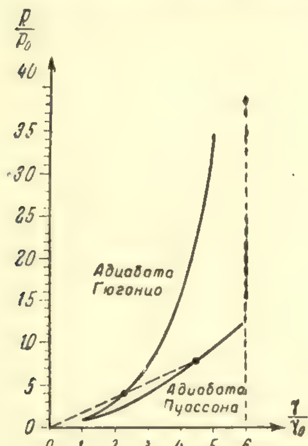


Рис. 271. Адиабата Пуассона и адиабата Гюгонио. Пунктирная прямая соответствует торможению газа при $M_0 = 2$ (стр. 539).

При ударном сжатии давление возрастает с увеличением плотности значительно быстрее, чем при равновесном сжатии. Это объясняется тем, что при ударном сжатии рассеивается в тепло избыточная затрата энергии и давление повышается более за счет роста температуры газа, чем вследствие уплотнения. Рис. 271 показывает, насколько крутизна адиабаты Гюгонио больше, чем крутизна адиабаты Пуассона

Адиабата Гюгонио имеет вертикальную асимптоту для воздуха при $\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_{макс} = 6$. Это значит, что *при любой мощности ударное сжатие может привести самое большее к шестикратному увеличению плотности.*

При взрывном горении в определенных условиях возникает особый вид ударной волны, которую в этом случае (по предложению Бертло, открывшему указанное явление в 1881 г.) называют *волной детонации*. Распространяясь в горючей смеси, волна детонации вызывает такое повышение температуры, которого доста-

точно для воспламенения горючей смеси, или такое повышение давления во взрывающемся веществе, которого достаточно для возникновения взрывной реакции. Скорость распространения пламени при отсутствии детонации обычно невелика и измеряется метрами в секунду; при детонации фронт пламени распространяется со скоростью, в сотни и тысячи раз большей, а именно со скоростью волны детонации: в газообразных горючих смесях 2000—3000 *м/сек*, в конденсированных взрывчатых веществах 4000—6000 *м/сек* В газообразных горючих смесях скачок температуры в волне детонации достигает 3000—4000°, а скачок давления составляет десятки атмосфер. В твердых взрывчатых веществах скачок давления при детонации огромен и измеряется десятками тысяч атмосфер.

Скачок термодинамических параметров в волне детонации определяется уравнением Гюгонио (15), но в данном случае правая часть этого уравнения должна быть дополнена слагаемым, равным теплоте реакции Q, выделяющейся на 1 *кг* взрывчатой среды.

Важная особенность волн детонации в сравнении с обычными ударными волнами заключается в том, что детонационное распространение фронта пламени происходит всегда с определенной скоростью $w_{\text{волн}}=w_{\text{дет}}$, характерной для газовой смеси или взрывчатого вещества. Среда перемещается вслед за фронтом волны детонации со скоростью w. По отношению к этой перемещающейся возмущенной среде (содержащей продукты взрыва) волна детонации распространяется со скоростью звука в возмущенной среде:

$$w_{\text{дет}}=c+w. \tag{17}$$

Это соотношение было установлено Жуге в 1906 г. и носит название уравнения Жуге; оно дополняет для волн детонации уравнения Римана.

Как уже упоминалось, ударные волны (*скачки уплотнения*) образуются всегда при набегании сверхзвукового потока на какие-либо препятствия. Даже в правильно рассчитанных соплах обычно не удается осуществить равновесное торможение сверхзвукового потока, так как при набегании потока на входное отверстие уже возникает скачок уплотнения.

При торможении потока, в частности сверхзвукового потока, повышение температуры вызывается преобразованием кинетической энергии потока во внутреннюю энергию газа, и поэтому относительное повышение температуры не зависит от того, происходит ли торможение равновесно или неравновесно. Как при равновесном, так и при ударном торможении потока повышение температуры в уплотненном газе может быть вычислено по формуле (12) и при полном затормаживании потока зависит только от начального значения числа Маха. Но изменения давления и плотности газа резко различаются для ударного и равновесного торможений потока. При равновесном торможении потока от скорости, выражаемой числом M_1, до скорости, выражаемой числом M_2, давление газа возрастает значительно сильнее, чем при ударном торможении потока в тех же пределах изменения числа Маха. Одно и то же относительное повышение температуры $\frac{T_2}{T_1}$ при ударном торможении в связи с ростом энтропии приводит к сравнительно небольшому уплотнению газа и поэтому к значительно меньшему повышению давления, чем при безударном, обратимом торможении потока.

Поскольку давление по уравнению Клапейрона для любого состояния газа пропорционально произведению абсолютной температуры на плотность газа, то нетрудно сообразить, что в диаграмме, представленной на рис. 271, состояния газа с одинаковым относительным повышением температуры лежат на прямой, проходящей через начало координат и наклоненной к оси абсцисс под углом, тангенс которого равен $\frac{T_2}{T_1}$. При полном затормаживании сверхзвукового потока, имевшего начальное значение числа $\mathsf{M}_0=2$, относительное повышение температуры по формуле (12) получается равным 1,8; прямая, соответствующая этому случаю, показана на рис. 271 пунктиром. По точкам пересечения этой прямой с адиабатами Гюгонио и Пуассона мы видим, что ударное торможение приводит к повышению

давления в скачке уплотнения приблизительно в 3,8 раза и к уплотнению в 2,2 раза, тогда как равновесное торможение того же потока обеспечивает повышение давления в восемь раз при уплотнении в 4,4 раза.

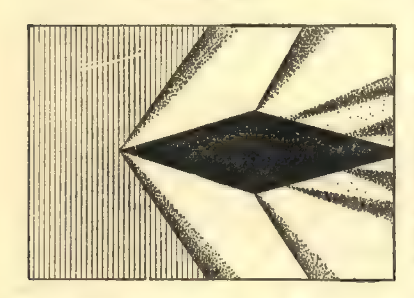


Рис. 272. Прямой скачок уплотнения, возникающий перед отверстием диффузора.

На рис. 272 показан скачок уплотнения, возникающий перед отверстием диффузора. На рис. 273 изображены скачки уплотнения, возникающие при полете снаряда (М=2,5) и перед остроконечным телом (при М=1,7).

При полете снарядов, ракет и самолетов скачки уплотнения порождают дополнительное сопротивление — *волновое сопротивление*. В этих случаях скорость распространения ударной волны $w_{волн}$ совпадает со скоростью движения тела w_0.

Когда тело движется со скоростью, меньшей скорости звука, упругие деформации («возмущения») среды, вызываемые столкновением среды с передней поверхностью тела, распространяются во все стороны со скоростью звука и, следовательно, обгоняют тело. В отличие от этого при движении тела со сверхзвуковой скоростью упругие деформации среды не обгоняют тело, и ударное сжатие среды (скачок уплотнения) перемещается вместе с телом, вовлекая среду за фронтом волны в движение в том же направлении со скоростью w, меньшей скорости звука.



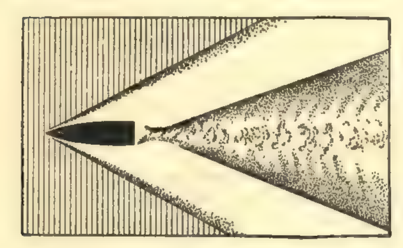


Рис. 273. Косые скачки уплотнения.

Геометрическая форма поверхности, на которой происходит скачок уплотнения, определяется интенсивностью возникшей ударной волны и зависит от скорости движения и формы тела (рис. 272 и 273). Наибольшее рассеяние энергии происходит при *прямых скачках уплотнения*. В *косых скачках уплотнения* рассеяние энергии меньше и соответственно меньше волновое сопротивление тела. Поэтому снарядам, пулям, ракетам и самолетам, летающим со сверхзвуковой скоростью, придают остроконечную форму, а крылья делают стреловидными и с острой передней кромкой.

Угол между направлением движения и поверхностью, на которой происходит скачок уплотнения, для прямых скачков равен 90°, а для косых скачков он меньше чем 90°, но больше некоторого угла α, который определяется соотношением

$$\sin\alpha = \frac{c}{w_0} = \frac{1}{M_0}. \qquad (18)$$

Для пояснения сказанного о величине угла наклона скачка обратимся к рис. 274. При движении тела в среде со сверхзвуковой скоростью w_0 возмущение, производимое носком тела, распространяется во все стороны с тем большей скоростью, чем больше ударное повышение давления в среде перед носком тела. При малых повышениях давления возмущение распространяется со скоростью звука c, и эти слабые возмущения все время остаются внутри конуса, называемого *ко-*

нусом Маха. За время τ тело проходит путь $w_0\tau$, а возмущение проходит путь $c\tau$. Все возмущения, складываясь друг с другом, образуют коническую поверхность, которая и является поверхностью раздела между возмущенной и невозмущенной

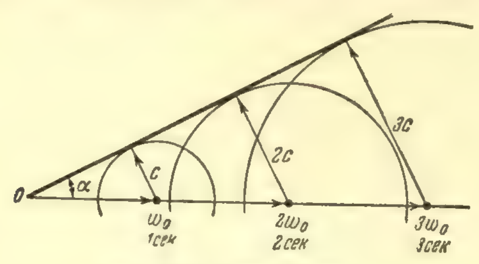


Рис. 274. Конус Маха.

средами, т. е. поверхностью ударной волны. Из рис. 274 ясно, что отношение $c\tau$ к $w_0\tau$ представляет собой синус угла α при вершине конуса: $\sin\alpha = \frac{c\tau}{w_0\tau}$; отсюда и получается соотношение (18).

§ 135. Процессы в двигателях внутреннего сгорания

Двигатели внутреннего сгорания вошли в употребление в последние два десятилетия XIX в. Схема работы *четырехтактного* двигателя внутреннего сгорания пояснена на рис. 275. Горючая смесь топлива с воздухом засасывается в цилиндр двигателя через карбюратор и в нужный момент воспламеняется электрической искрой или же жидкое топливо через форсунку впрыскивается под большим давлением в рабочий цилиндр в процессе сжатия воздуха и там самовоспламеняется от высокой температуры воздуха (чтобы обеспечить хорошее распыление, впрыскивание топлива производят под давлением в несколько сотен атмосфер).

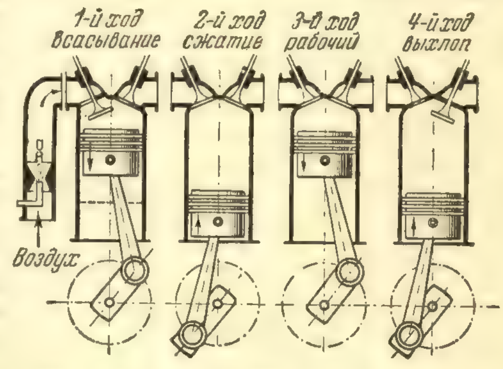


Рис. 275. Схема работы четырехтактного двигателя.

Наряду с четырехтактными двигателями с начала XX в стали применять *двухтактные* двигатели, принцип устройства которых пояснен на рис. 276. В двухтактных двигателях полость, в которой происходит движение кривошипа, устраивается герметичной; эту полость называют кривошипной камерой. Во время рабочего хода поршень, толкаемый расширяющимися продуктами сгорания, часть производимой работы затрачивает на сжатие воздуха в кривошипной камере. В некоторый момент при движении поршня вправо (согласно рис. 276) левый край поршня подходит к имеющемуся в стенке цилиндра отверстию — «выхлопному окну». При дальнейшем движении поршня отработавшие газы вырываются через это выхлопное окно, и давление в цилиндре падает. Несколько позже, при

движении поршня в том же направлении, левый край поршня открывает «продувочное окно»; сжатый воздух из кривошипной камеры устремляется через продувочное окно в цилиндр и вытесняет из цилиндра остатки отработавших продуктов сгорания. Освобождение цилиндра от отработавших продуктов сгорания и наполнение его свежим воздухом продолжается до прихода поршня в правую «мертвую» точку и на обратном пути его до момента перекрытия выхлопного окна. После этого происходит сжатие, продолжающееся до прихода поршня в левую «мертвую» точку; сгорает новая порция топлива, и цикл повторяется.

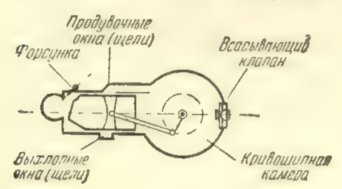


Рис. 276. Схема двухтактного двигателя внутреннего сгорания.

В двигателях внутреннего сгорания рабочее расширение продуктов сгорания происходит столь быстро (при 1500 об/мин в сотую долю секунды), что большой теплоотдачи от раскаленных продуктов сгорания к охлаждаемым стенкам цилиндра и поршню не успевает произойти. Если бы этой теплоотдачи не было совсем, то сжатие и расширение в двигателе происходили бы адиабатно. Наличие потерь и неравновесность процессов учитывают тем, что считают показатель степени $\varkappa$ в уравнении Пуассона отличающимся от теоретической величины (c_p/c_v) и определяют этот показатель опытным путем. Уравнение $pv^n = \text{const}$ с эмпирическим показателем степени $n \neq \varkappa$ называют *уравнением политропы*.

При расширении с потерями энергии, вызванными теплоотдачей, политропа круче спадает к оси объемов, чем адиабата, так как уменьшение давления происходит не только вследствие расширения, но и вследствие дополнительного охлаждения газа, вызванного теплоотдачей; поэтому $n_{\text{расш}} > \varkappa$ и разность $n_{\text{расш}} - \varkappa$ может служить мерой теплопотерь. Однако в начальной стадии рабочего расширения в двигателях внутреннего сгорания высокая температура газа поддерживается продолжающимся сгоранием топлива. По указанной причине политропа в начальной стадии рабочего расширения оказывается более пологой, чем адиабата (показатель степени для политропы в начальной стадии расширения на 0,1—0,2 меньше, чем показатель степени для адиабаты). В последующей стадии рабочего расширения вследствие охлаждения продуктов сгорания при их соприкосновении со стенками цилиндра и поршнем политропа расширения пересекает адиабату и круче спадает к оси объемов, чем адиабата (в этой стадии показатель степени в уравнении политропы на 0,1—0,2 превышает показатель степени в уравнении адиабаты). В итоге средний показатель степени в уравнении политропы всего процесса расширения в целом оказывается примерно таким же, как показатель степени в уравнении адиабаты при высокой температуре продуктов сгорания (так, для бензиновых двигателей $n_{\text{расш}} \approx 1{,}24$, причем при температуре порядка 2000° вследствие увеличения теплоемкостей c_p и c_v величина $\varkappa = c_p/c_v \approx 1{,}24$; для процессов сжатия в двигателях внутреннего сгорания в среднем $n_{\text{сж}} = 1{,}33$).

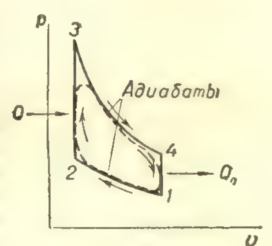


Рис. 277. Цикл Отто.

Идеализированный цикл двигателя внутреннего сгорания *с принудительным зажиганием* (четырехтактного двигателя или же двухтактного — это безразлично) — так называемый цикл Отто — изображен на рис. 277. Процессы в двигателе внутреннего сгорания в действительности не составляют замкнутого цикла, так как продукты сгорания после их выхлопа и охлаждения не являются, конечно, тождественными с исходной рабочей смесью топлива и воздуха. Но можно показать, что для термодинамического вычисления эффективности двигателя указанное обстоятельство не имеет большого значения: коэффициент полезного действия двигателя существенно не изменился бы, если бы рабочим

веществом в двигателе был идеальный газ, внезапно получающий извне теплоту, равную теплоте сгорания топлива, и после рабочего расширения и изохорного охлаждения возвращающийся в исходное состояние.

Для цикла Отто, так же как и для рассматриваемого ниже цикла Дизеля, весьма важной величиной, определяющей эффективность использования теплоты сгорания, является *степень сжатия* горючей смеси: $\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$, где v_1 и v_2 — объемы в начале и в конце сжатия. В двигателях, цикл которых близок к циклу Отто, *смесь воздуха с топливом вводится* в цилиндр через карбюратор *перед сжатием* (точка *1*) или же в других конструкциях топливо впрыскивается в цилиндр во время сжатия. К концу сжатия (точка *2*), когда в цилиндре должна произойти вспышка, введенное в цилиндр топливо благодаря интенсивному перемешиванию его с воздухом и повышению температуры оказывается уже достаточно хорошо подготовленным для быстрого сгорания. Подготовленная так смесь воспламеняется электрической искрой и сгорает настолько быстро, что *процесс сгорания протекает при почти неизменном объеме* (линия *2—3*). Во избежание преждевременного самовоспламенения горючей смеси в двигателях, работающих по циклу Отто, приходится ограничиваться небольшой степенью сжатия ($\varepsilon = 4 - 8$). После рабочего расширения продуктов сгорания (линия *3—4*) следует выхлоп (линия *4—1*). Действительный ход процессов показан на рис. 277 пунктиром.

Вычисление, которое легко может быть выполнено посредством уравнений Клапейрона и Пуассона, показывает, что термодинамический к. п. д. цикла Отто равен:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa - 1}}, \tag{19}$$

где для идеализированного цикла $\varkappa$ — показатель степени в уравнении адиабаты. Указанной простой формулой, подставляя в нее вместо $\varkappa$ эмпирический показатель степени n, часто пользуются в ориентировочных расчетах для определения так называемого *индикаторного к. п. д.* η_i, который после умножения его на механический к. п. д. двигателя дает *эффективный к. п. д.* (Механический к. п. д. η_e учитывает потери на трение и привод вспомогательных механизмов; эти потери обычно не превышают 10—20%, поэтому при ориентировочной оценке эффективного к. п. д. часто принимают $\eta_e = 0{,}8\eta_i$.)

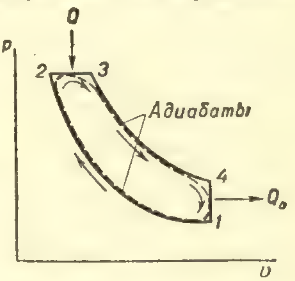


Рис. 278. Цикл Дизеля.

Эффективный к. п. д. карбюраторных и газовых двигателей чаще всего составляет 24—28%.

В двигателях, работающих по *циклу Дизеля* (рис. 278), в начале сжатия (линия *1—2*) цилиндр наполняется чистым воздухом и *топливо вбрызгивается в цилиндр незадолго до конца сжатия* (вблизи точки *2*), когда температура воздуха в цилиндре, сжатого до давления 30—34 *ат*, уже значительно превосходит температуру самовоспламенения рабочей смеси. Жидкое топливо поступает в цилиндр в мелкораспыленном состоянии, *самовоспламеняется и сгорает при почти неизменном давлении* (линия *2—3*). Далее следуют рабочее расширение (линия *3—4*) и выхлоп (линия *4—1*). Большая степень сжатия (от $\varepsilon = 12$ до $\varepsilon = 20$) обеспечивает двигателям Дизеля высокий коэффициент полезного действия. Эффективный к. п. д. этих двигателей составляет 30—35%. Наиболее высокий к. п. д. (до 38%) имеют так называемые бескомпрессорные дизели, у которых начальная стадия горения рабочей смеси идет почти при неизменном объеме, а последующая стадия горения продолжается при мало изменяющемся давлении.

Основным топливом для двигателей внутреннего сгорания служат продукты перегонки нефти: бензин, лигроин, керосин, газойль и соляровое масло, получаемое выделением мазута из тяжелых остатков нефти При переработке нефти

широко применяют *крекинг* нефти — термическое разложение углеводородов нефти на более простые под влиянием нагрева до 500—650° С, часто при давлении в несколько десятков атмосфер; при крекинге получается примерно в два раза больше бензина, чем при простой перегонке. По количеству природных запасов нефти Советский Союз стоит на первом месте: мы располагаем более чем половиной мировых запасов нефти.

При сгорании бензина, керосина, солярового масла выделяется 10 000—11 000 *ккал* на каждый *кг* топлива Работа одной лошадиной силы в час эквивалентна 634 *ккал*. Стало быть, если при сжигании 1 *кг* топлива выделяется 10 500 *ккал* (это число считают *стандартной теплотворностью топлива*), то при 100-процентном превращении тепла в работу для получения 1 *л. с.* в час потребовалось бы $\frac{634}{10\,500} = 0{,}060$ *кг* топлива. Поскольку в работу в действительности превращается только часть энергии, выделяемой топливом, равная эффективному к. п. д. двигателя, то для получения 1 *л. с.* в час требуется не 60 *г* топлива, а в $\frac{1}{\eta_e}$ раз большее количество топлива. Таким образом, *удельный расход топлива на лошадиную силу в час* равен $\frac{60}{\eta_e}$ *г/л. с. час*. Отсюда получается, что при эффективном к. п. д. в 33% ($\eta_e = 0{,}33$ соответствует средней эффективности дизелей) удельный расход топлива составляет 180 *г/л. с. час*; при $\eta_e = 0{,}25$ (как это обычно имеет место у карбюраторных моторов) расход топлива составляет 240 *г/л. с. час*, а при $\eta_e = 0{,}2$ удельный расход топлива достигает 300 *г/л. с. час*.

Для сгорания 1 *кг* бензина, керосина или дизельного топлива требуется около 15 *кг* воздуха. Приблизительно в такой пропорции вводится воздух в цилиндры карбюраторных двигателей. Но в дизелях хорошее сгорание капелек более тяжелого топлива достигается только при значительных избытках воздуха, который засасывают поэтому (при полной нагрузке двигателя) в количествах в 1,5—2 раза бо́льших, чем указанное выше (а при недогрузках в еще больших количествах). В связи с этим резко различаются температурные режимы дизелей и карбюраторных моторов. Так, например, температура сгорания бензина в авиационных двигателях достигает 2400—2500° С, а температура продуктов сгорания при выхлопе (который для получения большой мощности при малых габаритах двигателя производится при 4—5 избыточных атмосферах) остается еще весьма высокой и составляет 1200—1400° С. Для дизелей более характерны температуры сгорания порядка 1600—1700° С и температуры выхлопа 500—700° С.

Если проанализировать тепловой баланс двигателя внутреннего сгорания, то сразу обнаруживается, что теплота, не превращенная в работу, слагается главным образом из тепла, уносимого продуктами сгорания при выхлопе, и теплоты, отданной охлаждающей среде через стенки цилиндра. Когда выхлоп производится при небольшом избыточном давлении (это осуществимо только в стационарных двигателях, где нет необходимости стремиться к предельной компактности двигателя), то теплота, уносимая продуктами сгорания при выхлопе, является термодинамически неизбежной потерей и может быть только косвенно использована для каких-либо целей подогрева. При больших избыточных давлениях выхлопа (как в авиационных моторах) остаточное теплосодержание выхлопных газов может быть непосредственно использовано для получения дополнительной работы; с этой целью выхлопные газы направляют в газовую турбину, которая вращает нагнетатель, поджимающий воздух, подаваемый в двигатель.

Что касается теплоты, отдаваемой продуктами сгорания через стенки цилиндров охлаждающей среде (например, охлаждающей воде), то хотя эта теплота часто составляет около $^1/_3$ энергии, внесенной сгорающим топливом, но устранение этой теплоотдачи не может намного увеличить производимую двигателем работу. Действительно, примерно половина этой теплоты отдается через стенки цилиндров охлаждающей воде после открытия выхлопного клапана; если бы этой теплоотдачи не было, то это тепло было бы унесено выхлопными газами. Из остающейся половины примерно $^2/_3$ тепла отдаются охлаждающей среде к концу хода расши-

рения, когда площадь соприкосновения газов и стенок цилиндра велика. Эффективность этого тепла в связи с понизившимся давлением газов весьма мала. Таким образом, примерно только $^1/_6$ тепла, отданного охлаждающей среде, могла бы быть более или менее эффективно (допустим с к. п. д. в 40%) превращена в работу. Следовательно, производимая двигателем работа возросла бы примерно только на $^1/_{15}$ тепла, отданного охлаждающей среде, т. е. эффективный к. п. д. двигателя при полном устранении теплоотдачи к охлаждающей среде возрос бы не более чем на 2—4%. Тот же итог получится, если, доведя жидкость, охлаждающую двигатель, до кипения, использовать ее во вспомогательной паровой машине.

Сказанным объясняется, почему главное внимание при усовершенствовании двигателей внутреннего сгорания было обращено на: 1) устранение потерь в начальной стадии рабочего расширения, когда давление, а поэтому и работоспособность газов велики; 2) обеспечение условий возможно более полного сгорания топлива (что для малолетучих моторных топлив и привело к дизельному циклу в варианте бескомпрессорного дизеля); 3) использование давления выхлопа присоединением к двигателю газовой турбины; 4) уменьшение размеров и веса двигателей (вес авиационных двигателей удалось довести примерно до ½ *кГ* на 1 *л. с.* их мощности).

Чтобы правильно оценить значение двигателей внутреннего сгорания, достаточно вспомнить, что эти двигатели привели к повсеместному использованию автомашин, обеспечили развитие авиации, позволили механизировать сельское хозяйство: к 1957 г. на полях Советского Союза работало свыше полутора миллионов тракторов; дизели получили широкое применение на электростанциях, на судах (теплоходах), на локомотивах (тепловозах), в танках, в землечерпательных машинах и т. д.

§ 136. Процессы в паровых машинах и паровых турбинах

Поршневые паровые машины являются, как известно, старейшими тепловыми двигателями, вошедшими в широкое употребление на фабриках в конце XVIII в., а на железных дорогах и во флоте — в первые десятилетия XIX в.; первая годная для эксплоатации паровая турбина была сконструирована французским инженером Лавалем в 1885 г. Несмотря на низкий (в сравнении с двигателями внутреннего сгорания) к. п. д., паросиловые установки по-прежнему занимают видное место в промышленности и на транспорте, так как они позволяют использовать теплоту сгорания дешевых видов топлива: каменного угля, торфа, мазута, древесины.

Резервы и выработка этих видов топлива огромны. В СССР годовая добыча угля составляет около полумиллиарда тонн. Одни запасы торфа в СССР по теплотворной способности равносильны 150 млрд. *т* нефти, что превосходит все мировые запасы нефти. Этим и определяется практическое значение паросиловых установок. Множество больших электростанций и крупные военно-морские суда оснащены паровыми турбинами мощностью в десятки (и более ста) тысяч *л. с.*; на железных дорогах, на небольших электростанциях, в промышленных предприятиях и на небольших судах применяются поршневые паровые машины самой разнообразной мощности (преимущественно порядка сотен и тысяч *л. с.*).

К. п. д. *поршневых паровых машин* часто составляет всего 10—12%. Низкий к. п. д. паровых машин объясняется не какими-либо их конструктивными недостатками, но, во-первых, *малой разностью температур, между которыми заключен цикл паровой машины*, и, во-вторых, *неизбежными потерями тепла в топке*.

Максимальный коэффициент полезного действия, который может иметь какая-либо тепловая машина, не может превысить того к. п. д., который при заданных пределах температур присущ циклу Карно:

$$\eta = \frac{T - T_0}{T}.$$

Для паровой машины T есть температура пара в котле. При давлении в котле $p = 12$ *ат* $T = 460°$. T_0 — температура конденсации отработавшего пара; в случае выпуска отработавшего пара в атмосферу $T_0 \approx 373°$; при выпуске отработавшего пара в конденсатор, в котором поддерживается давление в 1/10 *ат*, $T_0 = 318°$. Для указанных условий (при давлении в котле в 12 *ат* и при выпуске пара в конденсатор) $\eta \cdot 100 = 31\%$. Это означает, что не более 31% тепла, сообщенного воде, может быть превращено в работу. Но примерно только 70% теплоты сгорания топлива идет на нагревание воды, остальное количество уносится дымовыми газами; до 10% составляют потери на трение, следовательно, эффективный к. п. д. паровой машины в указанных условиях не может превышать 20% [1]). Если давление пара в котле равно 9 *ат*, то к. п. д. паровой машины будет не более 16%.

Обычно стремятся приблизить цикл паровой машины к так называемому *циклу Ренкина*, изображенному на рис. 279. На рис. 279 точка *1* отвечает термодинамическому состоянию воды, поступающей в паровой котел. Линия *1—2* изображает процесс нагревания воды в котле до температуры кипения T при давлении p (точка *2*). Изотерма-изобара *2—3* изображает процесс парообразования; образующийся пар наполняет рабочий цилиндр, перемещая поршень. Производимая при этом поршнем работа изображается площадью, заключенной между изохорами, проходящими через точки *2* и *3*, и ограниченной сверху линией *2—3*. Эту работу называют *работой наполнения*. Когда часть цилиндра окажется наполненной паром, прекращают доступ пара в цилиндр. Это называют *отсечкой* пара (точка *3*). Последующее расширение пара происходит примерно адиабатно, пока давление пара не упадет до того давления p_0, которое поддерживается в конденсаторе. Точка *4* изображает термодинамическое состояние пара в конденсаторе (давление p_0 и температура T_0).

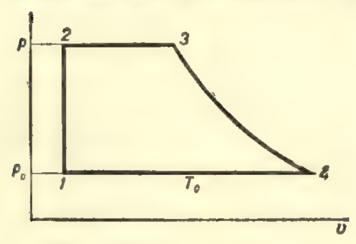


Рис. 279. Цикл Ренкина.

Первой мерой к повышению к. п. д. паровых машин является *расширение температурных пределов* цикла. С этой целью стремятся повысить температуру кипения воды в котле. Часто поддерживают давление в котле в 10—16 *ат*, что соответствует температуре кипения в 180—200° С. Все шире входят в употребление (в особенности для паровых турбин) котлы высокого давления в 60—170 *ат*, что соответствует температуре кипения в 275—350° С. Для понижения температуры конденсации отработавшего пара его выпускают не в атмосферу, а в конденсатор, где поддерживается давление примерно в 0,1 *ат* (или даже 0,03 *ат*) и где поэтому пар сгущается в воду при 45° С (или 24°), а не при 100° С, как это имело бы место при выпуске отработавшего пара в атмосферу.

Второй по своему значению мерой к повышению к. п. д. паровых машин является *борьба с преждевременной конденсацией пара*. В поршневой машине к концу цикла при выпуске пара в конденсатор стенки цилиндра и поршень охлаждаются, поэтому при впуске в цилиндр новой порции пара из котла часть пара сгущается в воду и в виде капель оседает на стенках цилиндра и на внутренней поверхности поршня. После отсечки пара во время последующего расширения благодаря связанному с расширением падению температуры еще некоторая часть пара сгущается в воду. Так как работа производится паровой машиной вследствие давления пара на поршень, а сконденсировавшийся пар уже не оказывает этого давления, то понятно, что вся преждевременно сконденсировавшаяся часть пара представляет собой совершенно такую же непроизводительную трату пара, как и прямая утечка пара, происходящая из-за недостаточно плотного прилегания поршня к стенкам цилиндра.

---

[1]) $0{,}31 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \approx 0{,}2$.

Наиболее действительной мерой против преждевременной конденсации пара является *перегрев пара*. На пути из котла в цилиндр пар заставляют проходить через обогреваемые топочными газами трубы пароперегревателя (рис. 280). Пар из насыщенного превращается в перегретый; обычно создают перегрев на 150—200°, так что при впуске пара в цилиндр хотя и происходит некоторое падение температуры пара, но пар все еще остается перегретым, и стенки цилиндра даже во время расширения почти не увлажняются [1]).

В машинах, работающих насыщенным паром, для уменьшения преждевременной конденсации внешние стенки цилиндра обогревают горячим паром посредством устройства, которое носит название паровой рубашки.

Чем шире температурные пределы цикла, тем более резкое охлаждение испытывает каждая новая порция пара, впускаемого в цилиндр из котла. Поэтому

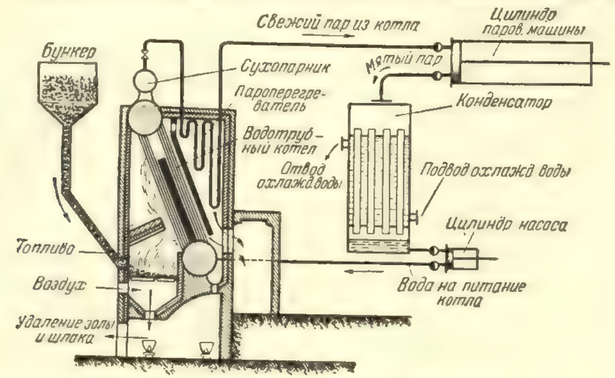


Рис. 280. Схема паровой установки.

применение высокого давления (высокого нагрева пара в котле), с одной стороны, повышает к. п. д. цикла, но, с другой стороны, увеличивает потери, связанные с преждевременной конденсацией пара. Это побуждает строить машины с несколькими (чаще — двумя) рабочими цилиндрами, через которые последовательно проходит пар, испытывая в каждом цилиндре расширение при постепенно падающей температуре. Этим достигается в каждом цилиндре меньшая разность температуры между свежим паром, поступающим в цилиндр, и отработавшим. Поэтому стенки каждого цилиндра, имея после выхлопа отработавшего пара температуру не слишком низкую в сравнении с температурой свежего пара, не так сильно охлаждают свежий пар.

На рис. 280 представлена схема паросиловой установки, понятная по сделанным на схеме надписям. На этой схеме показан обычный водотрубный котел с двумя барабанами.

Большое преимущество имеют *прямоточные* котлы системы Л. К. Рамзина. Схема такого котла представлена на рис. 281. В котле Рамзина нет громоздких барабанов, которые обычно служат для обеспечения естественной циркуляции

---

[1]) На первый взгляд может показаться, что перегрев пара должен увеличивать к. п. д. паровой машины не только потому, что этим путем устраняются потери, связанные с преждевременной конденсацией пара, но также и потому, что перегрев значительно расширяет температурные пределы цикла. Оказывается, однако (термодинамика позволяет предвидеть это), что ф о р м а цикла изменяется при этом в невыгодную сторону, и поэтому расширение температурных пределов цикла путем перегрева почти не было бы эффективным (в смысле повышения к. п. д.), если бы не сказывалась другая, более важная роль перегрева, заключающаяся в устранении преждевременной конденсации.

воды и собирания пара. В обычных котлах вода и пароводяная смесь поднимаются по одной системе трубок, а по другим трубкам вода опускается. Вода совершает многократную циркуляцию по этим трубкам, раньше чем она успевает превратиться в пар. Вместо обычной естественной циркуляции воды в котле Рамзина введена принудительная циркуляция воды. Вода подается насосом под значительным давлением в длинный змеевик. В первой части змеевика вода нагревается отходящими газами до температуры кипения; во второй части змеевика, охваченной пламенем, вода кипит, превращаясь в пар высокого давления (более 120 *ат*); в третьей части змеевика происходит перегрев пара.

Рис. 281. Прямоточный котел.

Рис. 282. Сопла турбины.

В *паровых турбинах* в механическую работу преобразовывается кинетическая энергия пара. Из котла пар под большим давлением поступает в направляющие аппараты (сопла) турбины (рис. 282) и в них за счет падения давления приобретает при выходе большую скорость, примерно 1000 *м/сек.* Чтобы в сопле происходило возможно более полное превращение внутренней энергии пара в кинетическую энергию, *соплу придают форму расширяющегося к выходу канала* (§ 133). Покинув направляющие аппараты, пар поступает на лопатки турбинного колеса, производит на них давление и приводит рабочее колесо турбины во вращение.

Различают два принципа действия пара на лопатки турбин: активное и реактивное. Для пояснения этих принципов приведены схемы на рис. 283 и 284 [1]).

На рис. 283 изображена схема *активного* действия пара на лопатки турбины. Лопатки турбины закреплены на рабочем диске, насаженном на вал турбины. Рабочий диск вращается в плоскости, перпендикулярной к чертежу; u означает окружную скорость диска. Пар из котла поступает при давлении p_1 к соплу и в нем, приобретая ускорение, испытывает падение статического давления до значения p_2. По выходе из сопла пар со скоростью c_1 поступает на лопатку; w_1 означает ту относительную скорость, с которой пар протекает вдоль лопатки. Изогнутая лопатка отклоняет струю пара; благодаря этому пар давит на лопатку турбины с силой, которая представляет собой развиваемую им центробежную силу.

Вследствие трения пара о поверхность лопатки относительная скорость пара несколько снижается. Относительная скорость отработавшего пара w_2, сложенная с окружной скоростью u, дает абсолютную скорость выхода пара c_2. Если не учитывать потери на трение пара, то работа, воспринятая лопатками от каждого килограмма пара, протекающего через рабочее колесо турбины, измеряется

[1]) На этих рисунках лопатки направляющего аппарата заменены соплами.

убылью кинетической энергии пара: $\left(\frac{c_1^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g}\right)$ *кГм*, где c выражено в *м/сек*, а g — в *м/сек*^{2}.

В разбираемом случае характерны следующие явления:

1) Преобразование внутренней энергии пара в кинетическую происходит исключительно в направляющих, неподвижных аппаратах (в соплах). 2) Давление пара при выходе из сопла (при выходе на лопатки) понижено до величины противодавления среды, так что при течении пара вдоль лопатки давление остается неизменным. 3) Поскольку на лопатках давление пара остается неизменным, *входные и выходные сечения каналов, образуемых соседними на диске лопатками, устраивают одинаковыми.*

Турбины, в которых применен активный принцип действия пара, часто называют турбинами равного давления.

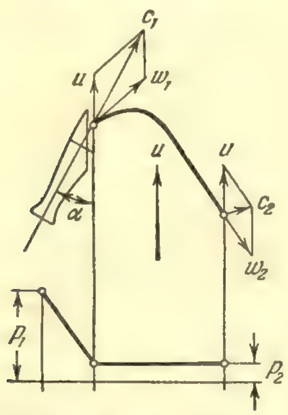


Рис. 283. Активное действие пара на лопатку турбины.

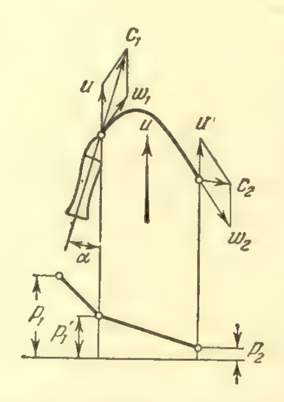


Рис. 284. Реактивное действие пара на лопатку турбины.

На рис. 284 изображена схема *реактивного* действия пара на лопатку турбины. В этом случае пар, проходя через сопло, испытывает не полное расширение, а лишь частичное. Покидая сопло, он имеет давление p_1' больше, чем противодавление среды p_2. Поэтому абсолютная скорость c_1 входа пара на лопатку в этом случае соответствует не полному перепаду давлений, а лишь разности их $p_1 - p_1'$. Лопатки изогнуты и расположены на ободе так, что *межлопаточные пространства представляют собой каналы с возрастающим сечением.* Пар, протекая меж лопатками, продолжает расширяться, и по выходе из лопаток давление его падает до противодавления среды p_2. Следовательно, в этом случае преобразование внутренней энергии пара в кинетическую происходит в соплах лишь частично и заканчивается уже на турбинном колесе в расширяющихся каналах межлопаточных пространств.

Относительная скорость течения пара вдоль лопатки получается так же, как и в случае схемы рис. 283, разложением абсолютной скорости по направлению окружной скорости и по направлению касательной к поверхности лопатки. Вследствие расширения пара в межлопаточных каналах относительная скорость возрастает от w_1 до w_2. *Пар получает ускорение и поэтому оказывает на лопатку турбины, кроме давления отклонения струи, еще давление реакции струи.*

Реактивные турбины часто называют турбинами избыточного давления.

Для обеспечения наибольшего к. п. д. надо, чтобы окружная скорость u лопаток турбины составляла в случае активной турбины примерно половину скорости выхода пара из сопла, а в случае реактивной турбины окружная скорость

должна быть почти равна скорости выхода пара. Более точно: для активной турбины надо, чтобы $u = \frac{1}{2} c_1 \cos\alpha$, а для реактивной $u = c_1 \cos\alpha$; угол входа α выбирается возможно более малым, и поэтому значения $\cos\alpha$ не сильно разнятся от единицы.

Даже при использовании средних перепадов давлений абсолютные скорости истечения пара из сопла получаются порядка 1200 *м/сек* (это много более, чем скорость пули). Окружная скорость диска активной турбины должна была бы, следовательно, составлять примерно 600 *м/сек*. Такой окружной скорости при диаметре рабочего колеса в 1 *м* соответствуют 11,5 тыс. оборотов вала в 1 мин. В целях понижения числа оборотов турбины без ущерба для к. п. д. расчленяют работу пара на несколько ступеней.

В однодисковой турбине весь процесс преобразования внутренней энергии в кинетическую осуществляется при помощи одного ряда направляющих аппаратов, расположенных перед рабочим диском. Введением *ступеней давления* разбивают превращение внутренней энергии в кинетическую на несколько этапов. Достигается это тем, что за первым рядом направляющих аппаратов и первым рабочим диском устанавливают второй ряд аппаратов и второй рабочий диск и т. д. (рис. 285). В такой многоступенчатой турбине в каждом ее рабочем колесе используется лишь часть всего располагаемого перепада давлений, следующая часть его используется во второй ступени и т. д. Ступени давления, введенные Парсонсом, допускают работу пара на лопатках и по активному и по реактивному принципам.

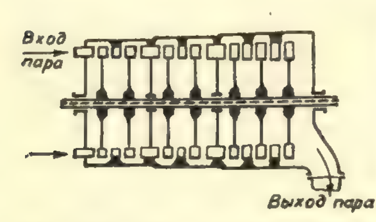


Рис. 285. Схема многоступенчатой турбины.

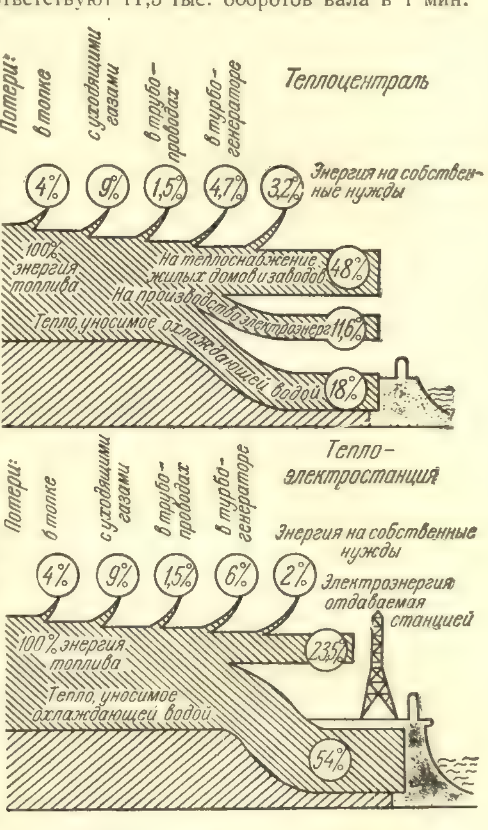


Рис. 286. Тепловые балансы ТЭС и теплоцентрали.

В активных турбинах применяют еще другой способ понижения числа оборотов турбины, введенный Кертиссом,— *ступени скорости*. При применении ступеней скорости отдача кинетической энергии производится паром не в одном рабочем диске, а в нескольких. Пар по выходе из лопаток первого диска поступает на неподвижные промежуточные направляющие лопатки. Назначение последних— изменить направление движения пара для возможности его входа на лопатки второго вращающегося диска с целью дальнейшей отдачи там части кинетической энергии. За вторым рабочим диском следуют опять направляющие лопатки и т. д.

Высокое начальное давление пара и относительно высокий вакуум в конденсаторе обеспечивают паровым турбинам сравнительно высокий к. п. д., достигающий (по отношению к энергии топлива, расходуемого в котле) 25—28%. Удельный расход пара, составляющий в поршневых машинах 8 и более *кг* пара в час на 1 *л. с.*, в паровых турбинах равен 4—4½ *кг/л. с.* в час.

Мощные паровые турбины строят с большим числом ступеней (16—40); общее число лопаток в колесах турбины исчисляется несколькими тысячами; вес турбины составляет 2—4 *кг* на 1 *л. с.* мощности. Роторы турбин на 100 тыс. *квт*, делающие 3000 об/мин, весят около 30 *т*.

На тепловых электростанциях (ТЭС) вода, охлаждающая конденсатор, нагревается на 15—30° и уносит более половины тепла. Чтобы использовать часть этого тепла для теплоснабжения жилых домов, фабрик и заводов, часто вместо ТЭС строят *теплоцентрали*, где в турбинах не весь пар срабатывается до предельно низкого давления, а часть его отбирается с давлением 1,5—2,5 *ат* для подогрева воды в целях теплофикации. На рис. 286 сопоставлены тепловые балансы ТЭС и теплоцентрали.

§ 137. Реактивные двигатели

Ускоренное движение газового потока в трубопроводе переменного сечения и при вытекании газа из сопла вызывается уменьшением давления в газовой струе. Приобретая ускорение, газовый поток оказывает противодействие, порождающее *реактивную силу*, приложенную к трубопроводу и соплу, направленную в сторону, противоположную ускорению газового потока и *равную ежесекундному приросту количества движения вытекающего газа*; когда давление в вытекающей струе на выходе из сопла превышает противодавление среды, реакция газовой струи дополняется импульсом этих неуравновешенных сил давления.

Обозначим ежесекундный весовой расход газа через G, скорость газа перед истечением через w_1 и скорость струи через w_2; тогда ежесекундный прирост количества движения будет равен $G\frac{w_2-w_1}{g}$. Если среднее давление в выходном сечении равно p_2, а противодавление (при выбросе газа в атмосферу — атмосферное давление) равно p_0, то неуравновешенная сила давления, действующая на выходное сечение сопла S_2, будет равна $S_2(p_2-p_0)$. В сумме реакция газовой струи

$$R=G\frac{w_2-w_1}{g}+S_2(p_2-p_0). \qquad (20)$$

Чтобы реализовать вытекание газа со сверхзвуковой скоростью, применяют расширяющиеся сопла; при работе сопла в расчетных условиях давление на выходе в струе равно противодавлению среды, $p_2=p_0$.

Реакция газовой струи используется в реактивных двигателях. Реактивные двигатели подразделяются на две группы: на воздушно-реактивные двигатели (ВРД) и на ракеты. На борту летательного аппарата с воздушно-реактивным двигателем содержится только энергоноситель, а окислителем и рабочим веществом, истечение которого создает тягу, служит атмосферный воздух. Ракетный

двигатель содержит и энергоноситель и рабочее вещество, поэтому его работа не зависит от окружающей среды.

Воздушно-реактивные двигатели захватывают атмосферный воздух, сжимают и нагревают его и с увеличенной скоростью отбрасывают через выходное сопло. За счет прироста количества движения потока и неуравновешенных сил давления в выходном сечении возникает реактивная тяга.

Экономичность реактивного двигателя определяется *удельной тягой* F, т. е. тягой, создаваемой при расходе 1 *кг* энергоносителя в 1 сек.:

$$F=\frac{R}{G}. \qquad (21)$$

В настоящее время распространены два вида ВРД: турбореактивные и прямоточные.

Турбореактивные двигатели (ТРД, рис. 287) состоят из воздухозаборника; ротационного компрессора, вращаемого газовой турбиной; камер сгорания и реактивного сопла. Давление воздуха,

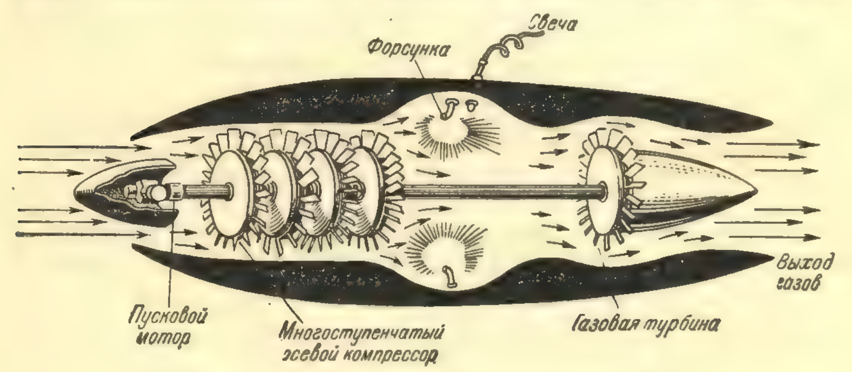


Рис. 287. Схема турбореактивного двигателя.

сжимаемого компрессором, увеличивается в 4—10 раз. Сжатый воздух поступает в камеры сгорания, куда также впрыскивается энергоноситель. В этой камере теплосодержание и температура продуктов сгорания увеличиваются в два-три раза. Продукты сгорания проходят через газовую турбину, имеющую одну, две или три ступени, и приводят во вращение ее колесо, расположенное на одном валу с ротором компрессора. Теплосодержание газа перед турбиной больше, чем за компрессором; поэтому (при равенстве работы, затраченной газом на вращение турбокомпрессора, работе, расходуемой компрессором на сжатие воздуха) понижение давления в турбине меньше повышения давления в компрессоре и скорость истечения из сопла больше скорости набегания: возникает реактивная тяга, равная приросту импульса захватываемого воздуха. С увеличением подогрева теплоперепад на турбине возра-

стает, скорость вращения турбокомпрессора увеличивается, и реактивная тяга растет. Температура газов перед турбиной ограничена термостойкостью лопаток. Для увеличения тяги на сверхзвуковых ТРД за турбиной устанавливают «форсажные камеры», в которых дожигают дополнительное количество горючего, так чтобы температура достигала максимально возможной величины. Тяга возрастает при этом в тем большей мере, чем больше скорость полета.

Применение ТРД становится целесообразным при скорости полета не менее 800 *км/час*.

Турбины газотурбинных двигателей, на которых используется весь перепад давлений, развивают бо́льшую мощность, чем требуется для вращения компрессора. Избыток мощности может служить для привода воздушного винта: так устроены *турбовинтовые двигатели* (ТВД), пригодные при скоростях полета в 600—800 *км/час*.

Прямоточные воздушно-реактивные двигатели (ПВРД) состоят из воздухозаборника, в котором давление повышается за счет



Рис. 288. Схема дозвукового прямоточного воздушно-реактивного двигателя.

скоростного напора набегающего потока, камер сгорания и выходного сопла (рис. 288). При нагревании воздуха его удельный объем возрастает, скорость движения увеличивается и возникает реактивная тяга. Понятно, что в неподвижном воздухе ПВРД не может развивать тяги, так как у него отсутствуют приспособления для засасывания воздуха; самолеты или снаряды, оснащенные ПВРД, нуждаются в принудительном запуске, например при помощи стартовых ракет.

Прямоточные ВРД — единственные двигатели, пригодные для наиболее скоростных самолетов ($M \geqslant 4$). Турбореактивные двигатели (и тем более винтовые) при такой скорости полета работать не могут.

Ракетные двигатели подразделяются на пороховые ракетные двигатели (ПРД) и на жидкостные ракетные двигатели (ЖРД).

Рабочее вещество, находящееся на борту ракеты, неподвижно относительно двигателя ($w_1=0$). Если газы в выходном сопле расширяются до противодавления ($p_2=p_0$), то формула реактивной тяги (20) упрощается:

$$R=\frac{Gw_2}{g}. \qquad (22)$$

Здесь G — расход рабочего вещества в *кг/сек*, w_2 — скорость истечения в *м/сек*. Сила тяги ракеты зависит только от перепада давления и не зависит от температуры газов, так как скорость истечения прямо пропорциональна корню из RT, а расход обратно пропорционален величине RT.

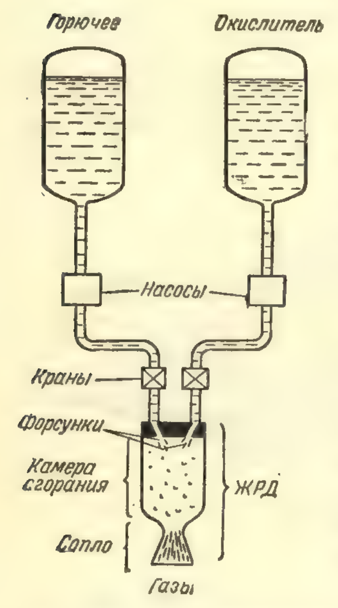


Рис. 289. Схема жидкостного ракетного двигателя.

Удельная тяга ракетных двигателей согласно (21) и (22) равна $\frac{w}{g}$. С увеличением температуры и относительного давления в камере w растет, а с увеличением молекулярного веса газов — убывает. Конечная скорость ракеты определяется по второму закону Ньютона:

$$\frac{dw}{dt}=g\frac{R-P}{P}=g\left(\frac{R}{P}-1\right),$$

где R — тяга, которая остается почти постоянной, а P — вес ракеты, убывающий по мере расхода рабочего вещества ($P=P_{нач}-Gt$). Разделив переменные и интегрируя в пределах от w_0 до $w_{кон}$ и от 0 до t, после несложных преобразований получаем формулу, впервые выведенную К. Э. Циолковским для вертикального запуска ракеты:

$$w_{кон}=g_{ср}\frac{R}{G}\ln\frac{1}{1-\frac{R_{нач}}{R}}+w_0-g_{ср}t. \qquad (23)$$

В эту формулу входит среднее ускорение силы тяжести $g_{ср}$, так как ускорение g убывает с увеличением высоты полета ракеты h:

$$g=g_0\frac{r^2}{(r+h)^2}. \qquad (24)$$

Пороховые ракеты (ПРД) состоят из камеры сгорания с пороховым составом, выходного сопла и запального устройства.

Жидкостные ракетные двигатели (ЖРД) состоят из камеры сгорания с форсунками и запальными приспособлениями, сопла, турбонасосов и баков с горючим и окислителями (рис. 289).

Ракета — единственный двигатель, способный действовать в безвоздушном пространстве и пригодный для космических полетов. Если скорость горизонтального полета ракеты на высоте h столь велика, что ее центростремительное ускорение $\frac{v^2}{r_0+h}$ становится равным ускорению силы тяжести $g=g_0\frac{r_0^2}{(r_0+h)^2}$, ракета становится искусственным спутником Земли. Отсюда орбитальная скорость ракеты

$$v=r_0\sqrt{\frac{g_0}{r_0+h}}. \tag{25}$$

При $r_0=6370000$ *м*, $h=0$ и $g_0=9{,}81$ *м/сек²* $v=\sqrt{g_0r_0}=7900$ *м/сек*. С увеличением высоты орбиты скорость уменьшается.

Период обращения искусственного спутника Земли тем больше, чем больше высота: $T=\frac{2\pi r}{v}=2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$. При $r=r_0$ $T=85$ мин.

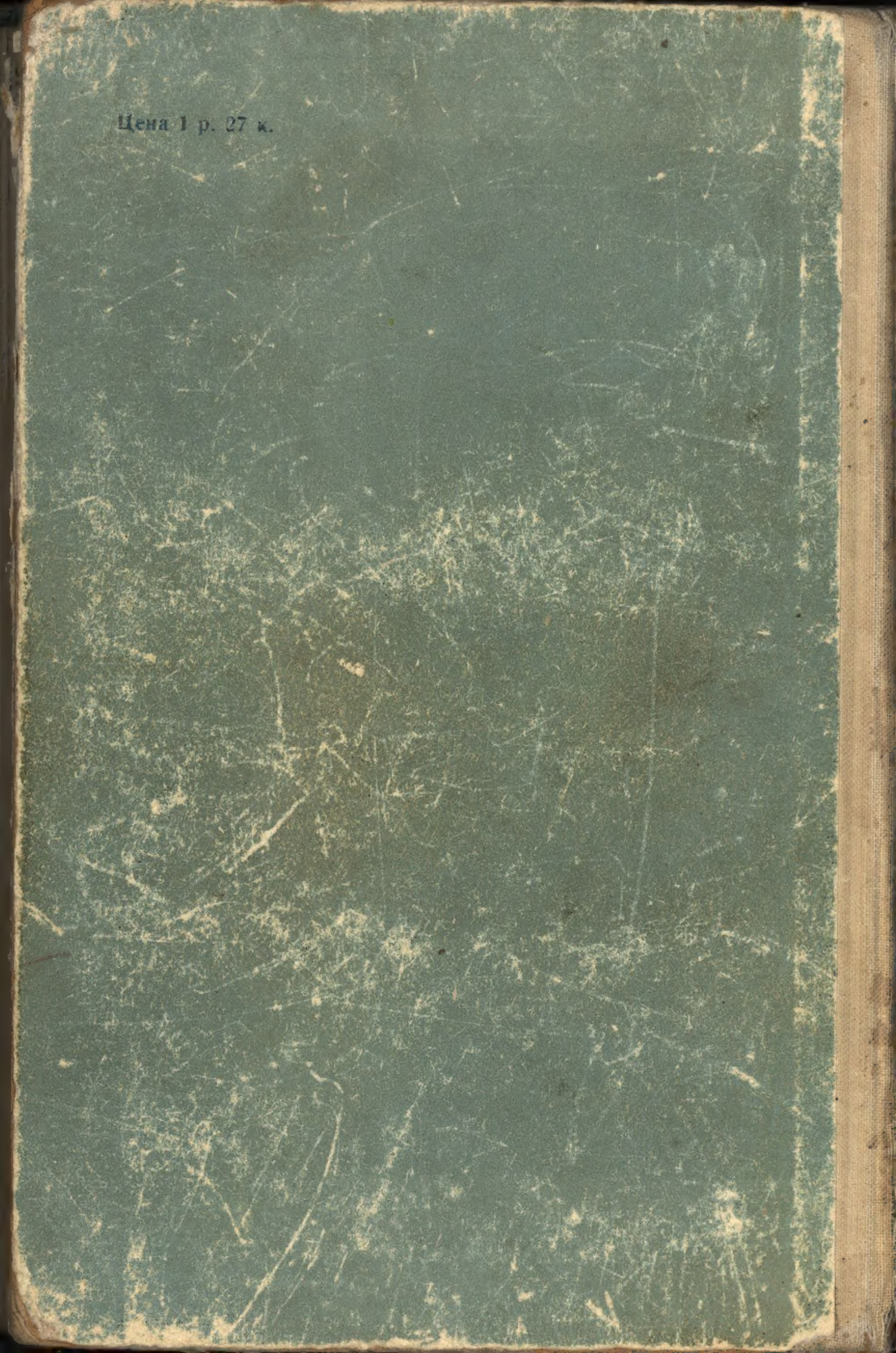
Орбитой искусственного спутника обычно бывает не круг, а эллипс, один из фокусов которого лежит в центре Земли. Наиболее удаленная точка эллиптической орбиты спутника — афелий — находится далеко за пределами атмосферы, а наиболее близкая точка — перигей — может отстоять менее чем на 100 *км* от земной поверхности. При движении вблизи перигея спутник испытывает заметное торможение: его полная энергия, высота орбиты и период обращения убывают, хотя окружная скорость увеличивается, так как убыль потенциальной энергии больше прироста кинетической.

Чтобы ракета достигла орбиты Луны, она должна развить начальную скорость, не меньшую чем 11,2 *км/сек* (см. примечание на стр. 138). Первый запуск такой ракеты был осуществлен 2 января 1959 г. в Советском Союзе. 12 сентября 1959 г. была запущена советская космическая ракета, которая достигла поверхности Луны и доставила на нее вымпел СССР. Запущенная 4 октября того же года автоматическая межпланетная станция сфотографировала обратную сторону Луны и телевизионно передала фотографию на Землю.

В 1960 и 1961 гг. в СССР были запущены 5 гигантских спутников — космических кораблей весом свыше 4½ тонн. Наконец, 12 апреля 1961 г. на корабле-спутнике «Восток» Ю. А. Гагарин свершил первый в истории человечества космический полет, облетев вокруг земного шара

6—7 августа 1961 г на советском космическом корабле «Восток-2» Г. С. Титов за 25 часов сделал 17 с лишним оборотов вокруг Земли и пролетел, таким образом, расстояние в 700 000 километров, т. е. почти вдвое превышающее расстояние от Земли до Луны.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Цена 1 р. 27 к.